



Дж. Бексфи

---

Радиационные

процессы

в

плазме



# RADIATION PROCESSES IN PLASMAS

by

**G. Bekefi**

Department of Physics and Research Laboratory of Electronics  
Massachusetts Institute of Technology

JOHN WILEY AND SONS, INC.,  
NEW YORK • LONDON • SYDNEY

Дж. Бекефи

**Радиационные  
процессы  
В  
плазме**

Перевод с английского

М. Д. РАЙЗЕРА

Под редакцией

А. А. ВЕДЕНОВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1971

Дж. Бекефи — крупнейший специалист по физике плазмы.

В своей книге «Радиационные процессы в плазме» он, в отличие от других авторов, умело сочетает изложение теоретических вопросов с богатейшим экспериментальным материалом, полученным многочисленными исследователями при изучении процессов излучения, поглощения и рассеяния электромагнитных волн плазмой.

Книга предназначена для физиков и инженеров, работающих в области теории физики плазмы и ее практических применений, а также для аспирантов и студентов университетов и физико-технических вузов.

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В предлагаемой книге известного американского специалиста по физике плазмы, профессора Массачусетского технологического института, Дж. Бекефи «Радиационные процессы в плазме» излагается обширный теоретический и экспериментальный материал по распространению, излучению, поглощению и рассеянию электромагнитных волн в газовой плазме.

Автор рассматривает общие вопросы теории переноса излучения (в приложении к анизотропной среде — плазме в магнитном поле), распространение волн в магнитоактивной плазме, тормозное и циклотронное излучение, затухание волн и их усиление (неустойчивость), теорию флуктуаций и теорию рассеяния электромагнитных волн, в плазме.

Книга Дж. Бекефи отличается от имеющихся в литературе тем, что в ней обсуждается ряд вопросов, почти не освещенных в учебниках и монографиях. Сюда относятся приложения к плазме флуктуационно-диссипативной теоремы Каллена — Вельтона; теоретические результаты последнего времени, относящиеся к циклотронному излучению релятивистских электронов и связанные с испрвлением распространенной в литературе ошибки; рассеяние плазменных волн, имеющее большое значение для физики ионосферы, и, в частности, для диагностики ионосферы. Обсуждается вопрос о плазменном эхо, как циклотронном (Хилл и Каплан, 1965), так и открытом недавно на лэнгмюровских волнах (Малмберг и Уортон, 1967). Подробно разбирается тормозное и циклотронное излучение, черенковское излучение и поляризационные потери быстрых частиц в плазме; анализируется влияние коллективных эффектов на эти явления.

Кроме того, в книге Дж. Бекефи, наряду с подробным изложением теоретических представлений, приводятся экспериментальные результаты большого количества ра-

бот с лабораторной («горячей» и «холодной») и космической плазмой.

Значительное внимание автор уделяет рассмотрению задач, близких к эксперименту. Так, в гл. 5 подробно рассмотрено излучение и рассеяние электромагнитной волны цилиндрическим плазменным столбом; обсуждается вопрос об импедансе антенны, возбуждающей плазменные колебания; в гл. 10, специально посвященной экспериментальным методам, излагаются вопросы, связанные с использованием антенн, волноводов и резонаторов при диагностике плазмы.

Изложение носит детальный характер, теория подробно иллюстрируется примерами, ссылками на экспериментальные работы или краткими их рефератами.

В русское издание книги автором внесен ряд новых разделов, отражающих экспериментальные и теоретические результаты последнего времени.

Книга Дж. Бекефи бесспорно будет полезной широкому кругу физиков (теоретиков и экспериментаторов) и инженеров, встречающихся в своей работе с плазмой, и особенно тем, кто имеет дело с диагностикой плазмы. Эта книга, содержащая фундаментальные сведения по плазменной физике, большой теоретический и экспериментальный материал и большой список литературы, может служить ценным пособием для студентов и аспирантов, специализирующихся в области физики плазмы.

*А. А. Веденов*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке настоящего русского издания я внес ряд изменений и дополнений в английское издание 1966 г. Во-первых, я стремился устранить некоторые недостатки английского оригинала. Во-вторых, включил дополнительный теоретический и экспериментальный материал, в который вошли новые результаты, полученные в течение последних трех лет. Наконец, добавил три новых параграфа — § 7 в гл. 4, § 6 и 7 в гл. 8, а § 1 из гл. 6, в котором рассматривается циклотронное излучение, переработал в свете некоторых недавних теоретических результатов.

*Дж. Бекефи*

Кэмбридж,  
Массачусетс,  
Март 1969 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В этой книге рассматриваются испускание, поглощение и рассеяние электромагнитных волн в газовой плазме. Я поставил себе цель — дополнить существующие книги по взаимодействиям волн с плазмой, поэтому те вопросы, которые в них либо опущены, либо нашли скудное освещение, сделал в данной книге центральными.

Среди множества радиационных процессов, происходящих в ионизованном газе, я выбрал только связанные с изменениями «внешних» движений электронов, ионов и атомов плазмы. Именно такие процессы характеризуют плазменное состояние вещества. Не рассматриваются переходы, вызванные изменением внутренней структуры ионов и атомов. Так, в случае испускания и поглощения не рассматриваются атомные линейчатые спектры или молекулярные полосатые спектры. Полное освещение этих вопросов можно найти в книге Грима «Спектроскопия плазмы»<sup>1)</sup>.

В настоящее время наше представление о предмете обязано нескольким источникам. Оно связано частично с усилиями ученых, участвующих в поисках способов контролируемого освобождения термоядерной энергии, частично с усилиями астрономов и радиоастрономов, стремящихся лучше понять свойства космических объектов с помощью наблюдения испускаемого ими излучения, и, частично, оно является результатом исследований тех космофизиков, интересы которых несколько ближе к «дому», например, тех, кто зондирует нашу ионосферу.

При составлении этой книги я без предубеждения «копался» в экспериментальных и теоретических материалах, опубликованных учеными, работающими во всех вышеупомянутых областях. Я не претендую на изложение

---

<sup>1)</sup> H. R. Griem, Plasma Spectroscopy, McGraw-Hill Book Co., New York, 1964. (Готовится русский перевод. — *Ред.*)



оригинальных результатов; скорее, моей целью было просуммировать большое количество существующих работ и попытаться изложить их так, чтобы они иллюстрировали общие основополагающие физические принципы.

Часто приходится слышать, что те вещи, которые экспериментаторы способны измерить в плазме, в силу технических ограничений настолько далеки от идеализированных представлений теоретиков, что лишь редко возникают благоприятные возможности для количественного сравнения. Хотя это утверждение могло быть, вероятно, справедливым всего несколько лет тому назад, я думаю, что положение быстро улучшается. Поэтому мне представлялось своевременным написать книгу, в которой поддерживается тесный контакт между теорией и экспериментом; это был мой честолюбивый замысел. Я испытывал некоторые затруднения, пытаясь сохранить равновесие при освещении вопросов как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения. В конце концов, оказалось невозможным приводить во всех случаях детальную теорию и детальное описание экспериментальной техники и результатов эксперимента. Достигнутый при этом компромисс мне не вполне по душе.

На протяжении всей книги я следовал то одному, то другому из двух методов расчета. В одном из них по уравнениям Максвелла определяются электрические и магнитные поля, возникающие в результате микроскопических движений заряженных частиц. Суммируя поля, создаваемые всей системой частиц, непосредственно получаем энергию, излучаемую зарядами. В другом, обратном методе уравнения Максвелла и Больцмана приводят к дисперсионному соотношению, которое дает пространственную или временную скорость потерь энергии волнами, проходящими через плазму.

Связь между прямым и обратным процессами можно представить в виде линейного соотношения, в которое входит локальное значение усредненной по времени плотности (или потока) поля излучения. Для плазмы, находящейся в локальном термодинамическом равновесии, таким соотношением является закон Кирхгофа. В этом случае нам достаточно рассчитать только прямой или обратный процесс, а не оба. Однако, как мы знаем, плазма не любит находиться в термодинамическом равновесии, так что величина, входящая в соотношение, выражающее связь между прямым и обратным процессами, обычно *априори* неизвестна. Поскольку для полного описания излучения, выходящего из плазмы, требуется знать оба

процесса, то наша задача в этой книге — либо попытаться вывести соответствующий закон типа закона Кирхгофа, либо рассчитать отдельно прямой и обратный процессы, что в известном смысле одно и то же.

Гл. 1 посвящена распространению волн и течению энергии в анизотропной плазме. В гл. 2 обсуждаются обобщения классических законов излучения на случай анизотропной термически неравновесной среды. Эти две главы являются весьма общими и в них конкретные процессы излучения описываются лишь с целью иллюстрации.

В гл. 3 и 9 мы пытаемся рассмотреть сами явления. В гл. 3—5 нас интересуют эффекты, которые существенно не зависят от наличия внешнего магнитного поля, как, например, тормозное излучение поперечных электромагнитных волн, черенковское излучение продольных волн, рассеяние и поверхностные волны в плазме конечных размеров. В этих главах мы переходим от простой парной модели для испускания и поглощения (гл. 3) к обсуждению коллективных эффектов (гл. 4 и 5).

В гл. 6 мы исследуем влияние внешнего магнитного поля и «циклотронные» явления сначала на основе одночастичной модели, а затем в гл. 7 с учетом коллективных эффектов. В гл. 8 мы обсуждаем проблему рассеяния поперечных электромагнитных волн на флуктуирующих зарядах плазмы. Эта проблема пользуется большим вниманием со стороны экспериментаторов, главным образом, из-за возможности применения мощных лазеров.

До сих пор мы предполагали, что радиационные процессы связаны с устойчивой, практически стационарной во времени плазмой, и даже если распределение скоростей заряженных частиц совершенно не максвелловское, оно носит такой характер, при котором мы приходим к устойчивости для каждого рассматриваемого процесса. В гл. 9 дан беглый и неполный обзор неустойчивостей, обусловленных локальными отклонениями от максвелловского распределения.

Хотя экспериментальные результаты приводятся всякий раз, когда они имеют прямое отношение к данному разделу теории, в основном тексте обычно не содержатся детали экспериментальных методик. Я попытался возместить это в гл. 10, специально посвященной экспериментальным методикам.

Часть этой книги посвящена радиационным процессам, обусловленным коллективными или многочастичными взаимодействиями в плазме. Существует сравнительно простой способ трактовки этих проблем, известный

как метод «одетых пробных частиц». Затем имеется развитый в последние годы довольно «мудреный» формальный метод разложения кинетических уравнений в цепочку уравнений по степеням так называемого «плазменного параметра». Я использовал более простой метод, не пытаясь оправдать его применимость в каждой заданной ситуации. Второй, формальный метод требует пространного рассмотрения наиболее современной кинетической теории, для чего мне не хватает ни места, ни знаний. Основы этой теории рассмотрены в книге Монтгомери и Тидмана «Кинетическая теория плазмы»<sup>1)</sup>).

Литература, к которой я обращался, изобилует различной терминологией и обозначениями. Я пытался все время придерживаться единообразной системы. Список части обозначений приведен на стр. 13, а также в таблице постоянных на стр. 14. Все *уравнения* записаны в рационализованной системе единиц МКС, за исключением тех случаев, где я указываю, что используются другие единицы. В системе МКС часто нелегко получить ощущение порядков величин, и при обсуждениях применений и экспериментов я использовал смешанный набор единиц — сантиметры, джоули, электронвольты, ватты и гауссы. Далее, не имеется стандартной терминологии для двух больших классов волн, которые могут существовать в плазме. В то время как волны одного класса обычно называют электромагнитными, волны другого класса имеют целый ряд названий: волны пространственного заряда, плазменные, продольные, электростатические и электроакустические. Я называю первые *поперечными электромагнитными* волнами — термин, позволяющий отразить тот факт, что электрические и магнитные поля в большой степени или целиком перпендикулярны направлению распространения волн. Волны второго класса я называю *продольными* волнами — термин, указывающий на то, что электрическое поле совпадает в основном с направлением распространения волны.

В конце книги приведен обширный список цитируемой литературы (в тексте ссылки на него даются в квадратных скобках). Иногда год вводит в заблуждение относительно времени первичной публикации работы — он может относиться к более доступному последнему изданию. Большинство работ (не все!), приведенных в конце книги, упоминаются в тексте. Те, которые

---

<sup>1)</sup> D. C. Montgomery, D. A. Tidman, Plasma Kinetic Theory, McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.

не упоминаются, тем не менее тесно связаны с предметом обсуждения; они выделены в список дополнительной литературы и могут служить для читателя дополнительным библиографическим материалом.

Я извлек большую пользу из многочисленных обсуждений с Питером Ауэром и Томасом Дюпре, которым я благодарен за помощь. Я очень благодарен также Сэнборну Брауну, который взял на себя нелегкий труд прочитать рукопись и сделал много полезных замечаний. Я благодарен Венеции Калоянидес, которая с энтузиазмом перепечатывала рукопись несколько раз после исправлений, и Мэри М. Боско, которая печатала часть окончательной рукописи.

*Дж. Бекефи*

Кэмбридж,  
Массачусетс,  
Июль 1966 г.

## Обозначения

- $B(\omega, T)$  — интенсивность излучения черного тела.  
 $e$  — заряд электрона (считается положительным за исключением тех случаев, когда это может привести к недоумению).  
 $f(\mathbf{v})$  — функция распределения частиц по скоростям.  
 $\mathbf{F}$  — поток излучения.  
 $I_\omega$  — интенсивность излучения.  
 $j = \sqrt{-1}$ .  
 $j_\omega$  — коэффициент испускания излучаемой энергии.  
 $\mathbf{k}$  — волновой вектор плоской волны.  
 $K$  — диэлектрический коэффициент среды.  
 $m, M$  — масса электрона и масса иона (или атома) соответственно.  
 $n$  — показатель преломления среды ( $= kc/\omega$ ).  
 $N, N_i, N_a$  — плотность электронов, ионов и атомов соответственно.  
 $\mathbf{p}$  — импульс частицы.  
 $T, T^+$  — температура (в °К) электронов и ионов соответственно.  
 $u, U$  — плотность энергии излучения.  
 $Ze$  — заряд иона.  
 $\alpha_\omega$  — коэффициент поглощения излучения на частоте  $\omega$ .  
 $\delta$  — дельта-функция Дирака.  
 $\epsilon$  — релятивистская энергия частицы (кинетическая энергия + энергия покоя).  
 $\eta_\omega$  — дифференциальная испускательная способность одной заряженной частицы.  
 $\nu$  — частота столкновений между частицами.  
 $\omega$  — частота (в рад/сек).

Все фурье-компоненты переменных во времени величин считаются изменяющимися по закону  $\exp(j\omega t)$ .

## Некоторые постоянные

Скорость света в вакууме	$c$	$2,998 \times 10^8$ м/сек
Заряд электрона	$e$	$1,602 \times 10^{-19}$ кулон
Масса электрона	$m$	$9,107 \times 10^{-31}$ кг
Отношение заряда к массе	$e/m$	$1,759 \times 10^{11}$ кулон/кг
Масса атома водорода Н	$M_H$	$1,673 \times 10^{-27}$ кг
Постоянная Планка	$h$	$6,626 \times 10^{-34}$ дж/сек
Постоянная Больцмана	$k$	$1,381 \times 10^{-23}$ дж/°К
Постоянная Стефана — Больцмана	$\sigma$	$5,670 \times 10^{-8}$ дж/(м <sup>2</sup> · сек · °К <sup>4</sup> )
Классический радиус электрона	$r_0$	$2,818 \times 10^{-15}$ м
Диэлектрическая проницаемость вакуума	$\epsilon_0$	$8,854 \times 10^{-12}$ ф/м
Магнитная проницаемость вакуума	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$ гн/м
Энергия, соответствующая 1 эв		$1,602 \times 10^{-19}$ дж
Температура, соответствующая 1 эв		$11\ 605^\circ$ К
Скорость электрона с энергией 1 эв		$5,93 \times 10^5$ м/сек
Скорость атома Н с энергией 1 эв		$1,38 \times 10^4$ м/сек
Длина волны фотона с энергией 1 эв		$1,240 \times 10^{-6}$ м
Частота фотона с энергией 1 эв	$\omega/2\pi$	$2,418 \times 10^{14}$ гц
Число Авогадро		$6,023 \times 10^{23}$ молекул/моль
Плотность газа при давлении 1 торр и 0°С		$3,53 \times 10^{22}$ молекул/м <sup>3</sup>
Электронная плазменная частота	$\omega_p/2\pi$	$8,979 \times 10^3 N^{1/2}$ гц
Электронная циклотронная частота	$\omega_b/2\pi$	$2,799 \times 10^6 \times B_0$ (в гс) гц
Дебаевский радиус*	$L_D$	$7,43 \times 10^3 (T/N)^{1/2}$ м
Число частиц в дебаевской сфере*	$N_D$	$1,72 \times 10^{12} T^{3/2}/N^{1/2}$

\*  $T$  в эв.

## Перенос излучения

В этой главе даются определения различных величин, с помощью которых можно описать распространение волн в анизотропной плазме. Рассматриваются различные типы колебаний среды и поток лучистой энергии. Феноменологически вводятся в рассмотрение процессы испускания и поглощения и исследуется их влияние на поток излучения.

### § 1. Уравнения поля и частиц

Основными величинами, определяющими свойства электромагнитного поля, являются векторы электрического и магнитного полей:  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . В общем случае оба эти вектора зависят от радиус-вектора  $\mathbf{r}$  и времени  $t$ . Источниками электромагнитного поля являются плотность тока проводимости  $\mathbf{J}$  и плотность объемного заряда  $\rho$ . С помощью этих двух величин плазма вводится в уравнения Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.4)$$

где  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  — диэлектрическая проницаемость и магнитная проницаемость вакуума соответственно. Эти уравнения записаны в рационализованной системе единиц МКС (*м, кг, сек*), которая в дальнейшем используется на протяжении всей книги<sup>1)</sup>.

В этих уравнениях неявно содержится дополнительное утверждение о непрерывности тока и заряда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.5)$$

<sup>1)</sup> Так, например, во всех последующих формулах концентрация определяется как число частиц в  $1 \text{ м}^3$ . Однако в числовых примерах используется более привычная единица: число частиц в  $1 \text{ см}^3$ .

Рассматриваемая плазма состоит из заряженных частиц разных сортов. Частицы каждого сорта имеют заряд  $q_i$  и массу  $m_i$ . Всякий раз, когда необходимо выявить характерные черты частично ионизованной плазмы, в рассмотрение вводятся и нейтральные частицы. Из множества взаимодействий, возможных в такой системе, состоящей из электронов, ионов и атомов, мы выберем только те, которые связаны с так называемыми свободно-свободными переходами. Явления испускания и поглощения, в которых участвуют связанные состояния компонент плазмы, рассматриваться не будут.

Электромагнитные свойства плазмы определяются источниками  $\mathbf{J}$  и  $\rho$ , входящими в уравнения (1.2) и (1.3); в свою очередь, эти источники определяются микроскопическими движениями частиц под действием внутренних и внешних сил. «Отклик» частиц на действующие силы описывается системой кинетических уравнений (так называемых уравнений Больцмана), которые имеют следующий общий вид:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_i}{m_i} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)_{\text{столкн}}; \quad (1.6)$$

они характеризуют поведение во времени функции распределения  $f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  частиц сорта  $i$ . Функция распределения частиц данного сорта определяется таким образом, что в момент времени  $t$  величина

$$f_i dv_x dv_y dv_z dx dy dz \equiv f_i d^3v d^3r \quad (1.7)$$

является взвешенной вероятностью нахождения частиц сорта  $i$  в интервале скоростей между  $v_x$  и  $v_x + dv_x$ ,  $v_y$  и  $v_y + dv_y$ ,  $v_z$  и  $v_z + dv_z$  в элементе объема между  $x$  и  $x + dx$ ,  $y$  и  $y + dy$ ,  $z$  и  $z + dz$ . Условие нормировки таково:

$$N_i = \int f_i d^3v, \quad (1.8)$$

где  $N_i$  — локальная плотность частиц в момент времени  $t$ . Иногда та же буква  $f$  используется для описания вероятности нахождения числа частиц в том же объеме фазового пространства, но с условием нормировки:

$$\int f_i d^3v = 1.$$

Для источников  $\mathbf{J}$  и  $\rho$  имеем

$$\mathbf{J} = \sum_i q_i \int \mathbf{v} f_i d^3v, \quad (1.9)$$

$$\rho = \sum_i q_i \int f_i d^3v. \quad (1.10)$$



Совместное решение системы уравнений (1.1)—(1.4) и уравнений (1.6), (1.9) и (1.10) приводит к самосогласованному описанию электромагнитного поля. Разбиение членов уравнения (1.6) на «столкновительный» член, стоящий в правой части, и «ускорительный» член, стоящий в левой части, является до некоторой степени произвольным и остается неопределенным до тех пор, пока не указан конкретный механизм столкновений. По традиции коллективные эффекты, обусловленные многочастичными взаимодействиями посредством дальнедействующей части кулоновских сил, описываются членом в левой части уравнения, тогда как парные столкновения, обусловленные взаимодействиями посредством короткодействующей части кулоновских сил, — членом в правой части.

Следует отметить, что при написании (1.6) было сделано предположение: внешние силы целиком электромагнитного происхождения и частицы являются нерелятивистскими. Обобщение на другие силы (например, силу тяжести) не представляет для нас интереса, однако в дальнейшем нам иногда придется рассматривать релятивистские частицы. В этом случае уравнение (1.6), выраженное через импульсы частиц  $\mathbf{p}$ , имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{c^2}{\varepsilon} \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + q \left( \mathbf{E} + \frac{c^2}{\varepsilon} \mathbf{p} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{столкн}}. \quad (1.11)$$

Здесь индекс  $i$  опущен,  $\varepsilon$  — полная релятивистская энергия частицы данного сорта:

$$\varepsilon^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2, \quad (1.12)$$

где  $m_0$  — масса покоя, и  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  нормируется следующим образом:

$$N = \int f d^3 p. \quad (1.13)$$

**Проводимость и диэлектрический коэффициент.** Мы рассматриваем в основном электромагнитные колебания, которые предполагаются достаточно слабыми, так как они вызывают лишь незначительные возмущения состояния плазмы. Для нахождения  $f_i$  мы вначале линеаризуем уравнение (1.6) или (1.11), а именно пренебрегаем всеми членами, кроме невозмущенного (статического) и членов первого порядка (переменных во времени). В этом линейном приближении высокочастотный ток проводимости  $\mathbf{J}$  и электрическое поле  $\mathbf{E}$  связаны линейным соотношением, в которое в качестве коэффициента пропорциональности входит функция, которая сама не зависит от поля излучения. Это соотношение удобнее всего представить в «пространстве» частот; применив к (1.6) временное разложение Фурье и использовав (1.9), получим уравнение

$$\mathbf{J}(\omega) = \sigma \cdot \mathbf{E}(\omega), \quad (1.14)$$

где  $\omega$  — круговая частота. Это уравнение является одной из форм закона Ома. Феноменологическая величина  $\sigma$  имеет смысл проводимости и ее тензорный характер является следствием анизотропии плазмы, обусловленной наличием внешнего (статического) магнитного поля.

В общем случае проводимость  $\sigma$  — комплексная величина. Поскольку она оказывается почти чисто мнимой величиной, то часто удобнее пользоваться эквивалентным ей диэлектрическим коэффициентом, который определяется формулой

$$\mathbf{K} = \mathbf{1} + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0}, \quad (1.15)$$

где  $\mathbf{1}$  — единичная матрица.

Величины  $\sigma$  и  $\mathbf{K}$  являются однозначными функциями от  $f_i$ ; они определяют «отклик» плазмы на электромагнитное поле и таким образом описывают физику явления. В сочетании с уравнениями Максвелла эти величины можно весьма удобно использовать для изучения характеристик распространения волн в плазменной среде.

## § 2. Дисперсионные соотношения для электромагнитных полей в плазме

Произведем фурье-анализ уравнений Максвелла. Введем в систему уравнений (1.1) — (1.4) временные преобразования Фурье, определяемые соотношениями

$$\mathbf{E}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.16)$$

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Используя уравнения (1.5), (1.14) и (1.15), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu_0 \mathbf{H}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\epsilon_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}, \\ \nabla \cdot (\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}) &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где для простоты написано  $\mathbf{E}$  вместо  $\mathbf{E}(\omega)$ ,  $\mathbf{H}$  вместо  $\mathbf{H}(\omega)$  и т. д. Исключив  $\mathbf{H}$  из первых двух уравнений (1.17), получим волновое уравнение

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (1.18)$$

Во многих случаях, представляющих практический интерес, поле излучения в данном малом объеме плазмы можно рассматривать как суперпозицию плоских волн вида  $\exp(j\omega t - j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ , где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор, соответствующий данной точке среды. Подставляя это выражение в (1.17), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mu_0 \mathbf{H}, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} &= -\omega \varepsilon_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

а подставляя в (1.18), имеем

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (1.20)$$

Уравнение (1.20) представляет собой систему линейных однородных уравнений для трех ортогональных компонент поля:  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ . Эта система уравнений имеет нетривиальные решения в том случае, когда детерминант, составленный из коэффициентов при  $\mathbf{E}$ , равен нулю. Решение этого детерминантного уравнения обычно называют дисперсионным соотношением. Оно часто распадается на произведение двух или более дисперсионных соотношений, каждое из которых можно символически записать в виде

$$g(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0. \quad (1.21)$$

Каждое дисперсионное соотношение такого вида описывает характеристическую «моду» колебаний (тип волны), которая может существовать в плазменной среде.

В качестве иллюстрации рассмотрим плазму в отсутствие внешнего магнитного поля; в этом случае диэлектрический коэффициент  $\mathbf{K}$  сводится к скалярной величине. Дополнительно предположим, что носители зарядов в среднем неподвижны (так называемое приближение холодной плазмы), но могут колебаться около фиксированных положений под действием приложенного извне электромагнитного поля. Тогда для носителей заряда только одного знака (например, электронов) имеем

$$K = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (1.22)$$

где

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$$

— электронная плазменная частота. В этом случае имеются два возможных решения дисперсионного уравнения — соответствующее

поперечным электромагнитным волнам

$$\begin{aligned} k^2 c^2 &= \omega^2 K, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= 0, \end{aligned} \quad (1.23)$$

и соответствующее продольным колебаниям плазмы на частоте  $\omega_p$ :

$$\begin{aligned} K &= 0, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Этот результат был получен Тонксом и Ленгмюром [1].

Решения (1.23) и (1.24) показывают, что дисперсионное уравнение характеризует различные моды колебаний и распространения волн. В этой связи первостепенную важность имеет вид  $K$ .

Анизотропия  $\mathbf{K}$  проявляется при наличии однородного статического магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ , которое обуславливает появление новой характерной частоты для каждого сорта заряженных частиц, а именно

$$\omega_b = \frac{q_i B_0}{m_i}.$$

В этом случае для подвижных частиц одного сорта (электронов) вместо (1.22) имеем

$$\begin{aligned} K_{zz} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \\ K_{xx} \pm jK_{xy} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \mp \omega_b)}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

а также соотношения

$$K_{xx} = K_{yy}, \quad K_{xy} = -K_{yx}; \quad (1.26)$$

здесь поле  $\mathbf{B}_0$  направлено вдоль оси  $z$  прямоугольной системы координат (фиг. 1).

Если предположить, что вектор  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $xz$ , как показано на фиг. 1, и подставить (1.25) и (1.26) в (1.20), то детерминантное уравнение сведется к биквадратному уравнению вида

$$Ak^4 + Bk^2 + C = 0, \quad (1.27)$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  являются комбинациями  $K_{ij}$ , зависящими от  $\omega$  и  $\theta$ , но не зависящими от  $k$ . В этом случае в плазме в каждом направлении могут распространяться две различные волны. Детальное исследование этих волн можно найти в книгах [2—4].

Здесь в отличие от случая изотропной плазмы анизотропия, связанная с  $\mathbf{B}_0$ , препятствует простому расщеплению дисперсионного уравнения на уравнения для поперечных и для продольных мод,

за исключением некоторых выделенных углов распространения  $\theta$  и частот  $\omega$ . Тем не менее во многих приложениях приближение

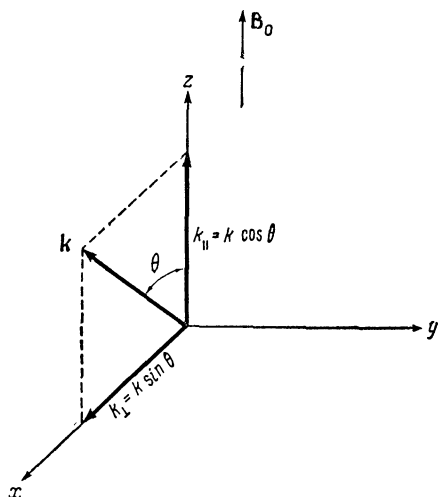
$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} \approx 0$$

для практически продольных волн и приближение

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \approx 0$$

для практически поперечных волн позволяют с хорошей точностью разграничить эти два типа волн.

Фиг. 1. Ориентация волнового вектора  $\mathbf{k}$  относительно статического магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  в прямоугольной системе координат.



В первом случае, когда вектор  $\mathbf{E}$  практически параллелен вектору  $\mathbf{k}$ , детерминантное уравнение сводится к скалярному соотношению

$$K_L = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{k}}{k^2} = 0, \quad (1.28)$$

где  $K_L$  введено просто для удобства обозначения скалярной величины. Последнюю можно рассматривать как эффективный продольный диэлектрический коэффициент. Соотношение (1.28) является дисперсионным соотношением для продольных волн при наличии постоянного магнитного поля [в отсутствие поля оно сводится к (1.24)]. С помощью (1.20) легко показать, что дисперсионное соотношение (1.28) является хорошим приближением к полному дисперсионному уравнению при условии, если

$$k^2 \gg \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 |K_{ij}|; \quad (1.29)$$

это условие означает, что колебание практически будет чисто продольным, пока его фазовая скорость  $\omega/k$  мала по сравнению со скоростью света  $c$ .

Неравенство (1.29) является только достаточным критерием справедливости электростатического приближения; необходимый критерий неизвестен. Тем не менее неравенство (1.29) характеризует величину отношения перпендикулярной и параллельной новому вектору  $\mathbf{k}$  компонент электрического поля, а именно:

$$\left| \frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} \right| \approx \left| \frac{\omega^2 K_{ij}}{k^2 c^2} \right|.$$

**«Теплая плазма».** В примерах, которые мы рассматривали до сих пор, заряженные частицы плазмы не имели начальных скоростей и приходили в движение только при наличии приложенного извне электромагнитного поля. В следующих главах существенную роль будут играть внутренняя энергия плазмы и распределение частиц по скоростям. Действительно, внутренняя энергия плазмы является источником волн, испускаемых плазмой.

Смещения частиц, возникающие из-за наличия у них начальных скоростей, приводят к тому, что в решении кинетического уравнения (1.6) и, следовательно, в выражении для  $\mathbf{K}$  появляется волновой вектор  $\mathbf{k}$ . Появление волнового вектора в выражении для  $\mathbf{K}$  связано с тем, что начальные движения частиц вызывают нелокальные эффекты, т. е. ток проводимости  $\mathbf{J}$  в точке  $\mathbf{r}$  зависит не только от электрического поля в точке  $\mathbf{r}$ , но также и от значений  $\mathbf{E}$  во всех других точках  $\mathbf{r}'$ . Этот эффект можно выразить математически, написав вместо (1.14) соотношение

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \int \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', \omega) d^3 r', \quad (1.30)$$

которое является наиболее общим линейным соотношением между  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{E}$  (см. [5]). Интегрирование в (1.30) производится по всему пространству.

Введем в (1.30) пространственные преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{k}) &= \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 r, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{E}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 k; \end{aligned} \quad (1.31)$$

используя аналогичные преобразования и для  $\mathbf{J}$ , получаем

$$\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega), \quad (1.32)$$

где

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) = \int \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\tau}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\tau}} d^3 \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'. \quad (1.33)$$

Когда диэлектрический коэффициент  $\mathbf{K}$  (или  $\boldsymbol{\sigma}$ ) зависит как от  $\omega$ , так и от  $\mathbf{k}$ , говорят, что плазма обладает как временной, так и

пространственной дисперсией. Название «теплая плазма» обычно означает то же, что и термин «пространственная дисперсия». Следствия пространственной дисперсии вкратце таковы. В отсутствие постоянного магнитного поля диэлектрический коэффициент для поперечных электромагнитных волн (обозначаемый  $K_T$ ) фактически такой же, как (1.22), а именно:

$$K_T \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (1.34)$$

при условии, что частицы нерелятивистские. Однако для продольных плазменных колебаний имеем

$$K_L \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{3k^2 v_0^2}{\omega^2} \right], \quad \frac{kv_0}{\omega} \ll 1, \quad (1.35)$$

где

$$v_0 = \sqrt{\frac{kT}{m}}$$

— среднеквадратичная продольная тепловая скорость,  $T$  — электронная температура. Из дисперсионного соотношения  $K_L = 0$  теперь следует, что колебания распространяются с определенной фазовой скоростью  $\omega/k$ , в то время как в холодной плазме колебания являются практически стационарными. Соотношение (1.35), полученное Бомом и Гроссом [6], является уточненной формулой Ленгмюра — Тонкса.

При наличии постоянного магнитного поля, особенно в тех случаях, когда имеется более одного сорта подвижных заряженных частиц, детальную структуру типов колебаний среды уже нельзя описать сколько-нибудь просто. Детерминантное уравнение, получаемое из (1.20), можно по-прежнему записать в виде (1.27), но оно уже не является биквадратным относительно  $k$ , поскольку в этом случае коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  зависят не только от  $\omega$  и  $\theta$ , но и от  $k$ . Наиболее общий вид дисперсионного уравнения теперь оказывается следующим:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 K_{xx} - k^2 \cos^2 \theta & \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 K_{xy} & \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 K_{xz} + k^2 \sin \theta \cos \theta \\ \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 K_{yx} & \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 K_{yy} - k^2 & \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 K_{yz} \\ \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 K_{zx} + k^2 \sin \theta \cos \theta & \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 K_{zy} & \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 K_{zz} - k^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = 0, \quad (1.36)$$

кроме того, мы имеем дополнительные соотношения симметрии:

$$\begin{aligned} K_{xy} &= -K_{yx}, \\ K_{yz} &= -K_{zy}, \\ K_{zx} &= K_{xz}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Эти соотношения являются частным случаем соотношений взаимности Онзагера в теории необратимых термодинамических процессов (см., например, [7, 8]).

Дисперсионное соотношение (1.28) для продольных волн, записанное через компоненты, имеет вид

$$K_{xx} \sin^2 \theta + K_{zz} \cos^2 \theta + 2K_{xz} \cos \theta \sin \theta = 0; \quad (1.38)$$

здесь были использованы соотношения (1.37).

Мы будем очень широко пользоваться дисперсионными соотношениями для плазмы. Однако детальное исследование всех мод колебаний, описываемых этими соотношениями, не является нашей целью. Мы рекомендуем читателю несколько прекрасных книг по данному вопросу, например, [2—4, 9, 10].

**Потери энергии волны.** До сих пор мы не уделяли внимания потерям энергии волны. Для среды без потерь тензор диэлектрического коэффициента эрмитов ( $K_{ij} = K_{ji}^*$ ), так что  $K_{xy}$  и  $K_{yz}$  являются чисто мнимыми, а  $K_{zx}$ ,  $K_{xx}$ ,  $K_{yy}$  и  $K_{zz}$  — действительными величинами. Фактически некоторые потери энергии всегда имеются: либо в результате столкновений между частицами плазмы, либо (при редких столкновениях) благодаря «конечной температуре» частиц.

Затухание играет большую роль в дальнейшем рассмотрении, и мы позднее вернемся к этому вопросу в § 7 настоящей главы.

### § 3. Плотность энергии и поток энергии

В этом параграфе рассматриваются плотность энергии и поток энергии волны, распространяющейся в анизотропной среде, причем особое внимание уделяется скорости потока энергии и его направлению.

Уравнение, выражающее закон сохранения энергии, получается путем сложения первого уравнения Максвелла (1.1), умноженного на  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ , со вторым уравнением Максвелла (1.2), умноженным на  $-\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mu_0 H^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.39)$$

Член  $(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$  — мгновенное значение плотности потока электромагнитной энергии (вектор Пойнтинга). Два члена в скобках — мгновенные значения плотностей магнитной и электрической энергий соответственно. Член в правой части (1.39) — результат наличия в среде тока проводимости.

Нас интересуют усредненные по времени величины, связанные с плотностью энергии и ее потоком. Поэтому обратимся к уравнениям (1.19), которые связывают амплитуды  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega)$  временного и пространственного разложения Фурье плоской вол:



ны, пространственно-временное поведение которой характеризуется множителем  $\exp(j\omega t - j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ . Предполагается, что в среде практически отсутствуют потери, однако для получения закона сохранения энергии небольшие потери вводятся в диэлектрический коэффициент  $\mathbf{K}$ . Поэтому в общем случае величины  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  становятся комплексными с малыми мнимыми частями:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_r + j\omega_i, \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}_r + j\mathbf{k}_i.\end{aligned}\quad (1.40)$$

Умножим скалярно первое уравнение (1.19) на  $\mathbf{H}^*$  (звездочка означает комплексно сопряженную величину), умножим скалярно уравнение, комплексно сопряженное второму уравнению (1.19), на  $\mathbf{E}$  и сложим найденные выражения. Обратим эту процедуру и вычислим разность двух полученных выражений:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_i \cdot \left[ \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \right] &= \\ &= \omega_i \left( \frac{1}{4} \mu_0 |\mathbf{H}|^2 \right) - j \frac{1}{8} \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot (\omega \mathbf{K} - \omega^* \mathbf{K}^*) \cdot \mathbf{E}.\end{aligned}\quad (1.41)$$

Здесь  $|\mathbf{H}|^2 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*$ , а  $\mathbf{K}^*$  означает комплексно сопряженную транспонированную матрицу. В среде с пространственной и временной дисперсией коэффициент  $\mathbf{K}$  является функцией  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ , т. е. зависит от  $\omega_r$ ,  $\omega_i$  и  $\mathbf{k}_r$ ,  $\mathbf{k}_i$ . Считая, что мнимые части  $\omega_i$  и  $k_i$  малы, разложим  $\mathbf{K}$  в ряд Тейлора и, удержав первые три члена, получим

$$\begin{aligned}\omega \mathbf{K}(\mathbf{k}_r + j\mathbf{k}_i; \omega_r + j\omega_i) &\approx \\ &\approx \dot{\omega}_r \mathbf{K}(\mathbf{k}_r, \dot{\omega}_r) + \frac{\partial \omega_r \mathbf{K}}{\partial \mathbf{k}_r} \cdot (j\mathbf{k}_i) + \frac{\partial \omega_r \mathbf{K}}{\partial \omega_r} (j\omega_i).\end{aligned}\quad (1.42)$$

Подставляя (1.42) в (1.41) и перегруппировывая члены, находим

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_i \cdot \left[ \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) - \frac{1}{4} \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \omega_r \mathbf{K}_h}{\partial \mathbf{k}_r} \cdot \mathbf{E} \right] &= \\ &= \omega_i \left( \frac{1}{4} \mu_0 |\mathbf{H}|^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \omega_r \mathbf{K}_h}{\partial \omega_r} \cdot \mathbf{E} \right) + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot (\omega_r \mathbf{K}_a) \cdot \mathbf{E}.\end{aligned}\quad (1.43)$$

Этот результат получил Берс, см. работу [3]. Здесь величина  $\mathbf{K}_h$  — часть тензора  $\mathbf{K}$ , в которой не учитываются потери (эрмитова часть):

$$\mathbf{K}_h = \frac{1}{2} (\mathbf{K} + \mathbf{K}^*), \quad (1.44)$$

а величина  $\mathbf{K}_a$  — часть тензора  $\mathbf{K}$ , в которой учитывается диссипация энергии волн (антиэрмитова часть):

$$\mathbf{K}_a = \frac{1}{2j} (\mathbf{K} - \mathbf{K}^*). \quad (1.45)$$

Уравнение (1.43) представляет собой закон сохранения энергии с точностью до членов первого порядка малости относительно величин  $\omega_i$ ,  $k_i$  и  $K_\alpha$ . Члены этого уравнения можно интерпретировать следующим образом.

Первый член в левой части

$$\mathbf{F}_{EM} = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad (1.46)$$

— усредненная по времени плотность потока электромагнитной энергии (вектор Пойнтинга). Второй член

$$\mathbf{F}_P = -\frac{1}{4} \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \omega K}{\partial \mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} \quad (1.47)$$

(где для удобства опущены индексы  $h$  у  $K_h$  и  $r$  у  $\omega_r$ ) описывает поток неэлектромагнитной энергии и интерпретируется в работах [4, 11] как обусловленный частицами, движущимися когерентно с волной. В связи с этим отметим, что в холодной плазме, когда  $K$  не зависит от  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{F}_P = 0$  и поток целиком электромагнитного происхождения. Напротив, в чисто продольной волне  $\mathbf{H} = 0$ ,  $\mathbf{F}_{EM} = 0$ , и весь поток энергии определяется выражением (1.47).

Переходя теперь к правой части уравнения (1.43), отметим, что первый член в скобках

$$U_M = \frac{1}{4} \mu_0 |\mathbf{H}|^2 \quad (1.48)$$

— усредненная по времени плотность магнитной энергии. Второй член в скобках

$$U_{E+P} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial \omega K}{\partial \omega} \cdot \mathbf{E} \quad (1.49)$$

представляет собой сумму плотностей электрической энергии и той части кинетической энергии заряженных частиц, которая связана с их когерентным движением с волной. Это выражение рассматривалось в работе [12] и более детально в работах [3—5, 10]. Если среда не обладает временной дисперсией, то выражение (1.49) принимает более привычный вид

$$U_{E+P} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}.$$

Используя это последнее выражение для диспергирующей среды типа плазмы, можно прийти к бессмысленным результатам, например, к отрицательному значению  $U$  для системы, находящейся в тепловом равновесии. Такого рода случай имеет место при  $\omega < \omega_p$  для колебаний, описываемых диэлектрическим коэффициентом

$$K_T = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

С другой стороны, используя (1.49), мы приходим к величине

$$U_{E+P} = \frac{1}{4} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right),$$

положительно-определенной при всех частотах.

Полную плотность энергии поперечной электромагнитной волны, распространяющейся в изотропной среде, можно записать в виде

$$U_M + U_{E+P} = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 n \left( \frac{c}{\omega} \right),$$

где  $n$  — показатель преломления, определяемый как  $n = kc/\omega$ , а  $\omega = d\omega/dk$  — групповая скорость. Этот результат был получен с помощью дисперсионного соотношения (1.23). Отметим, что в частном случае, когда

$$K_T \equiv n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

то

$$U_M + U_{E+P} = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2;$$

таким образом, плотность энергии одинакова при всех частотах.

Для продольной волны, диэлектрический коэффициент которой  $K_L$  определяется выражением (1.35), имеем

$$U_{E+P} \approx \frac{1}{4} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \left[ 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{9k^2 v_0^2}{\omega^2} \right) \right];$$

здесь принято во внимание ограничение, налагаемое дисперсионным соотношением  $K_L = 0$ . Так как

$$\frac{kv_0}{\omega} \ll 1 \quad \text{и} \quad \omega \approx \omega_p,$$

то

$$U_{E+P} \approx \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2.$$

**Скорость распространения энергии.** Скорость распространения энергии волны определяется следующим образом:

$$\mathbf{v}_U = \frac{\text{Усредненный по времени поток}}{\text{Усредненная по времени плотность энергии}}. \quad (1.50)$$

Рассмотрим в качестве примера диэлектрический коэффициент (1.35) продольной волны в изотропной плазме. Подставив его в (1.47) и (1.49) и используя (1.50), найдем

$$\mathbf{v}_U \approx \frac{3kv_0^2}{\omega_p}, \quad (1.51)$$

что точно равно групповой скорости волны  $\omega = d\omega/dk$ . Теперь можно показать, и это весьма интересно, что равенство  $v_U$  и  $w$  не является исключительным свойством этой волны, а справедливо также для электромагнитных волн и для анизотропной среды в общем случае<sup>1)</sup>.

Еще раз вернемся к уравнениям (1.19) и умножим скалярно первое на  $\mathbf{H}^*$ , а второе на  $\mathbf{E}^*$ . Допустим затем, что в получившихся уравнениях имеют место малые изменения  $\delta\mathbf{k}$ ,  $\delta\omega$ ,  $\delta\mathbf{E}$  и других величин. Пренебрегая всеми произведениями малых величин и используя равенство  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^*$ , соответствующее среде в отсутствие потерь, находим

$$\delta\mathbf{k} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = (\delta\omega) \mu_0 (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) + \varepsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot [\delta(\omega\mathbf{K})] \cdot \mathbf{E}. \quad (1.52)$$

Но

$$\delta(\omega\mathbf{K}) = \frac{\partial\omega\mathbf{K}}{\partial\omega} \delta\omega + \frac{\partial\omega\mathbf{K}}{\partial\mathbf{k}} \delta\mathbf{k}. \quad (1.53)$$

Подставив (1.53) в (1.52) и перегруппировав члены, получим

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{F}_{EM} + \mathbf{F}_P}{U_M + U_{E+P}}, \quad (1.54)$$

где величина в правой части является, как видно из сравнения с (1.50), вектором скорости распространения энергии  $v_U$ . Отдельные слагаемые числителя и знаменателя этой величины определяются выражениями (1.46) — (1.49). Член в левой части представляет собой вектор групповой скорости  $w$ :

$$\mathbf{w} = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}_x \frac{\partial\omega}{\partial k_x} + \hat{\mathbf{i}}_y \frac{\partial\omega}{\partial k_y} + \hat{\mathbf{i}}_z \frac{\partial\omega}{\partial k_z}. \quad (1.55)$$

Следовательно,

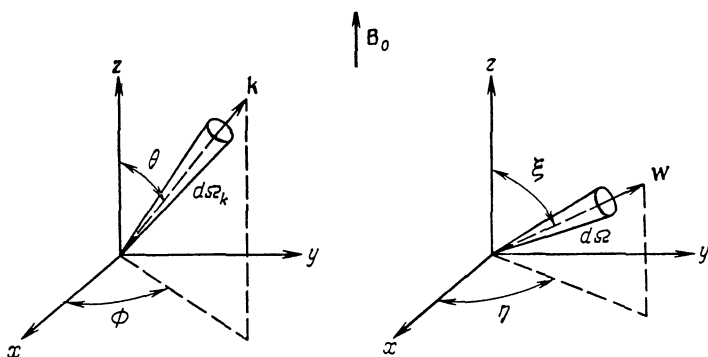
$$\mathbf{v}_U = \mathbf{w},$$

и мы замечаем также, что вектор групповой скорости совпадает с направлением полного потока (равного сумме потоков волн и частиц). Эти результаты были получены в нескольких работах, а именно [3, 14—17].

**Направление и величина  $w$  в зависимости от  $k$ .** Хотя характеристики  $v_U$  и  $w$  определяются правой частью уравнения (1.54), часто желательнее и проще получать эти величины из дисперсионного соотношения для волны. Ясно, что если найдена зависимость  $k$  от частоты и координат, то  $w$  определяется уравнением (1.55).

Пусть волновой вектор  $\mathbf{k}$  волны с частотой  $\omega$  направлен, как показано на фиг. 2. Волна имеет небольшой разброс частот  $d\omega$  и

<sup>1)</sup> Оно справедливо в предположении, что поглощение мало и коэффициент  $K$  не очень сильно зависит от частоты (см. работу [13]).



Фиг. 2. Ориентация волнового вектора  $\mathbf{k}$  и вектора групповой скорости  $\mathbf{w}$  относительно магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  в прямоугольной системе координат.

Телесные углы  $d\Omega$  и  $d\Omega_k$  используются в дальнейших расчетах.

волновых векторов  $d\mathbf{k}$ . Если выразить  $\mathbf{k}$  в сферических координатах  $(k, \theta, \phi)$ , то дисперсионное соотношение (1.21) можно записать в виде

$$\omega = \omega(k, \theta, \phi),$$

или

$$k = k(\omega, \theta, \phi). \quad (1.56)$$

Вектор групповой скорости  $\mathbf{w}$ , связанный с волной, имеет величину  $\omega$ , а его направление определяется углами  $\xi$  и  $\eta$ . Из (1.55) следует, что  $k$ -,  $\theta$ - и  $\phi$ -компонентами вектора  $\mathbf{w}$  являются

$$\omega_k = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad \omega_\theta = \frac{1}{k} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}, \quad \omega_\phi = \frac{1}{k \sin \theta} \frac{\partial \omega}{\partial \phi}. \quad (1.57)$$

Используя тогда (1.56), находим

$$\begin{aligned} \omega_k &= \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)^{-1}, & \omega_\theta &= -\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial \theta} \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)^{-1}, \\ \omega_\phi &= -\frac{1}{k \sin \theta} \frac{\partial k}{\partial \phi} \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

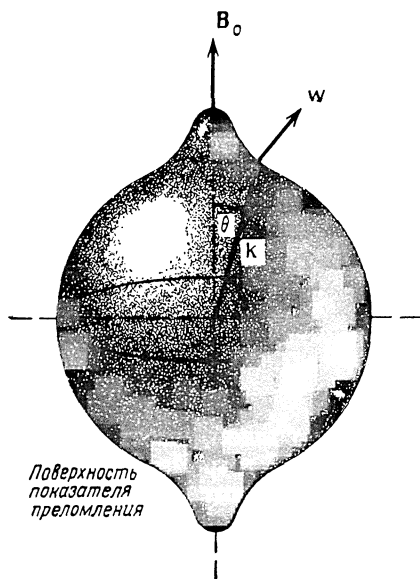
Эти формулы существенно упрощаются, если среда обладает осью симметрии. В плазме эта ось симметрии параллельна направлению статического магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ . Если выбрать направление  $\mathbf{B}_0$  вдоль оси  $z$  декартовой системы координат, то  $\partial k / \partial \phi = 0$  и  $\omega_\phi = 0$ . Тогда компоненты  $\omega_k$  и  $\omega_\theta$  просто связаны с  $\omega$ :

$$\begin{aligned} \omega_k &= \omega \cos(\theta - \xi), \\ \omega_\theta &= -\omega \sin(\theta - \xi). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Величина  $(\theta - \xi)$  — угол между направлениями волнового вектора и вектора групповой скорости. Его можно определить, подставляя (1.58) в (1.59), а именно:

$$\operatorname{tg}(\theta - \xi) = \frac{1}{k} \left( \frac{\partial k}{\partial \theta} \right)_{\omega}. \quad (1.60)$$

Индекс  $\omega$  означает, что при дифференцировании величина  $\omega$  считается постоянной. В изотропной среде  $(\partial k / \partial \theta) = 0$ , и поток энергии направлен по волновому вектору.



Фиг. 3. Схематическое изображение поверхности показателя преломления.

Вектор групповой скорости везде нормален к этой поверхности. Поверхность построена для частного случая более медленной из двух электромагнитных волн, распространяющихся в холодной плазме при  $\omega_b / \omega \approx 2$ ,  $\omega_p^2 / \omega^2 \approx 0,9$ .

Уравнение (1.60) имеет простую геометрическую интерпретацию: построим полярную диаграмму  $k$  в зависимости от  $\theta$  (и  $\phi$ ) и получим таким образом поверхность. С помощью (1.60) легко показать, что вектор  $w$  перпендикулярен этой поверхности (фиг. 3). Такая полярная диаграмма вектора  $sk/\omega$  при фиксированном значении  $\omega$  известна как *поверхность показателя преломления*, *обратная волновая поверхность* или *поверхность медленности* и является одним из нескольких геометрических представлений поведения волны в анизотропных материалах. Более подробное использование таких диаграмм для волн в плазме можно найти в работах [3, 18].

Абсолютная величина  $w$  равна корню квадратному из суммы квадратов членов выражения (1.58), а именно:

$$w = \left| \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_{\theta}^{-1} \left[ 1 + \left( \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial \theta} \right)_{\omega}^2 \right]^{1/2} \right|. \quad (1.61)$$

Расчеты величины  $\omega$  для холодной плазмы применительно к ионосферным исследованиям проведены в работах [19—21].

В дальнейшем нам понадобится соотношение между элементарным телесным углом  $d\Omega_k = \sin \theta d\theta d\phi$  вокруг направления  $\mathbf{k}$  и соответствующим телесным углом  $d\Omega = \sin \xi d\xi d\eta$  вокруг направления  $\mathbf{w}$  (см. фиг. 2):

$$d\Omega = - \frac{d\Omega_k}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{k \cos \theta + (\partial k / \partial \theta)_\omega \sin \theta}{[k^2 + (\partial k / \partial \theta)_\omega^2]^{1/2}} \right\}. \quad (1.62)$$

#### § 4. Некоторые величины, связанные с хаотически флуктуирующими полями

В этой книге в основном рассматриваются различные процессы испускания в плазме. Излучение, наблюдаемое в некоторой точке  $O$ , создается многими элементарными источниками, которые излучают более или менее хаотически. Поэтому амплитуда и фаза электрического и магнитного полей в точке  $O$  испытывают нерегулярные флуктуации, скорость которых существенно зависит от эффективной ширины спектра  $\Delta\omega$ . Эти «шумовые» сигналы имеют поэтому статистическое происхождение, и нас обычно интересуют не точные детали, например, полей  $\mathbf{E}(t)$  и  $\mathbf{H}(t)$ , а скорее статистические средние определенных подходящих величин. Такими величинами являются плотность энергии и поток энергии, которые суть квадратичные функционалы, включающие произведения  $\mathbf{E}$  на  $\mathbf{E}$  (и  $\mathbf{H}$  на  $\mathbf{H}$ ) или произведения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Пусть для удобства  $V(t)$  означает одну из вышеуказанных полевых переменных; предположим, что возмущение существует в течение интервала времени  $-T/2 \leq t \leq T/2$ . Этот интервал велик по сравнению с характерным интервалом времени микроскопических флуктуаций возмущения  $V(t)$ , и эту ситуацию можно идеализировать, положив  $T \rightarrow \infty$ . Математически такая идеализация желательна по причинам, связанным с временной стационарностью шумов, обсуждаемых ниже. Физически интересной величиной является усредненное по времени значение  $|V(t)|^2$ , которое должно стремиться к конечному пределу при неограниченном увеличении интервала усреднения, т. е.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |V(t)|^2 dt \quad (1.63)$$

должен быть конечным. Однако если этот предел конечен, сам интеграл должен расходиться, что нарушает условие существования преобразования Фурье (1.16).

Эта трудность устраняется за счет введения обрезанной функции

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(t, T) &= V(t) \quad \text{для} \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ &= 0 \quad \text{для} \quad |t| > \frac{T}{2}, \end{aligned} \quad (1.64)$$

где  $T$  является большим, но конечным интервалом времени. По мере того, как интервал  $T$  становится все больше и больше, значение обрезанной функции стремится подойти все ближе и ближе к значению истинной функции.

Обозначим фурье-образ обрезанной функции  $\mathcal{V}(t, T)$  через  $\mathcal{V}(\omega, T)$ ; тогда функции  $\mathcal{V}(t, T)$  и  $\mathcal{V}(\omega, T)$  будут связаны двумя соотношениями (1.16). Теперь необходимо усреднить по времени  $V^2(t)$  или, если  $V(t)$  является вектором, необходимо усреднить по времени произведения компонент  $\mathbf{V}(t)$  на  $\mathbf{V}(t)$ . В более общем случае нам необходимо иметь произведение  $V(t)$  на другую функцию  $W(t)$ , причем предполагается, что функция  $W(t)$  связана с обрезанной функцией  $\mathcal{V}(t, T)$ , свойства которой определяются точно так же, как свойства функции  $\mathcal{V}(t, T)$  в (1.64). Рассмотрим этот более общий случай и запишем для усредненного по времени произведения  $V(t)W^*(t)$ :

$$\langle V(t)W^*(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{V}(t, T) \mathcal{W}^*(t, T) dt. \quad (1.65)$$

Применив преобразование Фурье к двум функциям подынтегрального выражения (1.65) и используя равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(jax) dx = 2\pi\delta(a),$$

где  $\delta$  — дельта-функция, получим

$$\langle V(t)W^*(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{V}(\omega, T) \mathcal{W}^*(\omega, T)}{2\pi} d\omega. \quad (1.66)$$

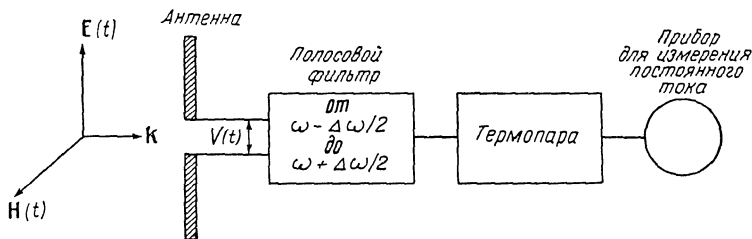
Величина

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{V}(\omega, T) \mathcal{W}^*(\omega, T)}{2\pi T} \quad (1.67)$$

называется *перекрестной спектральной плотностью мощности* или, если  $V(t) = W(t)$ , *собственной спектральной плотностью мощности*. Если, например, произведение  $V(t)W(t)$  означает  $\mathbf{E}(t) \times \mathbf{H}(t)$ , то величина  $G(\omega)d\omega$  равна той части потока Пойнтинга, которая приходится на интервал частот между  $\omega$  и  $\omega + d\omega$ .

Хотя выражение (1.67) определено при математическом пределе  $T \rightarrow \infty$ , это не означает, что величину  $G(\omega)$  нельзя измерить





Фиг. 4. Блок-схема, иллюстрирующая метод измерения спектра флуктуирующего электромагнитного сигнала.

Мощность измеряется термопарой.

с любой требуемой степенью точности. Рассмотрим ситуацию, схематически изображенную на фиг. 4. Электромагнитный сигнал индуцирует напряжение  $V(t)$  на зажимах антенны. Сигнал проходит через фильтр с достаточно узкой шириной полосы  $\Delta\omega$ , так что спектральная плотность практически постоянна в этой полосе частот. Мощность измеряется в течение интервала времени  $T$ , большего  $1/\Delta\omega$ . Таким образом, аппаратура измеряет среднее значение мощности за большой, но конечный интервал времени.

Спектральная плотность мощности связана важным соотношением с корреляционной функцией, определяемой как усредненное произведение функции  $V(t)$  в момент времени  $t$  на функцию  $W(t - \tau)$  в некоторый другой момент времени  $(t - \tau)$ :

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathcal{V}(t, \tau) \mathcal{W}^*(t - \tau, T) dt. \quad (1.68)$$

Когда  $V(t) = W(t)$ ,  $R(\tau)$  называется автокорреляционной функцией; когда  $V(t) \neq W(t)$ ,  $R(\tau)$  называется перекрестной корреляционной функцией.

Способ определения  $R(\tau)$  свидетельствует о том, что функция  $R(\tau)$  зависит не от абсолютного значения момента времени, а от разности времен  $\tau$ . Неявно в этом содержится упоминавшееся выше утверждение о стационарном состоянии системы; это означает, что средние значения функций  $V(t)$  и  $W(t)$  не зависят от начала отсчета времени.

Применяя преобразования Фурье к (1.68), приходим к следующим важным соотношениям:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (1.69)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Эти соотношения показывают, что корреляционная функция является фурье-образом спектральной плотности мощности. Соотношения (1.69) известны как теорема Винера — Хинчина [22].

Для реальных сигналов  $G(\omega)$  и  $R(\tau)$  должны быть четными функциями частоты  $\omega$  и разности времен  $\tau$  соответственно. В этом случае соотношения (1.69) сводятся к «косинусным» преобразованиям Фурье:

$$R(\tau) = 2 \int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (1.70)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

С точки зрения экспериментатора спектральная плотность мощности является такой величиной, которая существует только для положительных частот. Определяя поэтому спектр  $G_0(\omega)$  для положительных частот как

$$G_0(\omega) = \begin{cases} 2G(\omega) & \text{для } \omega \geq 0, \\ 0 & \text{для } \omega < 0, \end{cases} \quad (1.71)$$

получаем

$$R(\tau) = \int_0^{\infty} G_0(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (1.72)$$

$$G_0(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau.$$

Например, в случае вектора Пойнтинга спектральная плотность потока определяется выражением

$$\mathbf{F}_\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}(\omega, T) \times \mathcal{H}^*(\omega, T)}{\pi T}. \quad (1.73)$$

Корреляционная функция показывает нам, по существу, как быстро изменяется хаотический процесс. Например, если

$$R(\tau) = e^{-\nu \tau}, \quad (1.74)$$

то можно считать, что  $\nu$  — частота релаксации системы. Из физических соображений можно ожидать, что частоты, значительно большие  $\nu$ , дают малый вклад в спектр мощности. Чтобы убедиться в этом, вычислим спектр мощности, используя (1.72) и (1.74),

$$G_0(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{1/\nu}{1 + (\omega/\nu)^2}. \quad (1.75)$$

Видно, что при  $\omega \ll \nu$  функция  $G_0(\omega)$  практически постоянна (мы называем эту часть спектра «белым шумом») и начинает заметно уменьшаться только при  $\omega \geq \nu$ .

Необходимо обратить внимание на то, что величина  $G_0(\omega)$  в выражении (1.72), величины (1.73) и (1.75) в  $2\pi$  раз меньше соответствующих величин, обычно принятых в литературе. Это связано с тем, что мы определили величину  $G_0(\omega)$  как спектральную плотность мощности на единицу круговой частоты  $d\omega$ , а не частоты  $df$  ( $\omega = 2\pi f$ ). В данной книге указанное различие присуще всем таким величинам, как плотность энергии, поток энергии и интенсивность. Поэтому нужно быть внимательным: если результат отличается от общепринятого значения на  $2\pi$ , это, вероятно, не опечатка, а связано с нашим определением.

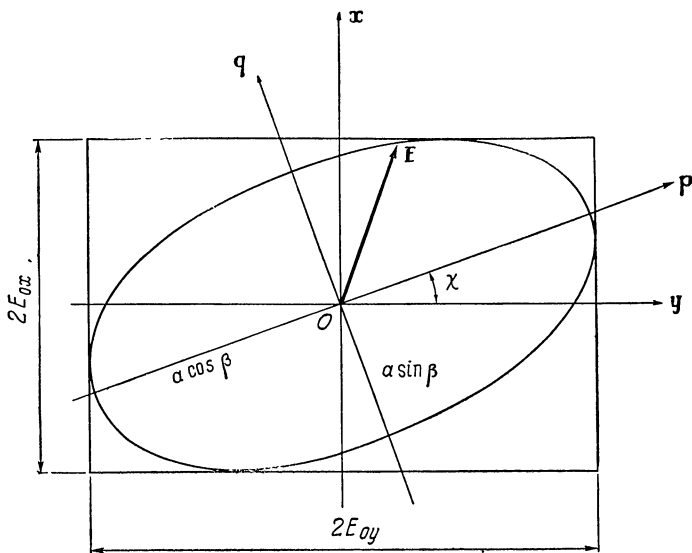
В некоторых случаях величина  $\mathcal{Y}(\omega, T)\mathcal{Y}^*(\omega, T)/T$  в (1.67) не стремится к определенному пределу при  $T \rightarrow \infty$ , а флуктуирует с ростом  $T$ . Эту трудность можно устранить с помощью метода «сглаживания». Соответствующая формальная процедура основана на понятии усреднения по ансамблю. Представим себе, что  $\mathcal{Y}(\omega, T)$  и  $\mathcal{Y}^*(\omega, T)$  являются «пробами», полученными из ряда измерений на системах с идентичными статистическими свойствами или же взятыми из ряда наблюдений над одной и той же системой, причем наблюдения выполнялись последовательно для большого количества хаотически распределенных временных интервалов. Проведем в (1.65) усреднение по ансамблю перед тем, как переходить к временному пределу. При этом спектральная плотность мощности определяется следующим выражением:

$$G(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\overline{\mathcal{Y}(\omega, T)\mathcal{Y}^*(\omega, T)}}{2\pi T}, \quad (1.76)$$

где черта означает усреднение по ансамблю. Такое представление величины  $G(\omega)$  обычно вводится в теорию информации. Более детальный анализ проведен в работах [23—27].

Мы рассмотрели только временные корреляции. В гл. 4 и 5 будут указаны ситуации, когда необходимо также рассматривать пространственные корреляции положения частиц плазмы.

**Поляризация излучения.** Строго монохроматическое излучение полностью поляризовано; это означает, что при развертке во времени конец электрического вектора в некоторой фиксированной точке волны периодически вычерчивает эллипс (который иногда сводится к окружности или прямой). Шумоподобные сигналы могут быть полностью неполяризованы (т. е. хаотически поляризованы); при этом конец электрического вектора движется совершенно хаотически и никакое направление в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, нельзя выделить. Эти случаи являются двумя предельными случаями более общей ситуации, при



Фиг. 5. Эллипс поляризации эллиптически поляризованной монохроматической волны, распространяющейся перпендикулярно плоскости чертежа.

Вектор  $k$  направлен вдоль оси  $z$ . Электрическое поле имеет вид

$$E = a [\hat{p} \cos \beta \sin(\omega t - kz + \alpha) + \hat{q} \sin \beta \cos(\omega t - kz + \alpha)],$$

причем

$$E_{Ox}^2 = a^2 (\cos^2 \beta \sin^2 \chi + \sin^2 \beta \cos^2 \chi),$$

$$E_{Oy}^2 = a^2 (\cos^2 \beta \cos^2 \chi + \sin^2 \beta \sin^2 \chi)$$

и

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} 2\beta}{\sin 2\chi}.$$

которой излучение, как говорят, частично поляризовано. Обсудим теперь вкратце величины, которые используются для описания частично поляризованного излучения.

Рассмотрим вначале полностью поляризованную (монохроматическую) волну, распространяющуюся вдоль положительного направления оси  $z$ . Вектор электрического поля в точке  $O$  можно разложить по двум взаимно ортогональным направлениям, перпендикулярным оси  $z$ :

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_{Ox}(t) e^{j\omega t - j\phi_2(t)}, \\ E_y(t) &= E_{Oy}(t) e^{j\omega t - j\phi_1(t)}; \end{aligned} \quad (1.77)$$

здесь не учитывается зависимость волны от пространственных координат и величины  $E_{Ox}$ ,  $E_{Oy}$ ,  $\phi_1$  и  $\phi_2$  теперь не зависят от времени.

На фиг. 5 приведено геометрическое представление выражения (1.77) [для изображения реальной волны берется только действи-

тельная часть, т. е.  $E_{ox} \cos(\omega t - \phi_2)$ ]. Чтобы охарактеризовать поляризацию, необходимы три независимые величины: например, амплитуды  $E_{ox}$ ,  $E_{oy}$  и разность фаз  $\delta = \phi_1 - \phi_2$ , или большая и малая оси эллипса и угол  $\chi$ , который задает ориентацию эллипса. На практике успешно пользуются методом описания с помощью ряда параметров одной и той же размерности. Эти параметры известны как параметры Стокса [28]

$$\begin{aligned} F &= E_{ox}^2 + E_{oy}^2 = a^2, \\ Q &= E_{oy}^2 - E_{ox}^2 = a^2 \cos 2\beta \cos 2\chi, \\ U &= 2E_{ox}E_{oy} \cos \delta = a^2 \cos 2\beta \sin 2\chi, \\ V &= 2E_{ox}E_{oy} \sin \delta = a^2 \sin 2\beta; \end{aligned} \quad (1.78)$$

для каждого из них дано два выражения: первое определяет параметр через величины, фигурирующие в (1.77), а второе — через величины, характеризующие эллипс поляризации на фиг. 5.

Эллиптичность определяется  $\operatorname{tg} \beta$ , причем

$$\sin 2\beta = \frac{V}{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}. \quad (1.79)$$

Когда  $\operatorname{tg} \beta = 0$  (и  $\delta = m\pi$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2$  и т. д.), то говорят, что волна линейно или плоско поляризована; когда  $\operatorname{tg} \beta = \pm 1$  (и  $\delta = \pm \pi/2$ ), то волна поляризована по кругу.

Согласно современной терминологии, волну называют правополяризованной, если при ее распространении по направлению к наблюдателю конец электрического вектора вращается против часовой стрелки, а если он вращается по часовой стрелке, то волну называют левополяризованной. В случае, когда направление магнитного поля совпадает с направлением распространения и волна правополяризованная, конец электрического вектора вращается в направлении вращения электронов. Равенство  $\operatorname{tg} \beta = +1$  соответствует правосторонней круговой поляризации, а  $\operatorname{tg} \beta = -1$  — левосторонней круговой поляризации.

Плоскость поляризации задается углом  $\chi$ , причем

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{U}{Q}. \quad (1.80)$$

Четыре параметра  $F$ ,  $Q$ ,  $U$  и  $V$  являются действительными величинами и связаны между собой соотношением

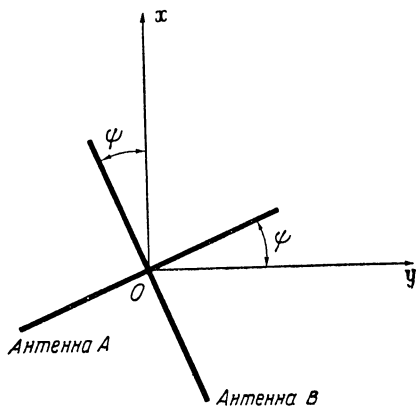
$$F^2 = Q^2 + U^2 + V^2. \quad (1.81)$$

Из первого выражения (1.78) ясно, что параметр  $F$  пропорционален величине потока излучения, но такое отождествление обычно имеет смысл только в вакууме, а не внутри анизотропной среды.

Чтобы показать связь параметров Стокса с измеряемыми величинами, рассмотрим следующий эксперимент. Две идентичные

антенны  $A$  и  $B$  лежат в плоскости  $xu$  и ориентированы относительно друг друга так, что составляют прямой угол (фиг. 6). Они наклонены на некоторый угол  $\psi$  относительно осей координат. Каждая антенна способна детектировать только такое электрическое поле, которое направлено вдоль ее длины.

Сигналы, принимаемые каждой антенной, складываются, возводятся в квадрат и усредняются по времени. Однако до этой



Фиг. 6. Определение характера поляризации волны при помощи двух антенн, расположенных в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.

процедуры в сигнал, принимаемый, например, антенной  $A$ , вводится известная переменная задержка времени  $\gamma/\omega$ . Легко показать, что результирующий выходной сигнал  $\mathcal{O}$  из системы определяется выражением

$$\mathcal{O}(\psi, \gamma) = F - Q \cos \gamma \sin 2\psi + U \cos \gamma \cos 2\psi - V \sin \gamma. \quad (1.82)$$

Все четыре параметра Стокса можно теперь найти, вращая антенны и изменяя задержку времени. Например,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(0, 0) &= F + U, \\ \mathcal{O}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) &= F - Q, \\ \mathcal{O}\left(0, \frac{\pi}{2}\right) &= F - V, \\ \mathcal{O}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) &= F - U. \end{aligned} \quad (1.83)$$

**Параметры Стокса для квазимонохроматических волн.** До сих пор предполагалось, что волна строго монохроматическая, а  $E_{ox}$ ,  $E_{oy}$  и  $\phi$  не зависят от времени. Позволим этим величинам изменяться с течением времени  $t$ , но предположим, что они изменяются только на небольшую величину за интервал времени, малый по срав-

нению с обратной величиной эффективной спектральной ширины излучения  $\Delta\omega$ . Частота  $\omega$  в выражении (1.77) является тогда средней частотой  $\langle\omega\rangle$ , причем  $\langle\omega\rangle \gg \Delta\omega$ . Это по существу и есть то, что подразумевается под понятием квазимонохроматическая волна, и полученные результаты относятся именно к такой волне. Формулировка поляризационных явлений применительно к широкополосному шуму дана в работе [29].

Параметры Стокса для этой волны по-прежнему определяются первыми выражениями в (1.78), но в них проведено усреднение по времени в том смысле, как указано выше:

$$\begin{aligned} F &= \langle E_{ox}^2 \rangle + \langle E_{oy}^2 \rangle, \\ Q &= \langle E_{oy}^2 \rangle - \langle E_{ox}^2 \rangle, \\ U &= 2 \langle E_{ox} E_{oy} \cos \delta \rangle, \\ V &= 2 \langle E_{ox} E_{oy} \sin \delta \rangle. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Теперь параметры Стокса связаны между собой следующим соотношением:

$$F^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2, \quad (1.85)$$

где знак равенства относится к случаю полной эллиптической поляризации, а для чисто хаотической поляризации

$$Q = U = V = 0. \quad (1.86)$$

Одно из наиболее интересных свойств параметров Стокса состоит в том, что если складываются два некогерентных луча, то их параметры Стокса тоже складываются. Поэтому, если два начальных луча имеют, скажем, параметры [4, 1, 1, -2] и [3, 0, 0, 3], то результирующее излучение будет иметь параметры [7, 1, 1, 1].

Чтобы представить себе характеристики частично поляризованной волны, разложим ее на две взаимно независимые компоненты: эллиптически поляризованную и хаотически поляризованную. Пусть  $F = F^{(1)} + F^{(2)}$ ,  $Q = Q^{(1)} + Q^{(2)}$  и т. д., где индексы 1 и 2 относятся соответственно к компонентам 1 и 2. Пусть компоненте 1 отвечает «поток»  $F$ , равный

$$F^{(1)} = (Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2}, \quad (1.87)$$

причем

$$Q^{(1)} = Q, \quad U^{(1)} = U, \quad V^{(1)} = V.$$

Эта компонента эллиптически поляризована, причем эллиптичность  $\beta$  и угол  $\chi$ , задающий плоскость поляризации [ср. (1.79) и (1.80)], определяются формулами

$$\begin{aligned} \sin 2\beta &= \frac{V}{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}, \\ \operatorname{tg} 2\chi &= \frac{U}{Q}. \end{aligned} \quad (1.88)$$

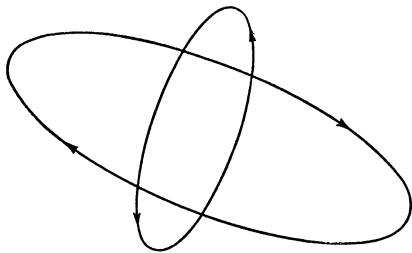
Компоненте 2 должен тогда соответствовать поток

$$F^{(2)} = F - (Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2}, \quad (1.89)$$

причем

$$Q^{(2)} = U^{(2)} = V^{(2)} = 0;$$

это дает отчетливое представление об излучении с хаотической поляризацией. Мы можем продвинуться дальше и разложить излу-



Фиг. 7. Разложение частично поляризованного излучения на две компоненты с противоположной поляризацией.

чение с хаотической поляризацией на две волны с равными амплитудами и противоположными поляризациями, причем эти волны будут иметь следующие характеристики.

1. Для одной волны поток равен

$$\frac{1}{2} [F - (Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2}]$$

и состояние поляризации  $(\beta; \chi)$ .

2. Для другой волны поток равен

$$\frac{1}{2} [F + (Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2}]$$

и состояние поляризации  $(-\beta, \chi + 1/2\pi)$ .

Первая из этих волн складывается с эллиптически поляризованной волной, определяемой (1.87). Окончательный результат сводится к тому, что излучение с произвольной поляризацией можно разложить на две независимые компоненты с противоположными эллиптическими поляризациями (фиг. 7). Эти две компоненты характеризуются следующими формулами:

$$F' \text{ одной компоненты} = \frac{1}{2} (F + \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}) \text{ и поляризация } (\beta, \chi), \quad (1.90)$$

$$F'' \text{ другой компоненты} =$$

$$= \frac{1}{2} (F - \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}) \text{ и поляризация } \left(-\beta; \chi + \frac{1}{2}\pi\right), \quad (1.91)$$

где  $\beta$  и  $\chi$  определяются формулами (1.88).

Удобной величиной является степень поляризации  $p$ , которая представляет собой отношение потока, соответствующего компо-



ненте с одной поляризацией, к полному потоку в волне. Как видно из (1.87) и (1.89), эту величину легко выразить через параметры Стокса

$$\rho = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I} \quad (1.92)$$

или через потоки, определяемые формулами (1.90) и (1.91):

$$\rho = \left| \frac{F' - F''}{F' + F''} \right|, \quad (1.93)$$

где один штрих относится к компоненте (1.90), а два штриха — к компоненте (1.91); степень поляризации  $\rho$  равна нулю при хаотической поляризации и равна единице при полностью эллиптической поляризации.

Заканчивая обсуждение, заметим, что представление с помощью параметров Стокса не является единственным. В более современных работах этот вопрос рассматривается с помощью «матриц когерентности», которые описывают свойства поля через корреляционные функции компонент флуктуирующего поля. Такой подход детально обсуждается в книге Борна и Вольфа [30] (см. также [31]). Применение матричного представления к радиоантеннам обсуждается в работе [32], а к переносу излучения — в работе [29].

## § 5. Применение понятий геометрической оптики

Поток излучения в некоторой точке внутри или вне диэлектрической среды описывается спектральной плотностью потока  $\mathbf{F}_\omega$ , см. (1.73). Вообще говоря, к потоку излучения нужно добавить неэлектромагнитный поток, связанный с частицами (он обсуждался в § 3 настоящей главы), поэтому впредь предполагается, что величина  $\mathbf{F}_\omega$  включает в себя оба потока.

Рассмотрим вначале среду в отсутствие потерь. Уравнение сохранения энергии для равновесных состояний имеет тогда вид

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_\omega = 0. \quad (1.94)$$

Это уравнение является обманчиво простым, и используя его для анизотропной среды, свойства которой также изменяются в пространстве, мы обычно вынуждены прибегать к различным приближениям. Такого рода приближения содержатся в понятиях геометрической оптики.

Основное предположение геометрической оптики таково: свойства среды медленно изменяются в пространстве и характерный размер неоднородности значительно больше длины волны излучения в среде. Тогда можно считать, что излучение распространяется

вдоль пучков кривых или лучей. Различные пучки могут принадлежать разным характеристическим модам, которые могут существовать в среде (см. § 2 настоящей главы). Если даже эти пучки распространяются практически по одному направлению, они не взаимодействуют друг с другом при условии, что свойства среды изменяются медленно. Отсюда вытекает важное следствие: уравнение (1.94) справедливо для каждой отдельной моды; начиная с этого момента, подразумевается, что поток  $\mathbf{F}_\omega$  и плотность энергии относятся именно к одной из этих мод.

Траектория луча (принадлежащего данной моде) описывается уравнениями (см., например, [33])

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.95)$$

где  $t$  — время, а  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  связаны дисперсионным уравнением (см. § 2 настоящей главы)

$$\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}). \quad (1.96)$$

Первое уравнение (1.95) утверждает, что конец вектора  $\mathbf{r}$  движется вдоль луча со скоростью, равной групповой скорости. Если представить излучение, как состоящее из отдельных частиц с импульсом  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$  ( $\hbar = h/2\pi$ ), то уравнения (1.95) будут просто динамическими уравнениями Гамильтона, где  $\hbar \omega$  — гамильтониан.

Если дисперсионное уравнение записано в форме (1.21)

$$g(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0, \quad (1.97)$$

то другое представление траектории луча имеет вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{k}}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.98)$$

Справедливость последних уравнений для анизотропной плазмы детально исследовал Вайнберг [34]. Уравнения (1.95) можно получить из (1.98), подставив

$$g(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}) - \omega.$$

Мы вернемся к этим уравнениям позднее. Нашей ближайшей задачей является использование геометрической оптики для определения вместо  $\mathbf{F}_\omega$  новой величины, которая упростила бы расчеты потока излучения.

Пусть  $da$  — элементарная площадка, внешняя нормаль<sup>1)</sup> к которой направлена по единичному вектору  $\hat{\mathbf{p}}$  (фиг. 8а). Каждый элемент источника посылает через  $da$  трубку лучей и центральные

<sup>1)</sup> В случае плазмы, помещенной в магнитное поле  $\mathbf{V}_0$ , для простоты предполагается, что нормаль параллельна  $\mathbf{V}_0$ .

лучи трубок заполняют телесный угол  $d\Omega$ . Если телесный угол достаточно мал, потоки от индивидуальных элементов распространяются в сущности в одном направлении. При предположении, что источники излучают некогерентно относительно друг друга, полный поток является скалярной суммой индивидуальных потоков и пропорционален  $d\Omega$ . Величина потока  $dF_{\omega} \cdot \hat{\mathbf{p}}$  определяется по формуле

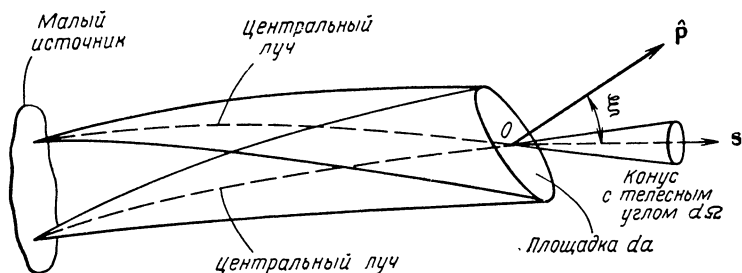
$$dF_{\omega} \cdot \hat{\mathbf{p}} = dF_{\omega} \cos \xi = I_{\omega}(\mathbf{s}) \cos \xi d\Omega, \quad (1.99)$$

где  $I_{\omega}(\mathbf{s})$  — коэффициент пропорциональности. Усредненная по времени мощность потока  $dI_{\omega}$  в спектральном диапазоне  $d\omega$ , пересекающего элементарную площадку  $da$  и ограниченного телесным углом  $d\Omega$ , равна

$$dP_{\omega}(\mathbf{s}) = I_{\omega}(\mathbf{s}) \cos \xi d\Omega d\omega da. \quad (1.100)$$

Скалярная величина  $I_{\omega}$  известна как удельная интенсивность излучения (или просто интенсивность). Она измеряется в единицах  $\text{вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{стер} \cdot \text{рад} \cdot \text{сек}^{-1})$ . (Как было указано в § 4 настоящей главы,  $I_{\omega}$  принято выражать на единицу частоты  $df$ , а не на интервал круговой частоты  $d\omega$ , однако мы остаемся верны нашей схеме.) Определение  $I_{\omega}$  пришло к нам из астрофизики (и фотометрии) и не должно смешиваться с другим определением интенсивности, которым пользуются ученые, обычно не работающие с «небесами» (см., например, книгу [30], где интенсивность определена как величина усредненного по времени потока Пойнтинга).

Интенсивность  $I_{\omega}$  в точке  $O$  обычно изменяется в зависимости от направления, а также от положения этой точки в среде. Если интенсивность  $I_{\omega}$  в точке не зависит от направления, то говорят, что поле излучения является изотропным. Если, кроме того, интенсивность  $I_{\omega}$  одинакова во всех точках, то говорят, что излучение изотропно и однородно. Излучение черного тела в пустой адиабатической оболочке является примером такого поля излучения.



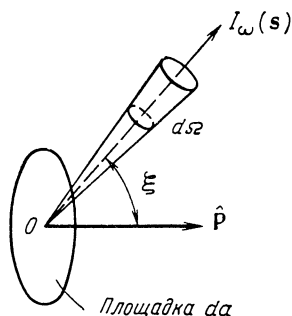
Фиг. 8а. Пучки лучей, исходящие из малого источника и пересекающие элементарную площадку  $da$ .

Для получения полного потока, пересекающего единичную площадку  $da$  (фиг. 8б), необходимо проинтегрировать (1.99) по всему телесному углу:

$$F_{\omega} = \int_{0 \leq \xi \leq \pi} I_{\omega} \cos \xi \, d\Omega, \quad (1.101)$$

здесь  $F_{\omega}$  — величина вектора, определяемого формулой (1.73) (к которому нужно прибавить неэлектромагнитный поток, связанный с частицами); тогда (1.101) обеспечивает связь между определяемой величиной  $I_{\omega}$  и уравнениями Максвелла для флуктуирующих полей.

Если нам нужен односторонний поток энергии, например, в ту полусферу, куда указывает нормаль  $\hat{p}$ , то интегрирование в (1.101)



Фиг. 8б. Векторная диаграмма для излучения, протекающего через элементарную площадку  $da$ .

необходимо проводить только в диапазоне углов  $0 \leq \xi \leq \pi/2$ . Заметим, что для изотропного поля излучения  $F_{\omega} = 0$ , в то время как односторонний поток равен  $\pi I_{\omega}$ .

Случай, который часто встречается на практике, например в радиоастрономии, — это определение потока на большом расстоянии от излучающего тела. Если телесный угол, который образуют лучи, идущие от границ тела к месту расположения наблюдателя, достаточно мал, то (1.101) можно аппроксимировать следующим образом:

$$F_{\omega} = \int I_{\omega} \, d\Omega \quad (1.102)$$

(мы предполагаем, что площадка  $da$ , поток через которую вычисляется, расположена перпендикулярно лучам).

**Спектральная плотность энергии.** Важное значение имеет плотность энергии в некоторой точке среды. Если  $U(t)$  — мгновенная плотность, то, сравнивая с (1.66), можно написать

$$\langle U(t) \rangle = \int_0^{\infty} u_{\omega} \, d\omega, \quad (1.103)$$

где  $u_\omega$  — спектральная плотность энергии (измеряется в единицах джоуль/(м<sup>3</sup> · рад · сек<sup>-1</sup>), а  $\omega$  лежит в области положительных частот).

С помощью (1.100) можно очень легко установить соотношение между  $u_\omega$  и  $I_\omega$ . Как и следовало ожидать [ср. (1.54)], находим

$$u_\omega = \int_{4\pi} \frac{I_\omega}{\omega} d\Omega, \quad (1.104)$$

где использовался тот факт (см. § 3 настоящей главы), что скорость распространения энергии равна групповой скорости  $\mathbf{w}$ . Обычно обе величины,  $I_\omega$  и  $\omega$ , зависят от направления. Нужно заметить, что  $d\Omega$  — элемент телесного угла вокруг траектории луча; он как раз такой же, какой определен на фиг. 2, и связан с телесным углом  $d\Omega_k$  вокруг вектора  $\mathbf{k}$  соотношением (1.62). Для данной моды и для определенных частот  $\omega$  вектор  $\mathbf{k}$  может быть чисто мнимым в некотором диапазоне углов распространения  $\theta$ . Под такими углами нет излучения. Поэтому интегрирование в (1.104) следует проводить только по углам  $\xi$  и телесным углам  $d\Omega$ , соответствующим действительным значениям  $k(\theta, \omega)$ .

## § 6. Уравнение переноса

Уравнение переноса — это уравнение сохранения энергии (1.94), выраженное на языке геометрической оптики и справедливое при тех же предположениях, что и последняя (см. § 5 настоящей главы).

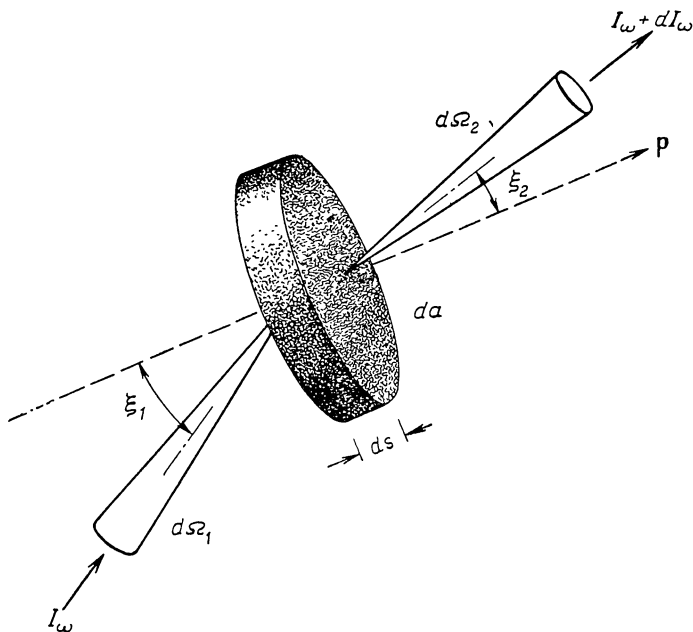
Рассмотрим бесконечно малый элемент объема среды, имеющий вид «таблетки» (фиг. 9). Пучок лучей с интенсивностью излучения  $I_\omega$  в телесном угле  $d\Omega_1$  падает на одну поверхность «таблетки» и составляет угол  $\xi_1$  с нормалью  $\hat{\mathbf{r}}$ . Выходящий пучок лучей с интенсивностью излучения  $I_\omega + dI_\omega$  лежит внутри телесного угла  $d\Omega_2$ . Среда является слегка неоднородной, что вызывает искривление лучей, поэтому  $\xi_2 \neq \xi_1$ . Для среды без потерь в соответствии с (1.100) имеем

$$(I_\omega + dI_\omega) da \cos \xi_2 d\Omega_2 d\omega - I_\omega da \cos \xi_1 d\Omega_1 d\omega = 0; \quad (1.105)$$

это есть уравнение сохранения энергии для излучения, распространяющегося вдоль данного направления. Изменение свойств среды предполагается таким малым, что отражение энергии от границы раздела между частями среды 1 и 2 отсутствует.

Предположим теперь на минуту, что рассматриваемая волна подчиняется закону преломления Снелля:

$$n \sin \xi = \text{const} \quad \text{вдоль луча}, \quad (1.106)$$



Фиг. 9. Излучение, входящее в малый объем плазмы и покидающее его после небольшого преломления из-за различия показателей преломления на двух сторонах элементарной «таблетки».

где показатель преломления  $n$  определяется как величина вектора  $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n} = \frac{c}{\omega} \operatorname{Re} \mathbf{k}. \quad (1.107)$$

Тогда найдем

$$n^2 da \cos \xi d\Omega = \text{const}, \quad (1.108)$$

и из (1.105) получим

$$\frac{I_\omega}{n^2} = \text{const} \text{ вдоль луча}, \quad (1.109)$$

т. е. классический результат геометрической оптики (см., например [35, 36]). Отметим, что  $I_\omega = \text{const}$  вдоль луча, распространяющегося в вакууме, и не зависит от расстояния между наблюдателем и источником. В противоположность этому, поток (пропорциональный  $d\Omega$ ) уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния. Тот факт, что интенсивность  $I_\omega$  не зависит от расстоя-

ния, делает эту величину наиболее удобной для описания испускаемых свойств излучающих тел.

В анизотропных плазмах закону Снелля подчиняются лишь некоторые волны, распространяющиеся в определенных направлениях относительно статического магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ . Нужно поэтому получить обобщения (1.108) и (1.109), справедливые для произвольной анизотропной среды. Имеется несколько путей для решения этой проблемы; мы примем метод, аналогичный принятому в работе [37].

Эквивалентность между уравнениями (1.95) для траектории луча и каноническими уравнениями движения Гамильтона для одной материальной частицы теперь можно распространить на ансамбль многих «световых частиц», используя известные физические характеристики ансамбля многих материальных частиц.

Если  $f_p(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$  — функция распределения световых частиц, то число частиц в объеме  $d^3r d^3k$  фазового пространства (см. § 1 настоящей главы) равно

$$dN_p = f_p(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) d^3r d^3k. \quad (1.110)$$

В следующий момент времени  $t + \delta t$  у частицы будут новые координаты  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{k}'$ . При отсутствии взаимодействия между частицами плотность  $dN'_p$  в момент времени  $t + \delta t$  равна

$$dN'_p = f_p(\mathbf{r}', \mathbf{k}', t + \delta t) d^3r' d^3k'. \quad (1.111)$$

Якобиан

$$\frac{\partial(\mathbf{r}', \mathbf{k}')}{\partial(\mathbf{r}, \mathbf{k})} = 1,$$

поэтому в выражении (1.111) можно сделать замену

$$d^3r' d^3k' = d^3r d^3k. \quad (1.112)$$

Эволюция функции распределения описывается теоремой Лиувилля:

$$\frac{df_p}{dt} = 0. \quad (1.113)$$

Теперь можно использовать преобразование (1.112), чтобы проследить за световыми частицами в объеме пространства  $d^3r d^3k$ . Воспользовавшись теми же обозначениями, что и на фиг. 9, из уравнений (1.95) получим

$$d^3r \sim \omega da \cos \xi, \quad (1.114)$$

где  $\omega$  — групповая скорость. Далее запишем элемент объема  $d^3k$  в сферических координатах  $k$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ , определенных на фиг. 2:

$$d^3k = \frac{\partial(k_x, k_y, k_z)}{\partial(\omega, \theta, \phi)} d\theta d\phi d\omega. \quad (1.115)$$

Вычисляя вышеупомянутый якобиан [используя при этом дисперсионное соотношение (1.56)], находим

$$d^3k = k^2 \left| \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_\theta \right| d\Omega_k d\omega, \quad (1.116)$$

где  $d\Omega_k = \sin \theta d\theta d\phi$  — элементарный телесный угол вокруг направления  $\mathbf{k}$ . Подставляя (1.114) и (1.116) в (1.112), находим

$$\left| k^2 \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_\theta w da \cos \xi d\Omega_k d\omega \right| = \text{const}. \quad (1.117)$$

Теперь  $k$  заменим на  $n\omega/c$  и  $d\Omega_k$  заменим на  $(d\Omega_k/d\Omega)d\Omega$ , где  $d\Omega = \sin \xi d\xi d\eta$  — телесный угол вокруг направления луча. Это дает искомый результат:

$$\left| n^2 \left( \frac{\partial \omega n}{\partial \omega} \right)_\theta w da \cos \xi \left( \frac{d\Omega_k}{d\Omega} \right) d\Omega d\omega \right| = \text{const}. \quad (1.118)$$

В изотропной среде

$$d\Omega_k = d\Omega, \quad w = \frac{c d\omega}{d\omega n},$$

и поэтому (1.118) сводится к (1.108). Напишем, по аналогии с (1.108), для анизотропной среды

$$n_r^2 da \cos \xi d\Omega = \text{const}, \quad (1.119)$$

где  $n_r$  — новый показатель преломления, который мы назовем «лучевой показатель преломления»; его величину можно определить, приравняв (1.118) и (1.119):

$$n_r^2 = \left| \frac{w}{c} n^2 \frac{d\Omega_k}{d\Omega} \left( \frac{\partial \omega n}{\partial \omega} \right)_\theta \right|. \quad (1.120)$$

Подставив (1.61) и (1.62) в (1.120), придем к следующему довольно громоздкому выражению для  $n_r$ :

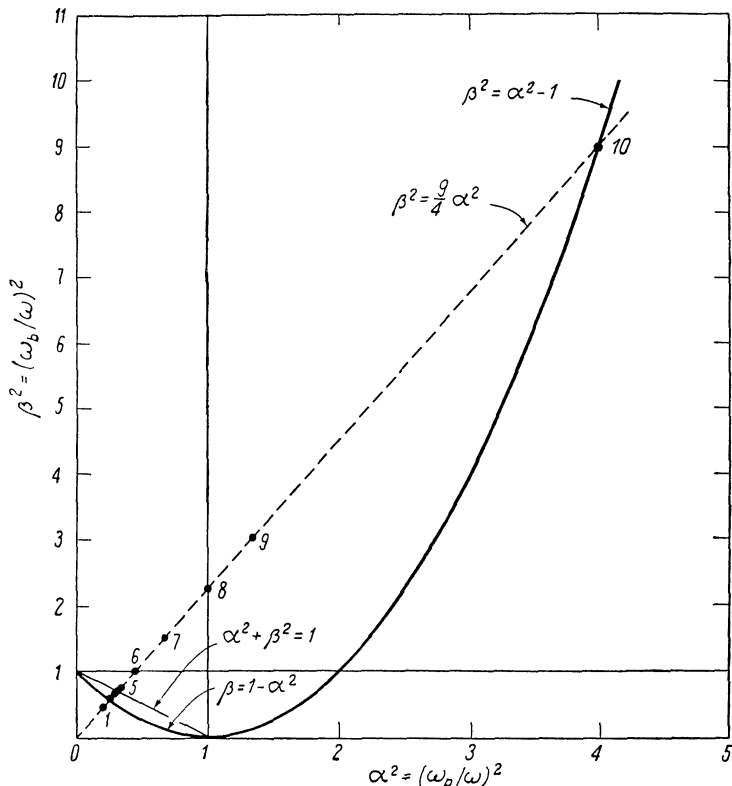
$$n_r^2 = \left| n^2 \sin \theta \frac{\left\{ 1 + [(1/n) (\partial n / \partial \theta)]_\omega^2 \right\}^{1/2}}{\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\cos \theta + [(1/n) (\partial n / \partial \theta)]_\omega \sin \theta}{\left\{ 1 + [(1/n) (\partial n / \partial \theta)]_\omega^2 \right\}^{1/2}} \right\}} \right|. \quad (1.121)$$

Уравнение сохранения энергии

$$\frac{I_\omega}{n_r^2} = \text{const} \quad (1.122)$$

получается из (1.105) и (1.119); оно является требуемым обобщением (1.109). Это уравнение является «уравнением переноса» излучения в пассивной среде, которая не поглощает, не испускает и не рассеивает излучение. В § 7 настоящей главы рассматриваются модификации уравнения (1.122) для случая испускающей и поглощающей среды.





Фиг. 10. Зависимость  $\beta^2 = (\omega_b/\omega)^2$  от  $\alpha^2 = (\omega_p/\omega)^2$ .

Сплошные линии делят плоскость  $\alpha^2, \beta^2$  на восемь частей. Каждая часть однозначно связана со свойствами двух поперечных электромагнитных волн, распространяющихся в холодной плазме (движение ионов не учитывается). Пунктирная линия показывает типичную траекторию, проходящую при изменении частоты волн в плазме с фиксированными свойствами [в данном случае  $\omega_p^2 = (1/9)\omega_b^2$ ]. Точки 2, 4, 6, 8 и 10 лежат на граничных кривых.

**Показатели  $n$  и  $n_r$  в холодной анизотропной плазме с неподвижными ионами.** Показатели  $n$  и  $n_r$  относятся к совершенно различным физическим характеристикам анизотропной среды. Полярная диаграмма  $n(\theta)$  (поверхность показателя преломления, рассмотренная в § 3 настоящей главы) позволяет судить об угловых характеристиках волнового вектора  $\mathbf{k}$ , а диаграмма  $n_r(\theta)$  — об изменении потока энергии в зависимости от угла.

Рассмотрим в качестве иллюстрации характер изменения  $n(\theta)$  и  $n_r(\theta)$  в холодной плазме при таких высоких частотах, когда ионы не могут участвовать в движении. Дисперсионное уравнение

имеет вид, задаваемый (1.27), его решения отвечают двум независимым электромагнитным волнам. Поэтому для данных величин  $\omega$ ,  $\omega_p$  и  $\omega_b$  существуют две поверхности для  $n(\theta)$  и две поверхности для  $n_r(\theta)$ .

Даже при больших изменениях параметров плазмы (внутри определенных пределов) сохраняются существенные характеристики поверхностей  $n(\theta)$  и  $n_r(\theta)$ . Это позволило Эллису [3] провести удобную классификацию. Плоскость с декартовыми координатами  $\alpha^2 \equiv \omega_p^2/\omega^2$  и  $\beta^2 \equiv \omega_b^2/\omega^2$  подразделяется простыми кривыми на некоторое количество областей (восемь в случае неподвижных ионов). Уравнения кривых указаны на фиг. 10. Внутри данной области, ограниченной этими кривыми, основная форма полярных диаграмм  $n(\theta)$  и  $n_r(\theta)$  остается практически неизменной.

Чтобы определить, как структура волны меняется в зависимости от частоты  $\omega$  для данной плазмы с фиксированными значениями  $\omega_p$  и  $\omega_b$ , пересечем фиг. 10 по диагонали от начала координат в левом нижнем углу (где  $\omega \rightarrow \infty$ ) до правого верхнего угла (где  $\omega \rightarrow 0$ ). Эта диагональ изображена пунктирной линией, на которой проставлены точки 1—10. На фиг. 11 приведены полярные диаграммы для диапазона частот, соответствующих этим точкам. Для удобства полярные диаграммы даны для  $1/n(\theta)$  и  $1/n_r(\theta)$ . Заметим, что первая величина пропорциональна «поверхности фазовой скорости» или «поверхности волновых нормалей», которую можно представить в виде полярной диаграммы  $\omega k/k^2$ ; здесь «поверхность волновых нормалей» отличается от упомянутой в монографии [3] только постоянной величиной, равной скорости света  $c$ . Полярные диаграммы взяты из расчетов, проведенных Рытовым [16], который представил графики  $n(\theta)$  и  $n_r^2(\theta)$  в декартовых координатах.

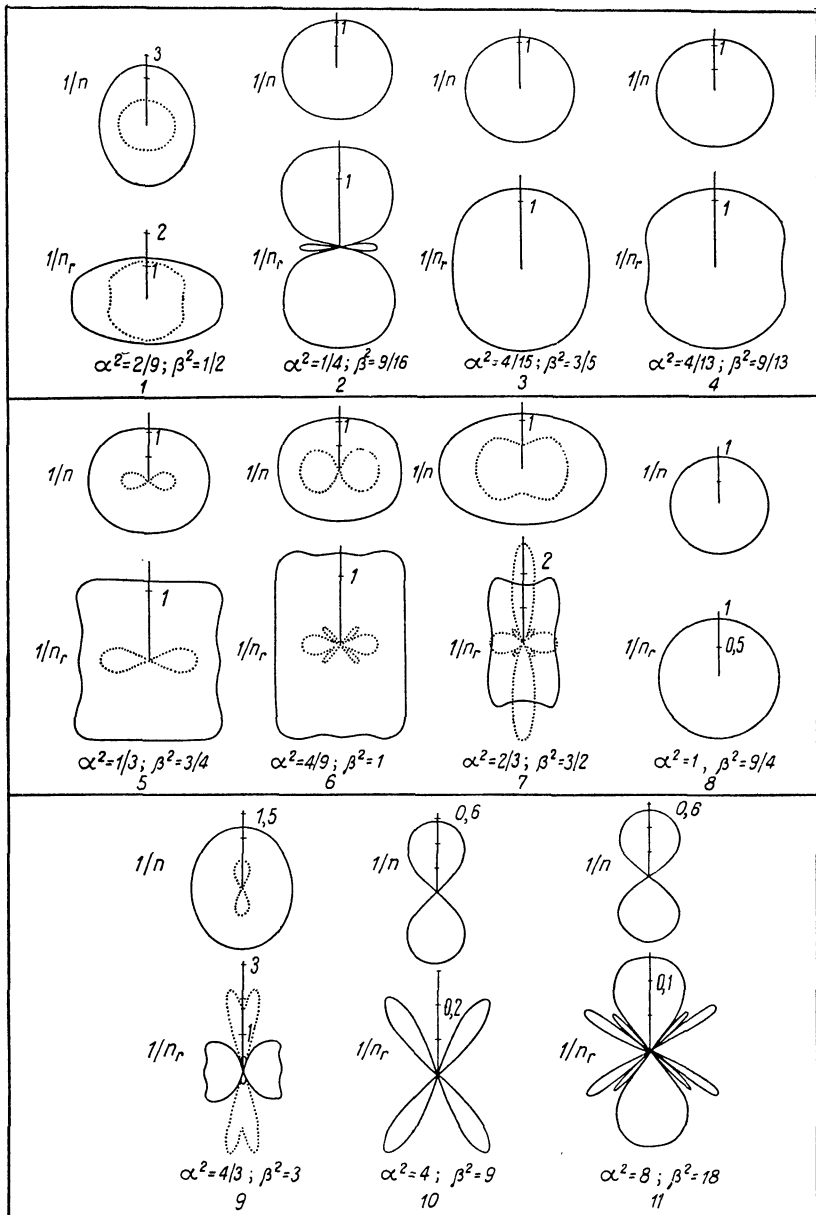
Мы не даем детального обсуждения поверхностей волновых нормалей. Укажем здесь некоторые наиболее достопримечательные особенности диаграмм  $n_r(\theta)$ .

Положим, что интенсивность  $I_\omega$  относится к излучению черного тела; тогда уравнение (1.122) утверждает, что интенсивность излучения черного тела внутри среды<sup>1)</sup>  $B_\omega(\omega, T, \theta)$  связана с интенсивностью излучения черного тела в вакууме  $B_0(\omega, T)$  соотношением

$$B(\omega, T, \theta) = n_r^2 B_0(\omega, T); \quad (1.123)$$

здесь  $B_0(\omega, T)$  — универсальная функция, зависящая только от частоты и температуры. Этот результат будет подтвержден в § 1 гл. 2. Теперь заметим, что интенсивность в среде пропорциональна

<sup>1)</sup> Поскольку среда предполагается идеально диэлектрической, она не может излучать. Нужно считать, что излучение создается внешним источником. В гл. 2 будет показано, что соотношение (1.123) относится также и к излучающей среде в условиях слабого поглощения.



Фиг. 11. Полярные диаграммы величин, обратных волновому показателю преломления  $n$  и «лучевому показателю преломления»  $n_r$ , для точек 1–11, показанных на фиг. 10 (из работы Рытова [16]).

Точка 11 находится вне диапазона данных этой фиг. 10. Сплошные линии на диаграммах соответствуют более быстрой из двух электромагнитных волн. В точке 8 значение  $n_r$  одинаково для двух волн, но  $n=0$  для одной волны и  $n=1$  для другой. Для получения поверхности надо вращать каждую полярную диаграмму относительно показанной вертикальной оси. Эти оси направлены вдоль статического магнитного поля  $B_0$ .

$n_r^2$ . Поэтому, когда  $1/n_r(\theta)$  (см. фиг. 11) меньше единицы, излучение  $B(\omega, T, \theta)$  превышает излучение черного тела в вакууме, и наоборот, когда  $1/n_r(\theta)$  больше единицы. При определенных углах  $n_r \rightarrow \infty$ , следовательно, и интенсивность на единицу телесного угла стремится к бесконечности.

Особенности в поведении функции  $n_r(\theta)$  возникают по различным причинам. В некоторых случаях они связаны с тем обстоятельством, что для определенных направлений луча телесный угол  $d\Omega$  стремится к нулю и конечный поток энергии проходит через телесный угол, равный нулю. Условия, при которых такое явление имеет место, вытекают из соотношения

$$\frac{d\Omega}{d\Omega_k} = \frac{\sin \xi}{\sin \theta} \frac{d\xi}{d\theta}. \quad (1.124)$$

Таким образом,  $d\Omega \rightarrow 0$ , когда а)  $\sin \xi = 0$ , а  $\sin \theta \neq 0$  и когда б)  $d\xi/d\theta = 0$ .

Степень поляризации излучения в заданном угле  $\theta$  можно оценить из диаграмм с помощью соотношения

$$p(\theta) = \left| \frac{[n_r^{(2)}]^2 - [n_r^{(1)}]^2}{[n_r^{(2)}]^2 + [n_r^{(1)}]^2} \right|. \quad (1.125)$$

Этот результат следует из выражений (1.93) и (1.123).

## § 7. Перенос энергии в поглощающей и излучающей среде

До сих пор рассматривались диэлектрики без потерь, характеризуемые эрмитовым диэлектрическим коэффициентом  $\mathbf{K}$ . Постоянная распространения волны в такой среде является либо чисто действительной, либо чисто мнимой величиной (для действительной положительной частоты  $\omega$ ), и волна либо распространяется без потери энергии, либо вообще не распространяется (и тогда мы говорим о ней как о волне с бесконечно малой амплитудой).

Любой физический процесс всегда связан с некоторой потерей энергии и только среда с потерями является источником спонтанных электрических и магнитных флуктуаций и поэтому способна излучать.

Усредненная по времени поглощаемая мощность [см. (1.39)] равна

$$\langle P_{\text{погл}} \rangle = \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle. \quad (1.126)$$

Для синусоидальной волны

$$\langle P_{\text{погл}} \rangle = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* + \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{J}) = \frac{1}{4} j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot [\mathbf{K} - \mathbf{K}^*] \cdot \mathbf{E}; \quad (1.127)$$

второе выражение получено из (1.14) и (1.15). Разделив (1.127) на плотность энергии волны, найдем декремент затухания колебаний.

Рассмотрим теперь случай продольных колебаний в изотропной плазме. Если затухание мало, то плотность энергии определяется выражением (1.49), где в качестве действительной части диэлектрического коэффициента используется  $K_L$ . Тогда из (1.127) следует, что время релаксации  $\tau_L$  для продольных волн определяется формулой

$$\tau_L = - \frac{\partial \operatorname{Re} K_L(k, \omega)}{\partial \omega} [2 \operatorname{Im} K_L(k, \omega)]^{-1}.$$

Положим, например, что затухание вызвано парными столкновениями, которые описываются частотой столкновений  $\nu$ . Тогда (см. § 4 гл. 4) для слабо затухающих электронных плазменных колебаний выражение (1.35) принимает вид

$$K_L \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{3k^2 v_0^2}{\omega^2} \right] - j \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( \frac{\nu}{\omega} \right), \quad \frac{3k^2 v_0^2}{\omega^2} \ll 1.$$

Подставив это выражение в вышеприведенную формулу для  $\tau_L$ , получим ожидаемый результат:  $\tau_L = \nu^{-1}$ . (Случай бесстолкновительного затухания Ландау обсуждается в § 5 гл. 4.)

Выражение для декремента затухания можно получить другим путем из дисперсионного уравнения. Решая последнее для комплексного значения  $\omega$  (для действительного значения  $k$ ), можно найти время релаксации амплитуды колебаний, т. е.  $1/\operatorname{Im} \omega$ ; отсюда время релаксации энергии (в сек) определяется формулой

$$\tau = \frac{1}{2 \operatorname{Im} \omega}. \quad (1.128)$$

При изучении переноса излучения интересной величиной является пространственное изменение потока энергии. Можно опять исходить из дисперсионного уравнения и теперь решить его для комплексного значения  $k$  (для действительного значения  $\omega$ ). Экспоненциальное затухание амплитуды определяется величиной  $-\operatorname{Im} k$  [знак минус связан с тем, что фурье-компоненты представляются в виде  $\exp(j\omega t - j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ ]. Пространственное затухание энергии равно удвоенному значению этой величины, но поскольку  $\mathbf{k}$  и направление усредненного по времени потока (т. е. направление луча) могут быть различными, затухание интенсивности (в  $m^{-1}$ ) вдоль луча  $\mathbf{s}$  определяется формулой

$$\alpha_\omega(\mathbf{s}) = (-2 \operatorname{Im} k) \cos \beta, \quad (1.129)$$

где  $\beta$  — угол между  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{k}$  [см. (1.60)]. Величина  $\alpha_\omega$  известна как коэффициент поглощения и имеет размерность  $m^{-1}$ .

*Уравнение сохранения энергии для среды с малыми потерями.* При наличии диссипации уравнение (1.94) принимает вид

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_\omega = \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle_\omega, \quad (1.130)$$

где  $\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle_\omega$  означает спектральную плотность величины  $\mathbf{J}(t) \cdot \mathbf{E}(t)$ . В правой части содержатся члены, описывающие процессы поглощения и испускания в среде. Это уравнение является достаточно общим, но непосредственно используется редко. Мы хотим включить поглощение и испускание в общие рамки формализма геометрической оптики (см. § 6 настоящей главы). Это можно сделать, помещая в правую часть уравнения (1.105) члены, соответствующие стокам и источникам, и предполагая, что левая часть уравнения (1.105) и левые части всех уравнений § 6 настоящей главы остаются неизменными по своей форме. Такое предположение справедливо только при слабом затухании. Причина указанного ограничения связана с тем, что если амплитуда некоторой моды колебания не остается примерно постоянной в течение многих высокочастотных циклов, то этой моде невозможно приписать групповую скорость, или усредненную по времени плотность энергии, или поток. Чтобы снять условие, налагаемое на величину затухания, нужно вычислять эти величины (скорость, плотность, поток энергии) не внутри среды, как требует данная теория переноса, а вне среды, где их можно хорошо определить. Как это практически выполнить — обсуждается в § 3 гл. 4.

Исследование эффектов диссипации, предпринятое Рытовым [16], показало, что во многих случаях выражения для плотности и скорости энергии являются неизменными с точностью до членов второго порядка при разложении по параметру диссипации. Другими словами, в эти выражения входят множители типа  $[1 + A(\alpha_\omega \lambda / 4\pi)^2 + \dots]$ , где  $\lambda$  — длина волны в среде, а  $A$  — постоянная порядка единицы. Это является отражением того факта, что

$$|\operatorname{Im} k|^2 \ll |\operatorname{Re} k|^2.$$

Поглощение и испускание легко ввести в правую часть уравнения (1.105). Проходя через таблетку толщиной  $ds$  (см. фиг. 9), лучи теряют энергию, равную

$$-\alpha_\omega I_\omega ds da \cos \xi d\Omega d\omega; \quad (1.131)$$

здесь использовалось выражение (1.100) и определение коэффициента поглощения  $\alpha_\omega(\mathbf{s})$ .

Таблетка является также источником излучения. Определим коэффициент испускания  $j_\omega$  как мощность, генерируемую едини-

цей объема среды в диапазоне частот  $d\omega$  на 1 *стер* в направлении луча  $s$ . Тогда излучение таблетки равно

$$j_{\omega} ds da \cos \xi d\Omega d\omega. \quad (1.132)$$

Сложим (1.131) и (1.132), введем эту сумму в правую часть (1.105) и, используя (1.119), найдем

$$n_r^2 \frac{d}{ds} \left( \frac{I_{\omega}}{n_r^2} \right) = j_{\omega} - \alpha_{\omega} I_{\omega}, \quad (1.133)$$

что и является искомым уравнением<sup>1)</sup>. Оно известно как *уравнение переноса*. Впервые его получили Смерд и Вестфольд [38] для изотропной среды ( $n_r = n$ ) в связи с исследованиями радиоизлучения Солнца. Результат для анизотропной среды получен в работе [37]. Предельный случай,  $n_r \rightarrow 1$ , относится к разреженной среде и находит много применений, например в оптическом диапазоне длин волн.

Читатель помнит, что все величины в уравнении (1.133) относятся к одной моде и что имеется столько дифференциальных уравнений, аналогичных (1.133), сколько имеется характеристических мод.

Чтобы решить уравнение (1.133), определим две величины. Одна величина,

$$S_{\omega} = \frac{1}{n_r^2} \frac{j_{\omega}}{\alpha_{\omega}}, \quad (1.134)$$

известна как *производительность* или *функция источника* и играет центральную роль в анализе излучения среды. Другой величиной является оптическая толщина  $\tau$ :

$$d\tau = -\alpha_{\omega} ds. \quad (1.135)$$

Если мы введем эти величины в уравнение (1.133), то оно примет вид

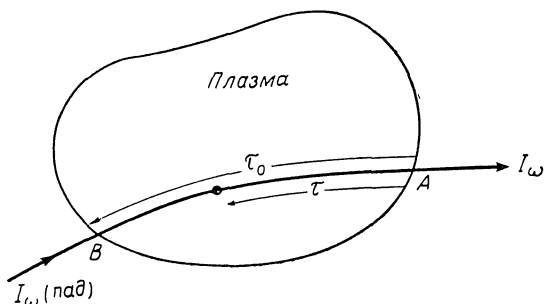
$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{I_{\omega}}{n_r^2} \right) = \frac{I_{\omega}}{n_r^2} - S_{\omega}. \quad (1.136)$$

Решим уравнение (1.136), т. е. найдем интенсивность в некоторой точке луча  $A$ , выраженную через интенсивность в другой точке луча  $B$ :

$$\frac{I_{\omega}(A)}{n_r^2(A)} e^{-\tau(A)} = \frac{I_{\omega}(B)}{n_r^2(B)} e^{-\tau(B)} + \int_{\tau(A)}^{\tau(B)} S_{\omega}(\tau) e^{-\tau} d\tau, \quad (1.137)$$

где  $\tau(A)$  — полная оптическая толщина от  $\tau = 0$  до точки  $A$ , а  $\tau(B)$  — полная оптическая толщина от  $\tau = 0$  до точки  $B$ .

<sup>1)</sup> Оператор  $d/ds$  означает  $\hat{s} \cdot \nabla$ , где  $\hat{s}$  — единичный вектор вдоль направления луча  $s$ .



Фиг. 12. Луч, проходящий сквозь среду.  
Оптическая толщина  $\tau$  измеряется от  $A$  — точки выхода луча.

Поскольку, по определению (1.135), оптическая толщина  $\tau$  уменьшается по мере возрастания  $s$ , за начало отсчета  $\tau$  удобно взять точку выхода луча из среды и отсчитывать назад по лучу. Таким образом, если  $l$  — длина луча, то

$$\tau = \int_0^{\tau} d\tau = - \int_l^s \alpha_{\omega} ds. \quad (1.138)$$

Для расчета интенсивности выходящего излучения предположим вначале, что граница вакуум — плазма является диффузной и можно пренебречь отражениями. Пусть точка  $A$  будет точкой выхода луча из среды (фиг. 12). Здесь  $\tau(A) = 0$ ,  $n_r(A) = 1$  и  $I_{\omega}(A)$  — интенсивность выходящего излучения, обозначаемая  $I_{\omega}$ . Будем считать точку  $B$  точкой входа луча в среду [где опять  $n_r(B) = 1$ ]. Тогда толщина  $\tau(B)$  равна полной оптической толщине среды и мы обозначим ее  $\tau_0$ . Если в результате испускания соседних тел на среду падает излучение интенсивностью  $I_{\omega}(\text{пад})$ , то для интенсивности выходящего излучения вдоль выбранного луча формула (1.137) принимает вид

$$I_{\omega} = I_{\omega}(\text{пад}) e^{-\tau_0} + \int_0^{\tau_0} S_{\omega}(\tau) e^{-\tau} d\tau. \quad (1.139)$$

Формула (1.139) выражает тот факт, что интенсивность выходящего излучения является полной суммой интенсивности излучения от всех внутренних точек, уменьшенной в  $e^{-\tau}$  раз из-за поглощения средой, и интенсивности излучения, падающего на обратную сторону среды, причем эта интенсивность уменьшена в  $e^{-\tau_0}$  раз за счет поглощения, которое имеет место при прохождении среды.

Функция источника  $S_{\omega}$  может быть функцией локальной интенсивности поля излучения. Так будет в случае среды, частицы которой являются в первую очередь рассеивающими центрами для



излучения. Тогда (1.139) является интегральным уравнением для  $I_\omega$  и отправным пунктом теории множественного рассеяния (см. монографию [39] и § 1 гл. 8). К счастью, в проблемах, представляющих для нас интерес, функция  $S_\omega$  не зависит от  $I_\omega$  (или, самое большее, очень слабо зависит) и все, что требуется, это вычислить интеграл в (1.139).

Мы увидим в гл. 2, что функцию  $S_\omega$  удобно записать в форме

$$S_\omega = \frac{1}{n_r^2} \frac{j_\omega}{\alpha_\omega} = \frac{\omega^2}{8\pi^3 c^2} \kappa T_r, \quad (1.140)$$

где  $\kappa$  — постоянная Больцмана;  $T_r$  — величина, имеющая размерность температуры. Последнюю обычно называют *температурой излучения* среды; она зависит от частоты, направления луча в среде  $s$  и элементарных процессов испускания.

Когда  $T_r$  не зависит от положения в среде (хотя  $\tau$  может сильно зависеть), то, подставляя (1.140) в (1.139), находим

$$I_\omega = I_\omega(\text{пад}) e^{-\tau_0} + \frac{\omega^2 \kappa}{8\pi^3 c^2} T_r (1 - e^{-\tau_0}). \quad (1.141)$$

Это основное уравнение радиоастрономии; оно связывает наблюдаемую величину  $I_\omega$  с процессами, происходящими в среде, характеризующейся  $T_r$  и  $\alpha_\omega$ .

Испускание на данной частоте имеет три характерных режима, зависящих от величины  $\tau_0$ .

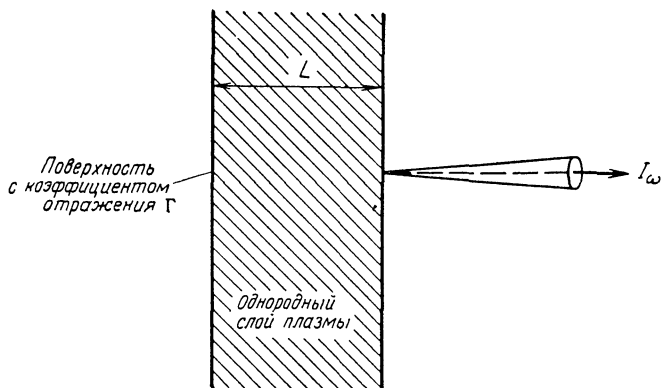
Когда  $\tau_0 \ll 1$ , излучение, видимое наблюдателем, претерпевает пренебрежимо малое самопоглощение при прохождении сквозь среду, и наблюдатель видит по существу вклад от каждого индивидуального элемента объема вдоль луча, т. е.

$$I_\omega = \int j_\omega ds.$$

В этом случае говорят, что среда оптически прозрачна для излучения.

Когда  $\tau_0 \gg 1$ , то  $I_\omega \rightarrow S_\omega$  и интенсивность является непосредственно мерой функции источника. В этом случае говорят, что среда является непрозрачной для излучения. Если в то же время среда находится в термическом равновесии, при котором  $T_r = T$ , где  $T$  — действительная температура излучателей, то говорят, что среда излучает, как черное тело.

Наконец, когда величина  $\tau_0$  не очень мала и не очень велика по сравнению с единицей, говорят, что среда является полупрозрачной (полунепрозрачной или «серой»; однако лучше избегать пользоваться последним термином, так как обычно при этом также подразумевается независимость  $\alpha_\omega$  от частоты).



Фиг. 13. Излучение под прямыми углами от однородного слоя плазмы.

Легко показать с помощью (1.139) или (1.141), что для тела достаточно большой оптической толщины большая часть излучения, видимая внешним наблюдателем, приходит от внешнего слоя толщиной  $\tau \approx 1$ .

Используя (1.137), рассмотрим излучение под прямым углом от однородного плазменного слоя с резкими (отражающими) границами (фиг. 13). Пусть  $\Gamma$  — коэффициент отражения от поверхности; он равен отношению отраженной от границы мощности к падающей. В этом случае мы находим

$$I_{\omega} = \frac{\omega^2}{8\pi^3 c^2} \kappa T_r (1 - \Gamma) \frac{1 - e^{-\alpha_{\omega} L}}{1 - \Gamma e^{-\alpha_{\omega} L}}. \quad (1.142)$$

При выводе (1.142) сделано предположение, что при каждом отражении волны теряется информация о фазе, иначе говоря, мы пренебрегаем взаимной интерференцией между следующими друг за другом отраженными волнами. Такая ситуация могла бы возникнуть при шероховатой границе плазма — вакуум. Когда  $\Gamma \rightarrow 0$ , (1.142) сводится к (1.141). Заметим также, что для оптически толстой плазмы,  $\alpha_{\omega} L \gg 1$ , интенсивность уменьшается в  $(1 - \Gamma)$  раз по сравнению с той, которая была бы при отсутствии отражений. Таким образом, поскольку отражения не могут быть полностью исключены, интенсивность излучения нагретого тела не может достичь полной интенсивности излучения черного тела.

**Уравнение переноса для изменяющихся во времени параметров плазмы.** Теория, которая привела к уравнению (1.133), основана на временной стационарности всех процессов (см. § 4 настоящей главы) и, строго говоря, не допускает изменений во времени пара-

метров среды. Однако как астрономическая, так и лабораторная плазма меняются во времени. Если изменения во времени достаточно медленные, то предыдущий анализ можно еще использовать как некоторое приближение. Уравнение (1.133) должно быть модифицировано следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{I_\omega}{n_r^2} \right) + \frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{I_\omega}{n_r^2} \right) = \frac{j_\omega}{n_r^2} - \alpha_\omega \frac{I_\omega}{n_r^2}, \quad (1.143)$$

где  $I_\omega$ ,  $n_r$ ,  $j_\omega$  и  $\alpha_\omega$  — теперь медленно меняющиеся функции времени, зависящие, кроме того, от положения вдоль луча  $s$ ,  $\omega$  — групповая скорость.

## Закон излучения Кирхгофа

В конце гл. 1 в уравнение переноса были введены две величины — коэффициент испускания  $j_\omega$  и коэффициент поглощения  $\alpha_\omega$ . Каждая из этих величин связана с определенной микроскопической характеристикой излучающих частиц. Кроме того,  $j_\omega$  и  $\alpha_\omega$  связаны между собой соотношением, известным как закон Кирхгофа. Вообще говоря, различные соотношения определены для изотропных сред, находящихся в тепловом равновесии. Однако для плазмы ни то, ни другое обычно не имеет места, и цель настоящей главы — развить представления с учетом указанного факта. Дискуссия проводится в рамках того, что мы можем назвать полуклассической статистической теорией бозе-частиц.

### § 1. Излучение черного тела

Здесь мы рассмотрим излучение, находящееся в тепловом равновесии с материей, причем и излучение и материя имеют общую температуру  $T$ . Температура среды может меняться от точки к точке. В таком случае необходимо, чтобы локальное тепловое равновесие поддерживалось в каждом маленьком элементе объема  $d^3r$ . При этом говорят, что система находится в *локальном термодинамическом равновесии*.

В такой системе число «частиц света» в пространстве волновых векторов  $\mathbf{k}$  и в некоторой точке  $\mathbf{r}$  дается формулой

$$N(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = (e^{h\omega/kT} - 1)^{-1}. \quad (2.1)$$

Она отражает тот факт, что частицы света являются бозе-частицами и подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна. Как электромагнитные колебания (фотоны), так и продольные колебания (*плазмоны*) удовлетворяют формуле (2.1).

Число бозонов  $N(\mathbf{r})$  в единице объема обычного пространства определяется формулой

$$N(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int N(\mathbf{k}, \mathbf{r}) d^3k, \quad (2.2)$$

так как число волн с волновым вектором  $\mathbf{k}$  в элементе объема  $d^3k$  равно  $(d^3k)V/(2\pi)^3$ , где  $V$  — объем. Используя выражение (2.1),

для  $N(\mathbf{k}, \mathbf{r})$  и (1.116) для  $d^3k$ , находим

$$N(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^3} (e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1)^{-1} d\omega \int_{4\pi} k^2 \left| \left( \frac{\partial k}{\partial \omega} \right)_\theta \right| d\Omega_k, \quad (2.3)$$

где  $d\Omega_k$  — элемент телесного угла вокруг направления  $\mathbf{k}$ .

Каждый бозон имеет энергию  $\hbar\omega$ , поэтому, согласно (2.3), для спектральной плотности энергии  $u_\omega$  [см. (1.103)] имеем

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^3} (e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1)^{-1} \int_{4\pi} n^2 \left| \left( \frac{\partial \omega n}{\partial \omega} \right)_\theta \right| d\Omega_k, \quad (2.4)$$

где волновой вектор  $\mathbf{k}$  выражен через показатель преломления  $n$ . Это и есть искомый результат для плотности энергии излучения черного тела в анизотропной среде с дисперсией. В случае вакуума выражение для спектральной плотности энергии, обозначаемой  $u_{0\omega}$ , имеет обычный вид:

$$u_{0\omega} = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} (e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1)^{-1}. \quad (2.5)$$

Используя (2.5), можно записать (2.4) более просто:

$$u_\omega = \frac{u_{0\omega}}{4\pi} \int_{4\pi} n^2 \left| \left( \frac{\partial \omega n}{\partial \omega} \right)_\theta \right| d\Omega_k. \quad (2.6)$$

Этот результат получил Рытов [16] из теории тепловых флуктуаций (см. также § 2 гл. 4). Уравнение (2.6) в случае изотропной среды принимает вид

$$u_\omega = u_{0\omega} n^2 \left| \frac{\partial \omega n}{\partial \omega} \right|, \quad (2.7a)$$

а в случае изотропной среды в отсутствие дисперсии —

$$u_\omega = u_{0\omega} n^3. \quad (2.7b)$$

Теперь легко получить выражение для интенсивности излучения черного тела в среде [интенсивность  $I_\omega$  обозначается  $B(\omega, T)$ ]. Переписав (1.104) в виде

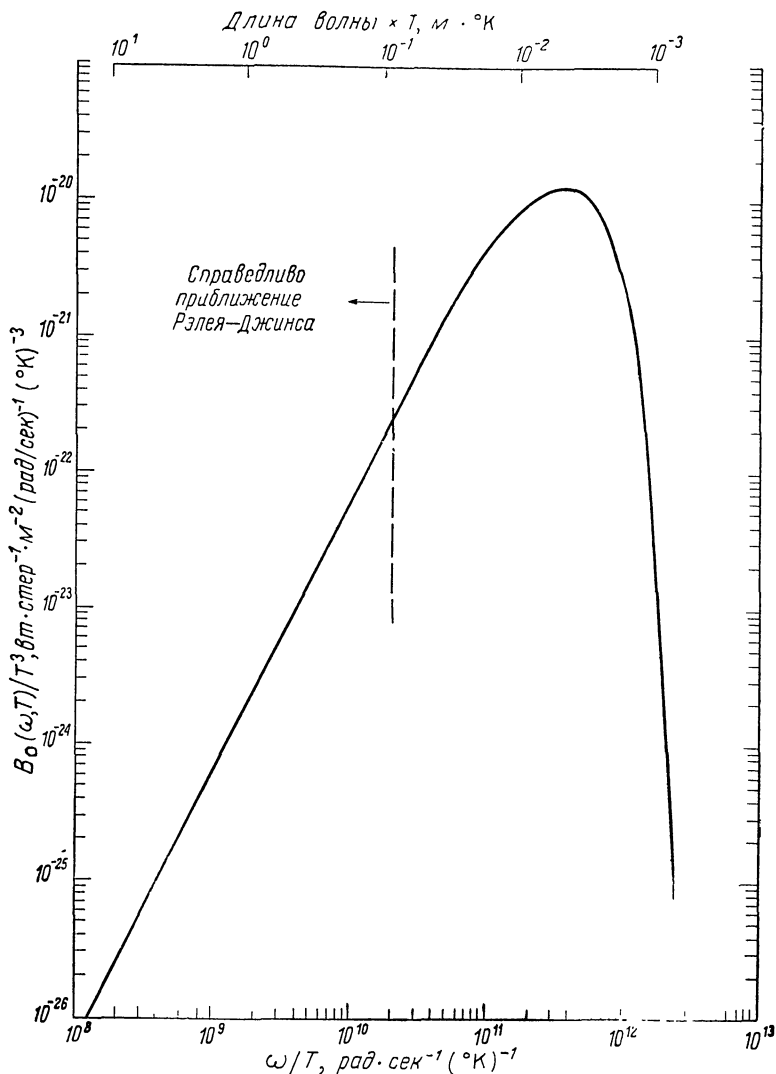
$$u_\omega = \int_{4\pi} \frac{B(\omega, T)}{\omega} \frac{d\Omega}{d\Omega_k} d\Omega_k, \quad (2.8)$$

приравняем это выражение и (2.4), затем, используя (1.62), (1.120) и (1.121), получим

$$B(\omega, T) = n_r^2 \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} (e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1)^{-1}, \quad (2.9)$$

где  $n_r$  — «лучевой показатель преломления» [см. (1.121)]. В случае вакуума выражение (2.9) сводится к формуле Планка для излучения с одной поляризацией [35]:

$$B_0(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} (e^{\hbar\omega/\kappa T} - 1)^{-1}. \quad (2.10)$$



Фиг. 14. Спектр излучения черного тела в вакууме.

Используя (2.10), выразим интенсивность излучения черного тела в среде через функцию Планка:

$$B(\omega, T) = n_r^2 B_0(\omega, T). \quad (2.11)$$

Эта формула уже приводилась в § 6 гл. 1 в связи с интерпретацией  $n_r^2$ . Общую формулу в таком виде для изотропной среды ( $n_r = n$ )

получил Кирхгоф [40, 234] (см. также [37]), но в то время выражение для  $B_0(\omega, T)$  не было известно.

Функция (2.10) приведена на фиг. 14. Частота, при которой интенсивность достигает максимума<sup>1)</sup>, определяется из соотношения:

$$\left(\frac{\hbar\omega}{\kappa T}\right)_{\text{макс}} = 2,822,$$

или

$$\left(\frac{\omega}{T}\right)_{\text{макс}} = 3,69 \times 10^{11} \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1} (\text{°K})^{-1}; \quad (2.12)$$

оно известно как закон смещения Вина [232]. При этой частоте интенсивность [в  $\text{вт} \cdot \text{стер}^{-1} \cdot \text{м}^{-2} (\text{рад}/\text{сек})^{-1}$ ] равна

$$B_0(\omega, T)_{\text{макс}} = 1,51 \times 10^{-20} T^3, \quad (2.13)$$

где  $T$  — температура (в °K).

Длинноволновой конец спектра, характеризуемый прямолинейным участком кривой до пунктирной линии, указанной на фиг. 14, хорошо аппроксимируется выражением

$$B_0(\omega, T) = \frac{\omega^2}{8\pi^3 c^2} \kappa T. \quad (2.14)$$

Этот результат известен как закон Рэлея — Джинса [41, 42] и справедлив в классическом пределе  $\hbar\omega/(\kappa T) \ll 1$ . В связи с этим заметим, что в классическом пределе выражение (2.5) для плотности энергии  $u_{0\omega}$  принимает вид

$$u_{0\omega} = \frac{\omega^2}{2\pi^2 c^3} \kappa T. \quad (2.15)$$

Но

$$\frac{d^3 k}{(2\pi)^3 d\omega} = \frac{\omega^2}{2\pi^2 c^3}$$

— число плоских волн на единицу объема на единичный интервал частоты  $d\omega$ . Отсюда  $\kappa T$  — энергия, приходящаяся на волну, что является следствием принципа равномерного распределения энергии в классической термодинамике.

Из полной энергии  $\kappa T$  на моду  $1/2\kappa T$  приходится на энергию электрического поля и  $1/2\kappa T$  — на энергию магнитного поля. Внутри плазмы полная энергия опять равна  $\kappa T$ , но теперь некоторая доля энергии приходится на движение частиц (см. § 3 гл. 1). Для случая поперечных электромагнитных волн в изотропной плазме,

<sup>1)</sup> Положение максимума зависит от того, определена ли интенсивность  $B_0(\omega, T)$  в интервале частот  $d\omega$  или в интервале длин волн  $d\lambda$ . В первом случае  $\lambda_{\text{макс}} T = 5,1 \times 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{°K}$ , что точно совпадает с соотношением (2.12), выраженным в длинах волн. Во втором случае  $\lambda_{\text{макс}} T = 2,9 \times 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{°K}$ .

диэлектрический коэффициент которой удовлетворяет соотношению

$$K_T = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2,$$

в § 2 гл. 4 будет показано, что полная энергия на моду распределяется следующим образом:  $1/2\kappa T$  приходится на энергию электрического поля,  $1/2\kappa T[1 - (\omega_p/\omega)^2]$  — на энергию магнитного поля и  $1/2\kappa T(\omega_p/\omega)^2$  — на кинетическую энергию частиц.

**Два примера.** Рассмотрим поперечную электромагнитную моду колебания в изотропной плазме. В этом случае решение дисперсионного уравнения будет иметь вид (1.23), причем  $K$  определяется выражением (1.22). Подставляя в (2.7) и (2.11), получаем

$$\left. \begin{aligned} u_\omega &= u_{0\omega} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \\ B(\omega, T) &= B_0(\omega, T) \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \end{aligned} \right\} \text{электромагнитная мода.} \quad (2.16)$$

Заметим, что при  $\omega < \omega_p$  нет излучения, связанного с этой модой. Причина такова — теория применима только к плазме с малой диссипацией; в этом пределе  $k$  является чисто мнимым и на соответствующих частотах нет излучения (см. § 7 гл. 1). На практике всегда имеется некоторое излучение при  $\omega < \omega_p$  (см. § 3 гл. 3).

Теперь рассмотрим продольную моду колебания, для которой дисперсионное соотношение определяется (1.35). При  $\omega \approx \omega_p$  находим

$$\left. \begin{aligned} u_\omega &= u_{0\omega} \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(\frac{c}{v_0}\right)^3 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \\ B(\omega, T) &= \frac{1}{3} B_0(\omega, T) \left(\frac{c}{v_0}\right)^2 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \end{aligned} \right\} \text{продольная мода,} \quad (2.17)$$

где  $v_0^2 = \kappa T/m$ . Видно, что плотность энергии продольной моды примерно в  $(c/v_0)^3$  раз больше, чем поперечной моды. Однако это справедливо только на частотах вблизи  $\omega_p$ ; на других частотах продольная мода сильно подавлена вследствие затухания Ландау (см. § 5 гл. 4) и плотность энергии не достигает уровня (2.17).

## § 2. Коэффициенты Эйнштейна для спонтанного и индуцированного испускания и поглощения

Эйнштейн показал [43], что могут иметь место три типа радиационных процессов, при которых фотон (или, в более общем случае, бозон) с энергией  $\hbar\omega$  и импульсом  $\hbar k$  может быть испущен или поглощен. Такие процессы называются спонтанным и инду-



цированным испусканием и поглощением. В результате этих процессов частица, участвующая в реакции, переходит из состояния с энергией  $\epsilon'$  и импульсом  $\mathbf{p}'$  в другое состояние с большими или меньшими энергией  $\epsilon$  и импульсом  $\mathbf{p}$ . (Результат, полученный в этой главе, применим также к частицам с релятивистской энергией:  $\epsilon$  — релятивистская энергия и  $\mathbf{p}$  — импульс; см. § 1 гл. 1.)

Электроны плазмы — наиболее подвижные из составляющих ее частиц, поэтому они являются главным источником излучения. В точке  $\mathbf{r}$  плазмы плотность электронов с импульсом  $\mathbf{p}$  в объеме пространства импульсов  $d^3p$  равна

$$dN(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d^3p, \quad (2.18)$$

и аналогично для электронов с импульсом  $\mathbf{p}'$ . В системах, стационарных во времени, функция распределения  $f$  не зависит явно от времени.

Определим теперь параметры испускания и поглощения в заданном направлении луча  $\mathbf{s}$  (см. § 7 гл. 1 и фиг. 8), связанные со скоростью, с которой происходят упомянутые три процесса.

Пусть  $\eta_\omega(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$  — дифференциальная скорость спонтанного испускания энергии одним электроном с импульсом между  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}' + d\mathbf{p}'$  на единицу телесного угла, на интервал частот  $d\omega$  (после испускания электрон переходит в состояние  $\mathbf{p}$ ). Тогда скорость испускания  $dN(\mathbf{p}')$  электронами на единицу объема равна

$$\eta_\omega(\mathbf{p}', \mathbf{r}, \mathbf{s}) f(\mathbf{p}', \mathbf{r}) d^3p'. \quad (2.19)$$

Коэффициент испускания, определенный в § 7 гл. 1, приобретает теперь вид

$$j_\omega = \int \eta_\omega(\mathbf{p}') \dot{f}(\mathbf{p}') d^3p', \quad (2.20)$$

где для сокращения записи опущены векторы ( $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{s}$ ). Спонтанное излучение в плазме обусловлено рядом процессов, которым посвящены последующие главы.

Индукированное испускание обусловлено фотоном, который заставляет соседний электрон испускать другой фотон той же самой частоты. Классическим аналогом такого процесса является прохождение волны через осциллятор. Осциллятор может поглотить часть энергии волны или при подходящем фазовом соотношении он может отдать волне часть своей кинетической энергии. Скорость индуцированного излучения пропорциональна числу фотонов, следовательно, пропорциональна  $I_\omega$ .

Пусть  $\eta(\mathbf{p}', \mathbf{r}, \mathbf{s})$  — дифференциальная скорость испускания энергии электроном с импульсом  $\mathbf{p}'$  на единицу интенсивности присутствующего излучения, на единицу телесного угла, на единичный интервал частот. Тогда полная скорость испускания  $dN(\mathbf{p}')$  электронами на единицу объема равна

$$\eta_{\omega\mathbf{s}}(\mathbf{p}', \mathbf{r}, \mathbf{s}) I_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{s}) f(\mathbf{p}', \mathbf{r}) d^3p'. \quad (2.21)$$

Коэффициент  $\alpha_{\omega S}$  индуцированного испускания можно теперь разделить следующим образом:

$$\alpha_{\omega S} = \int \eta_{\omega S}(\mathbf{p}') f(\mathbf{p}') d^3 p'. \quad (2.22)$$

Наконец, электрон из низшего состояния с импульсом  $\mathbf{p}$  после поглощения фотона с энергией  $\hbar\omega$  и импульсом  $\hbar\mathbf{k}$  может перейти в состояние с импульсом  $\mathbf{p}'$ . Пусть  $\eta_{\omega A}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$  — скорость поглощения на единицу интенсивности присутствующего излучения. Полная скорость поглощения на единицу объема равна

$$\eta_{\omega A}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{s}) I_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d^3 p, \quad (2.23)$$

а соответствующий коэффициент поглощения определяется по формуле

$$\alpha_{\omega A} = \int \eta_{\omega A}(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) d^3 p. \quad (2.24)$$

Иногда его называют *индуцированным поглощением*. Однако это не такое поглощение, которое наблюдатель мог бы измерить соответствующими приборами; измерить можно лишь разность между (2.24) и (2.22). Поэтому для коэффициента  $\alpha_{\omega}$ , определенного в § 7 гл. 1, имеем

$$\alpha_{\omega} = \int \eta_{\omega A}(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) d^3 p - \int \eta_{\omega S}(\mathbf{p}') f(\mathbf{p}') d^3 p'. \quad (2.25)$$

Формулы (2.20) и (2.25) позволяют интерпретировать феноменологические величины  $j_{\omega}$  и  $\alpha_{\omega}$ . Необходимо отметить, что мы неявно предполагали: свободный электрон после процесса испускания или поглощения остается в свободном состоянии. Такие свободно-свободные переходы — единственные, которые изучаются в этой книге.

**Соотношения между дифференциальными скоростями  $\eta_{\omega}$ ,  $\eta_{\omega S}$  и  $\eta_{\omega A}$ .** Допустим, что электроны излучают независимо друг от друга, тогда дифференциальные скорости являются функциями импульса и положения данного электрона, но не зависят от функций распределения по пространству или по скоростям соседних электронов. Другими словами, плазма должна быть достаточно разреженной, чтобы можно было пренебречь коллективными эффектами многих тел. Например, если этим руководствоваться, то нельзя описать распространение продольных волн. Во многих проблемах можно пренебречь коллективными эффектами, но во многих нельзя. В последнем случае мы должны вернуться к более полной теории (см. гл. 4, 5 и 7).

Для установления соотношений между тремя скоростями мы можем выбрать теперь любое состояние плазмы. Поместим плазму в адиабатическую оболочку при постоянной температуре  $T$  и до-

пустим, что она находится в термодинамическом равновесии с контейнером. Многие физические свойства плазмы в этом состоянии известны. Напомним некоторые из них.

Электроны находятся в хаотическом состоянии и имеют максвелловское распределение по скоростям; функция распределения в нерелятивистском случае записывается в виде

$$f(v) = N \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT}, \quad (2.26)$$

а в релятивистском случае как

$$f(p) = N \frac{e^{-\varepsilon/kT}}{4\pi (kT) (m_0^2 c) K_2(m_0 c^2/kT)},$$

где  $K_2(x)$  — модифицированная функция Ханкеля второго порядка. Интенсивность излучения

$$I_\omega = B(\omega, T) = n_r^2 B_0(\omega, T)$$

такая же, как у черного тела (см. § 1 настоящей главы).

Для каждой пары состояний с импульсами  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}$  скорость переходов  $\mathbf{p}' \rightarrow \mathbf{p}$ , при которых происходит испускание, точно равна скорости переходов  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'$ , при которых имеет место поглощение. Это — принцип детального равновесия.

Используя эти свойства и выражения (2.19), (2.21) и (2.23), находим

$$\begin{aligned} \eta_\omega(\mathbf{p}') e^{-\varepsilon'/kT} d^3 p' &= \\ &= B(\omega, T) [\eta_{\omega A}(\mathbf{p}) e^{-\varepsilon/kT} d^3 p - \eta_{\omega S}(\mathbf{p}') e^{-\varepsilon'/kT} d^3 p'], \end{aligned} \quad (2.27)$$

отсюда с помощью уравнения сохранения энергии,

$$\varepsilon' - \varepsilon = \hbar\omega, \quad (2.28)$$

получаем

$$B(\omega, T) = \frac{\eta_\omega(\mathbf{p}')/\eta_{\omega S}(\mathbf{p}')}{[\eta_{\omega A}(\mathbf{p}) d^3 p / \eta_{\omega S}(\mathbf{p}') d^3 p'] e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (2.29)$$

Подставляя вместо величины  $B(\omega, T)$  соответствующее ей значение (2.9) и замечая, что найденное соотношение должно быть справедливо при всех частотах, для каждой характеристической моды колебания, которая может существовать в плазме, имеем

$$\begin{aligned} \eta_\omega(\mathbf{p}') &= n_r^2 \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} \eta_{\omega S}(\mathbf{p}'), \\ \eta_{\omega A}(\mathbf{p}) d^3 p &= \eta_{\omega S}(\mathbf{p}') d^3 p'. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Эти соотношения аналогичны соотношениям между коэффициентами Эйнштейна  $A_{21}$ ,  $B_{21}$  и  $B_{12}$  (которые можно сопоставить коэффициентам  $\eta_\omega$ ,  $\eta_{\omega S}$  и  $\eta_{\omega A}$  соответственно). Однако Эйнштейн [43]

не интересовался анизотропной преломляющей средой и поэтому в его работе не появились множители типа  $n_r$ . Заметим, что эти соотношения не зависят от конкретного вида функции распределения  $f(\mathbf{p})$ , и в этом смысле они являются совершенно общими. Величины  $d^3p$  и  $d^3p'$  могут рассматриваться как статистические веса уровней  $p$  и  $p'$  и в общем случае они не равны друг другу.

Чтобы лучше понять смысл соотношений (2.30), следует рассмотреть вероятности переходов (в единицу времени) для спонтанного и индуцированного испускания и поглощения соответственно (см. [44, 45]), а именно

$$\frac{2\pi}{\hbar} |H_{mn}|^2 \rho, \quad \frac{2\pi}{\hbar} |H_{mn}|^2 N_k \rho, \quad \frac{2\pi}{\hbar} |H_{nm}|^2 N_k \rho. \quad (2.31)$$

Здесь  $|H|^2$  — квадрат модуля матричных элементов для перехода,  $N_k$  — число фотонов, первоначально находившихся в рассматриваемом дискретном состоянии;  $\rho(E)$  — плотность дискретных состояний на единицу энергии, а  $\rho(E)dE_k$  — число таких дискретных состояний в диапазоне энергии  $dE_k$ .

Множители, входящие помимо  $|H|^2$  в величины (2.31), можно теперь выразить через число плоских волн  $d^3k/(2\pi)^3$  в интервале частот  $d\omega$ . Используя эти результаты и материал § 1 гл. 2, находим

$$\begin{aligned} \eta_\omega(\mathbf{p}') &= a \frac{n_r^2}{\omega} \frac{\hbar \omega^3}{(2\pi)^3 c^2} |H_{mn}|^2 d^3p, \\ \eta_{\omega S}(\mathbf{p}') &= a \frac{1}{\omega} |H_{mn}|^2 d^3p, \\ \eta_{\omega A}(\mathbf{p}) &= a \frac{1}{\omega} |H_{nm}|^2 d^3p', \end{aligned} \quad (2.32)$$

где  $a$  — размерный коэффициент,  $\omega$  — групповая скорость,  $H_{mn}$  — эрмитова матрица,  $|H_{mn}|^2 = |H_{nm}|^2$ .

Отсюда прямо следует, что, комбинируя соотношения (2.32), мы приходим к соотношениям (2.30).

Величины  $n_r$  и  $\omega$  в правой части (2.32) можно рассматривать как дисперсионные характеристики среды. Однако эти характеристики выявляются только частично, поскольку квадрат модуля  $|H|^2$  сам является функцией  $n$  и  $\omega$ . Зависимость  $|H|^2$  от этих величин легко найти для поперечных электромагнитных волн в изотропной плазме. Для классического гамильтониана квадрат модуля  $|H|^2$  пропорционален  $1/2\epsilon_0 |\mathbf{E}|^{2n}(c/\omega)$  [последнее выражение получено в тексте, непосредственно следующем за формулой (1.49)]. Электрическое поле  $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$  является фурье-компонентой поля, генерируемого движущимися частицами, и определяется волновым уравнением

$$\left[ -k^2 + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 K_T(\mathbf{k}, \omega) \right] \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = j\omega\mu_0 \mathbf{J}_s(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.33)$$

Этот результат заимствован из гл. 4 [см. (4.59)]. Здесь  $K_T$  — диэлектрический коэффициент для поперечных волн,  $\mathbf{J}_s$  — источник тока. Решая уравнение (2.33), получаем

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \sim \mathbf{J}_s(\mathbf{k}, \omega) \frac{1}{n} \left( \frac{\omega}{c} \right). \quad (2.34)^1$$

Отсюда видно, что

$$|H|^2 \sim |\mathbf{J}_s|^2 \left( \frac{\omega}{n} \right)$$

и коэффициенты  $\eta_\omega$ ,  $\eta_{\omega S}$ ,  $\eta_{\omega A}$ , характеризующие дисперсионные свойства изотропной среды, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta_\omega &\sim n |\mathbf{J}_s|^2, \\ \eta_{\omega S} &\sim \frac{1}{n} |\mathbf{J}_s|^2, \\ \eta_{\omega A} &\sim \frac{1}{n} |\mathbf{J}_s|^2, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где с хорошим приближением  $n = \sqrt{1 - (\omega_p^2/\omega^2)}$ . Другой вывод этих соотношений дали Смерд и Вестфолд [38].

Множители  $n$  и  $1/n$  будут неоднократно появляться в последующих формулах для излучения. Такая зависимость от  $n$  приводит к особенностям в спектре излучения на частотах  $\omega \approx \omega_p$ . На этих частотах групповая скорость  $\omega$  очень мала, в результате чего происходит  $(1/n)$ -кратное увеличение  $\eta_{\omega S}$  и  $\eta_{\omega A}$  (заметим, что  $\omega/c = d\omega/c dk = [1 - (\omega_p^2/\omega^2)]^{1/2} = n$ ). Отметим также, что, согласно этой теории, на частотах ниже плазменных испускания нет (см., однако, § 3 гл. 3 и § 3 гл. 4).

### § 3. Функция источника и закон Кирхгофа

Выражения (2.20) и (2.25) для коэффициентов испускания и поглощения могут быть упрощены, поскольку любые две из трех дифференциальных скоростей можно исключить с помощью (2.30). Выражая результаты через скорость спонтанного испускания  $\eta_\omega$

<sup>1)</sup> Диэлектрический коэффициент  $K_T$  является комплексным. При очень малом затухании ( $\text{Im } K_T \rightarrow 0$ ) в частотном спектре  $\mathbf{E}$  появляется на частоте  $\omega = \omega_0$ , определяемой дисперсионным соотношением  $\omega_0^2 K_T(\omega_0, \mathbf{k}) = k^2 c^2$ , острый резонанс, соответствующий виртуальным незатухающим волнам. Представляя величину, стоящую в квадратных скобках в формуле (2.33), в виде ряда по  $(\omega - \omega_0)$ , в наинижем порядке по  $(\omega - \omega_0)$  получаем

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega_0) = jc^2 \omega_0 \frac{\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega_0)}{(\omega - \omega_0) \left[ \frac{\partial \omega^2 K_T}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0}},$$

откуда непосредственно следует (2.34).

(эту величину часто легче рассчитать или измерить, чем другие скорости), находим

$$\begin{aligned} j_{\omega} &= \int \eta_{\omega}(\mathbf{p}') f(\mathbf{p}') d^3 p', \\ \alpha_{\omega} &= \frac{8\pi^3 c^2}{n_r^2 \hbar \omega^3} \int \eta_{\omega}(\mathbf{p}') [f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p}')] d^3 p'. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Функция источника, определяемая формулой (1.134), принимает тогда вид

$$S_{\omega} \equiv \frac{j_{\omega}}{n_r^2 \alpha_{\omega}} = \frac{\hbar \omega^3}{8\pi^3 c^2} \frac{\int \eta_{\omega}(\mathbf{p}') f(\mathbf{p}') d^3 p'}{\int \eta_{\omega}(\mathbf{p}') [f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p}')] d^3 p'}. \quad (2.37)$$

Соотношение (2.37) можно рассматривать как закон Кирхгофа для анизотропной неравновесной плазмы. Для максвелловского распределения частиц легко показать, что функция источника равна интенсивности излучения черного тела  $B_0(\omega, T)$  в вакууме, т. е.

$$\frac{j_{\omega}}{n_r^2 \alpha_{\omega}} = B_0(\omega, T), \quad (2.38)$$

где  $T$  — температура излучающих электронов. Заметим, что энергия других сортов частиц плазмы не входит в (2.38), и насколько мы знаем, их распределение по скоростям может быть совсем не максвелловским, а их средняя энергия может отличаться от значения  $3\kappa T/2$ .

Справедливость формулы (2.38) была подтверждена в работе [46], где излагалась теория флуктуаций, и в работе [47], где исследовался специальный случай циклотронного излучения. Для очень разреженной среды, для которой  $n_r \rightarrow 1$ , формула (2.38) сводится к выражению, которое принято рассматривать как классическую форму закона Кирхгофа.

По аналогии с излучением черного тела в вакууме напишем

$$S_{\omega} = \left( \frac{\hbar \omega^3}{8\pi^3 c^2} \right) \left[ \exp \left( \frac{\hbar \omega}{\kappa T_r} \right) - 1 \right]^{-1},$$

где температура излучения  $T_r$  теперь играет роль истинной температуры  $T$  равновесного излучения. Приравняв это выражение к (2.37), определим  $T_r$ :

$$\kappa T_r = \hbar \omega \left[ \ln \frac{\int \eta_{\omega}(\mathbf{p}') f(\mathbf{p}) d^3 p'}{\int \eta_{\omega}(\mathbf{p}') f(\mathbf{p}') d^3 p'} \right]^{-1} = \hbar \omega \left( \ln \frac{\alpha_{\omega A}}{\alpha_{\omega S}} \right)^{-1}, \quad (2.39)$$

где  $\alpha_{\omega S}$  и  $\alpha_{\omega A}$  — коэффициенты индуцированного испускания и поглощения, определяемые формулами (2.22) и (2.24) соответ-

венно;  $T_r$  — фиктивная температура, зависящая от процессов испускания, распределения частиц, частоты, на которой проводятся наблюдения, и направления рассматриваемого луча. На низких частотах эта величина непосредственно измеряется и, таким образом, позволяет сделать заключение о некоторых свойствах плазмы. Более детальное обсуждение температуры  $T_r$  будет проведено в конце данного параграфа. Пока хотелось бы вкратце исследовать соотношение между величинами  $\alpha_{\omega A}$  и  $\alpha_{\omega S}$ .

Рассмотрим максвелловскую функцию распределения  $f(\mathbf{p})$ . Тогда легко показать, что

$$\alpha_{\omega S} = \alpha_{\omega A} e^{-\hbar\omega/\kappa T}, \quad (2.40)$$

и полный коэффициент поглощения равен

$$\alpha_{\omega} = \alpha_{\omega A} - \alpha_{\omega S} = \alpha_{\omega A} (1 - e^{-\hbar\omega/\kappa T}). \quad (2.41)$$

На высоких частотах,  $\hbar\omega/\kappa T > 1$ , вклад индуцированного испускания является относительно небольшим. Однако в классическом пределе,  $\hbar\omega/\kappa T \ll 1$ , коэффициент  $\alpha_{\omega S}$  приближается (но никогда не превышает) к коэффициенту  $\alpha_{\omega A}$ . Более того, на этих частотах скорость индуцированного испускания часто превышает скорость спонтанного испускания. На основании (2.30) для отношения этих двух скоростей (при  $n_r \rightarrow 1$ ) имеем

$$R \equiv \frac{\text{Скорость индуцированного испускания}}{\text{Скорость спонтанного испускания}} = I_{\omega} \frac{8\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3}. \quad (2.42)$$

Предполагая, что интенсивность испускания  $I_{\omega}$  равна интенсивности испускания черного тела  $B_0(\omega, T)$ , умноженной на  $z$  ( $z < 1$ ), находим

$$R = z \left( \frac{\kappa T}{\hbar\omega} \right).$$

Например, на частоте  $\omega = 10^{10} \text{ рад} \cdot \text{сек}^{-1}$  и при  $T = 10^5 \text{ }^\circ \text{K}$ ,  $R \approx 10^5 z$ .

В случае когда функция  $f$  нематвелловская, конечно, нет причин, по которым коэффициент  $\alpha_{\omega S}$  не может превысить коэффициент  $\alpha_{\omega A}$ . В самом деле, это довольно обычное явление в плазме. В таких ситуациях  $\alpha_{\omega}$  является отрицательной величиной ( $T_r$  — отрицательная величина) и излучение усиливается по мере прохождения расстояния в среде (возможно, оно растет также во времени). Тогда система является неустойчивой. Эта проблема затронута в гл. 9, где обсуждаются налагаемые на функцию  $f$  условия, при которых развивается неустойчивость. В литературе, посвященной этому вопросу, во предпологалось, что функция  $f$  должна удовлетворять определенным условиям, чтобы сохранялась. Это было необходимо, так как из линейной теории излучения вытекает, что амплитуды волн в неустойчивой плазме нарастают беспредельно и что система никогда не достигает

стационарного состояния. В действительности данная система насыщается из-за нелинейных взаимодействий, но в настоящее время нет удовлетворительной нелинейной теории излучения.

**Классический предел**  $j_\omega$ ,  $\alpha_\omega$  и  $S_\omega$ . В данной книге рассматривается главным образом классический диапазон частот:  $\hbar\omega$  значительно меньше энергии частиц; обсудим в этом пределе написанные выше соотношения. Для начала исследуем случай, когда функция распределения  $f$  изотропна, т. е. она зависит только от  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ .

При низкой частоте уровни энергии частицы расположены близко. Полагая  $p' = p + \Delta p$  и используя (1.12) и (2.28), находим

$$\Delta p = \frac{e \Delta \varepsilon}{c^2 p} = \frac{\hbar \omega e}{c^2 p}. \quad (2.43)$$

Если разложить функцию  $f(p') = f(p + \Delta p)$  в ряд Тейлора и удержать два члена, то получим

$$f(p') = f(p) + \hbar \omega \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}. \quad (2.44)$$

Подставив (2.44) в (2.36) и (2.37), найдем искомые уравнения:

$$j_\omega = \int \eta_\omega(\mathbf{p}) f(p) d^3 p, \quad (2.45)$$

$$\alpha_\omega = - \frac{8\pi^3 c^2}{n_r^2 \omega^2} \int \eta_\omega(\mathbf{p}) \frac{\partial f(p)}{\partial \varepsilon} d^3 p. \quad (2.46)$$

Эти уравнения были выведены Трубниковым [48] для  $n_r = 1$  и использованы им для изучения циклотронного излучения от таких горячих электронов, которые должны быть в термоядерных реакторах синтеза (см. § 4 гл. 6). Из определения  $S_\omega$  и  $T_r$  [см. (1.134) и (1.140)] также получим

$$\kappa T_r = - \frac{\int \eta_\omega(\mathbf{p}) f(p) d^3 p}{\int \eta_\omega(\mathbf{p}) (\partial f(p)/\partial \varepsilon) d^3 p}, \quad (2.47)$$

$$S_\omega = \frac{\omega^2}{8\pi^3 c^2} \kappa T_r.$$

Последние четыре уравнения и уравнение переноса (1.133) совместно определяют поле излучения вдоль произвольного луча  $\mathbf{s}$  для процесса испускания, характеризуемого величиной  $\eta_\omega(\mathbf{p}, \mathbf{s})$  и функцией распределения частиц  $f(p)$  (разумеется, при допущении, сделанном в § 2 настоящей главы относительно статистической независимости испускающих частиц).

Разность между поглощением и индуцированным испусканием, входящая явно в формулу (2.36) квантовой теории, исчезает

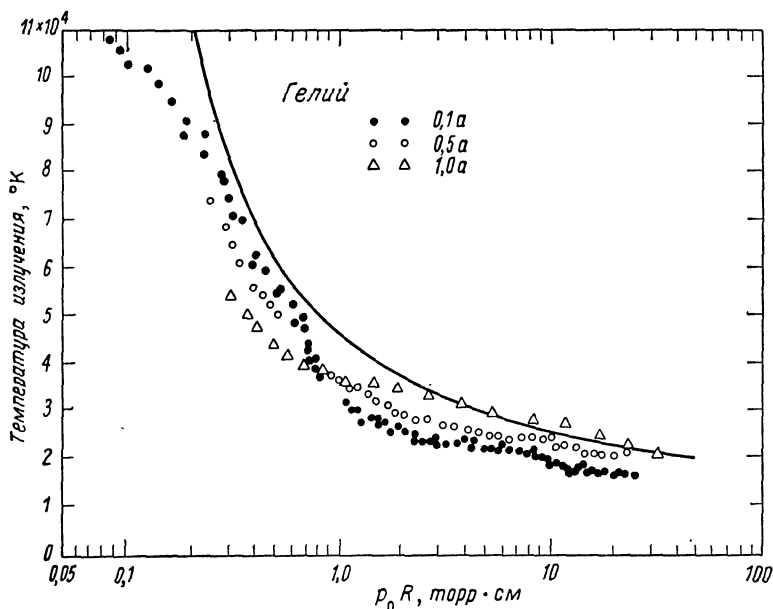


в классическом пределе (2.46). Все, что напоминает нам о существовании ее, содержится в производной

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \sim \left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right) \frac{\partial f}{\partial \rho}.$$

Примечательно, что расчеты коэффициента  $\alpha_{\omega}$  на основе классического уравнения Больцмана (см. § 3 гл. 3, § 5 гл. 4 и § 4 гл. 5) приводят к точно такой же зависимости  $\alpha_{\omega}$  от производной  $\partial f/\partial \rho$  (или  $\partial f/\partial \varepsilon$ ).

Когда функция распределения  $f$  максвелловская, величина  $T_r$  равна температуре электронов  $T$ , а  $S_{\omega}$  является пределом Рэлея — Джинса для функции Планка. Поэтому, измеряя интенсивность испускания плазмы, можно определить электронную температуру, не возмущая среду измерительным инструментом. Это очень

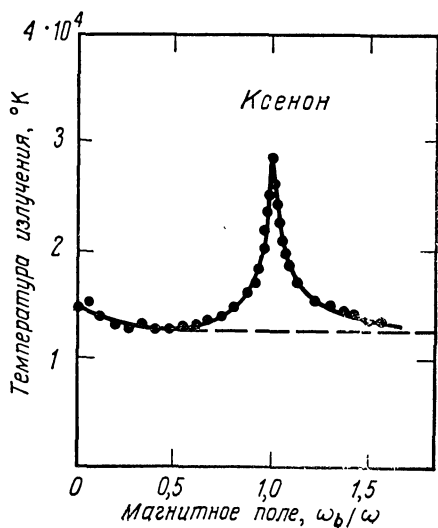
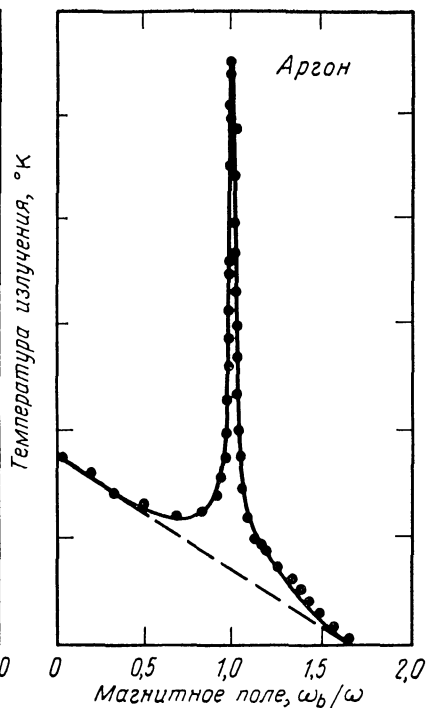
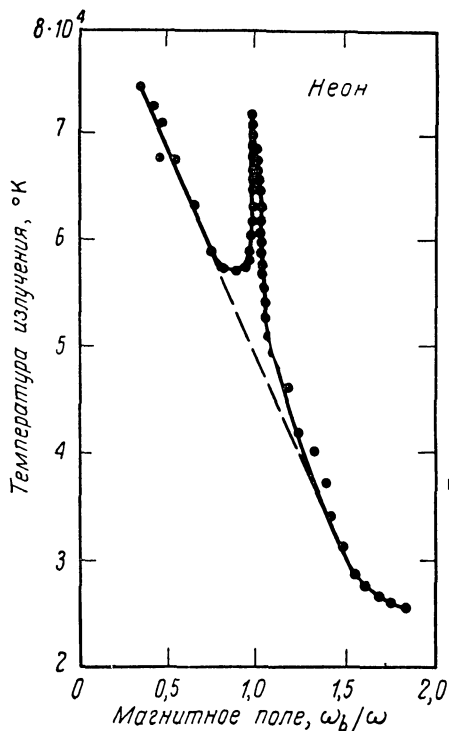


Фиг. 15. Зависимость температуры излучения от давления газа  $p_0$  в положительном столбе цилиндрического разряда радиусом  $R = 1,25$  см (из работы Бекефи и Брауна [65]).

Сплошная линия — электронная температура  $T$ , рассчитанная Энгелем и Штейнбеком [60]. На основании их приближенной теории  $T$  не зависит от тока разряда.

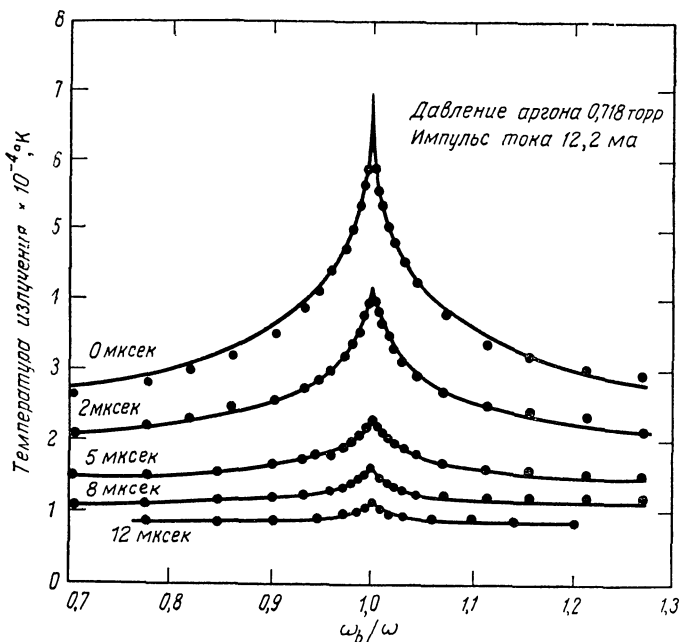
распространенный метод<sup>1)</sup> и технические детали его можно найти в гл. 10. В качестве примера на фиг. 15 показаны результаты

<sup>1)</sup> Первые исследования были выполнены рядом авторов; наиболее известными из них являются работы [49—54].



Фиг. 16. Зависимость температуры излучения от магнитного поля в положительном столбе стационарного разряда в неоне и аргоне (ток 10 ма, давление газа 0,28 торр), и ксеноне (ток 20 ма, давление газа 5,9 торр) (из работы Филдса, Бекефи и Брауна [58]).

Высота и форма пика на электронной циклотронной частоте являются мерой отклонения распределения электронов по скоростям от максвелловского. Непрерывный фон служит мерой средней энергии электронов. Наклон этого фона показывает, что средняя энергия уменьшается с ростом аксиального магнитного поля.



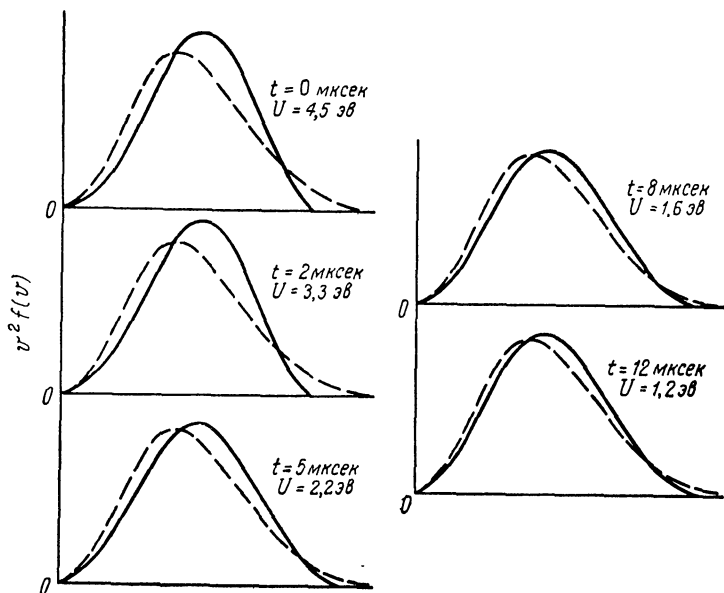
Ф и г. 17а. Зависимость температуры излучения от  $\omega_b/\omega$  для различных моментов времени послесвечения импульсного разряда (из работы Райта и Бекефи [59]). Время  $t=0$  соответствует моменту окончания разрядного импульса. По мере увеличения времени плазма остывает, а функция распределения релаксирует к максвелловской. Сплошные линии — результат расчета по формуле (2.47) при выборе такой функции распределения  $f(v)$ , которая дает наилучшее согласие с экспериментом. Испускательная способность  $\eta_\omega$ , использованная в формуле, определяется [см. (6.24)] выражением

$$\eta_\omega \sim \frac{v_\perp^2 v(v)}{(\omega - \omega_b)^2 + [v(v)]^2}.$$

Зависящая от скорости частота соударений  $\nu(v)$  получена из независимых измерений (см. работу Брауна [66]).

измерений, проведенных для цилиндрического столба плазмы на частоте 3000 Мгц. Плазма создавалась постоянным током, протекающим в гелии, и наблюдалось излучение, испускаемое положительным столбом. Найденная температура находится в хорошем согласии с результатами независимых измерений при помощи зонда Ленгмюра<sup>1)</sup>. Несоответствия частично возникают из-за возмущений, вносимых зондом Ленгмюра, и частично из-за того, что не совсем справедливо предположение о максвелловском распределении при интерпретации экспериментов по излучению. Действительно, из (2.47) видно, что, измеряя  $T_r$ , можно получить некото-

<sup>1)</sup> Хороший обзор зондовой методики имеется в работах [55, 56].



Фиг. 176. Временные эволюции функции распределения и средней энергии электронов, рассчитанные по экспериментальным результатам, приведенным на фиг. 17а (из работы Райта и Бекефи [59]).

В момент времени  $t=0$  функция распределения близка к распределению Дройвестейна. Абсцисса каждой кривой пропорциональна скорости частицы. Пунктирная кривая — максвелловское распределение (приведено для сравнения), нормированное к экспериментально определенной средней кинетической энергии  $U$ .

рую информацию о функции  $f(p)$ , если известен коэффициент  $\eta_\omega$ , или о коэффициенте  $\eta_\omega$ , если известна функция  $f(v)$ .

Когда для изучения функции  $f(p)$  используется (2.47), то необходимо знать зависимость  $\eta_\omega$  от скорости и углов. Эта зависимость достаточно хорошо известна для разреженной плазмы ( $n \rightarrow 1$ ), аналогичной уже однажды упомянутой (см. гл. 3 и 6), так что измеряя  $T_r$  в достаточно большом диапазоне частот и обращая формулу (2.47), получим хорошую оценку  $f$  как функции от  $v$ . Анализ уравнения показывает, что легче найти значение  $f$ , если измерения проводятся на частоте  $\omega$  в окрестности одного из резонансов  $\eta_\omega$ , характерных для плазменной среды. На фиг. 16 показаны результаты измерений температуры излучения (вблизи электронной циклотронной частоты) от положительного столба тлеющего разряда в статическом аксиальном магнитном поле. Пик  $T_r$  при  $\omega = \omega_b$  указывает на то, что функция распределения  $f$  — немасвелловская. (Детальная теория приведена в работе [57], дальнейшие экспериментальные результаты — в работе [58].)

Изменение функции  $f$  во времени можно исследовать, наблюдая скорость, с которой пик  $T_r$  постепенно переходит в плоский непрерывный фон после того как выключен энергетический источник питания плазмы. Результат такого эксперимента приведен на фиг. 17а. Здесь плазма повторно создается и распадается и спектр  $T_r$  измеряется в различные моменты времени послесвечения. Видно, что при использованном разряде пик исчезает примерно за 20 мксек. Такие эксперименты могут служить базой для изучения механизмов, приводящих к релаксации распределения электронов плазмы к максвелловскому распределению [59].

Заметим также, что на фиг. 17а уровень непрерывного фона уменьшается во времени. Это служит мерой времени релаксации средней энергии до энергии, соответствующей температуре «холодного резервуара» атомов и ионов. Обратим внимание, что процесс «максвеллизации» распределения электронов обычно отличается от процессов, вызывающих релаксацию к температуре холодного резервуара. В первом случае наиболее существенным является взаимодействие электронов друг с другом, во втором случае — взаимодействие электронов с другими сортами частиц плазмы.

На фиг. 17б показана временная эволюция функции распределения, соответствующая результатам, приведенным на фиг. 17а. Форма и изменение во времени функции  $f(v)$  получены из (2.47) путем такого ее подбора, который давал бы наилучшее согласие с экспериментальными точками.

**Анизотропное распределение скоростей.** При выводе формул (2.45) — (2.47) требовалось использовать только уравнения сохранения энергии (2.28). Когда функция распределения является анизотропной, необходимо использовать также уравнения сохранения импульса. С иллюстративной целью рассмотрим случай излучения бесстолкновительной плазмы, для которой легко написать уравнения сохранения импульсов. Таким частным случаем будет циклотронное излучение в отсутствие столкновений (см. гл. 6).

Пусть  $f(p_{\parallel}, p_{\perp})$  — функция распределения частиц по импульсам, где  $p_{\parallel}$  и  $p_{\perp}$  — компоненты  $\mathbf{p}$  вдоль и перпендикулярно направлению магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  соответственно. Предположим, для простоты, что функция  $f$  является симметричной относительно направления  $\mathbf{B}_0$ , т. е. функция  $f$  не зависит от азимутального угла.

Разлагая  $f$ , как и раньше, в ряд Тейлора, получаем

$$f(p'_{\parallel}, p'_{\perp}) = f(p_{\parallel}, p_{\perp}) + \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} \Delta p_{\parallel} + \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} \Delta p_{\perp}. \quad (2.48)$$

Для определения  $\Delta p_{\parallel}$  и  $\Delta p_{\perp}$  необходимо использовать уравнение сохранения энергии

$$\epsilon' - \epsilon = \hbar\omega, \quad (2.49)$$

и уравнение сохранения импульсов для  $p_{\parallel}$

$$p'_{\parallel} - p_{\parallel} = n(\theta) \cos \theta \frac{\hbar \omega}{c}, \quad (2.50)$$

где  $n(\theta)$  — показатель преломления,  $\theta$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и осью симметрии, совпадающей с  $\mathbf{V}_0$ . Заметим, что импульс, перпендикулярный  $\mathbf{V}_0$  у системы электрон — фотон, не сохраняется, так как в этом направлении магнитное поле передает импульс частице. В самом деле, как легко видеть из (2.49) и (2.50), компоненты  $p'_{\perp}$  и  $p_{\perp}$  связаны соотношением

$$(p'_{\perp})^2 - (p_{\perp})^2 = \left(\frac{\hbar \omega}{c}\right)^2 (1 - n^2 \cos^2 \theta) + 2 \left(\frac{\hbar \omega}{c}\right) \left(\frac{\varepsilon}{c} - p_{\parallel} n \cos \theta\right). \quad (2.51)$$

Выражения для  $\Delta p_{\parallel}$  и  $\Delta p_{\perp}$ , полученные из уравнений сохранения (2.49) и (2.50), в классическом пределе имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta p_{\parallel} &= n(\theta) \cos \theta \frac{\hbar \omega}{c}, \\ p_{\perp} \Delta p_{\perp} &= \frac{\varepsilon \hbar \omega}{c^2} - p_{\parallel} \frac{\hbar \omega}{c} n(\theta) \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.52)$$

(Последнее выражение можно также получить из (2.51), удержав лишь члены низшего порядка по  $\hbar \omega$ .)

Выражения для коэффициентов испускания и поглощения (2.36) выводятся непосредственно из (2.48) и (2.52), при этом используется тот факт, что  $d^3 p' \rightarrow d^3 p = 2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel}$ . В результате имеем

$$j_{\omega} = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{\omega}(p_{\parallel}, p_{\perp}) f(p_{\parallel}, p_{\perp}) 2\pi p_{\perp} dp_{\perp} dp_{\parallel}, \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\omega} &= -\frac{8\pi^3 c^2}{n_r^2 \omega^2} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_{\omega}(p_{\parallel}, p_{\perp}) \times \\ &\times \left[ \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} - n(\theta) \cos(\theta) \left( \frac{p_{\parallel}}{c} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} - \frac{p_{\perp}}{c} \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} \right) \right] 2\pi dp_{\perp} dp_{\parallel}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Функция источника

$$S_{\omega} = \frac{j_{\omega}}{n_r^2 \alpha_{\omega}} = \left( \frac{\omega^2}{8\pi^3 c^2} \right) \kappa T_r.$$

Отметим, что уравнение (2.54) содержит оба показателя преломления:  $n_r$  — для луча,  $n$  — для волны. Когда функция  $f$  изотропна, выражения (2.53) и (2.54) сводятся к (2.45) и (2.46) соответственно.

Уравнение (2.54) использовалось в работе [61] при попытке интерпретировать вспышки радиозумов от Юпитера в десятиметровом диапазоне длин волн, причем предполагалось, что  $n_r \rightarrow 1$  и  $\theta = \pi/2$ . Примерно аналогичные исследования для случая  $\theta = 0$  были проведены в работе [62], где получено уравнение типа (2.54) из релятивистского уравнения Больцмана (1.11) и дисперсионного соотношения для волн, распространяющихся вдоль  $\mathbf{B}_0$  (см. § 2 гл. 7 и § 3 гл. 9).

#### § 4. Взаимодействие между полем излучения и ансамблем электронов

Интенсивность испускаемого электронами излучения обычно так невелика, что ее влияние на их распределение по скоростям ничтожно мало. Функция распределения  $f(\mathbf{p})$  обычно определяется внешними электрическим и магнитным полями, действующими на частицы плазмы, и взаимодействием частиц между собой. Однако в некоторых случаях испускание электронами с очень большой энергией и на частотах вблизи резонансов излучения может, конечно, повлиять на функцию распределения  $f(\mathbf{p})$ . Изменения в функции  $f(\mathbf{p})$ , в свою очередь, влияют на поле излучения. Другими словами, уравнение переноса (1.133) и кинетическое уравнение (1.11) связаны посредством функции распределения и эти два дифференциальных уравнения следовало бы решать совместно. В настоящее время неизвестны такие решения. Нам хотелось бы только указать возможный путь подхода к этой проблеме.

Уравнение переноса (1.133) описывает взаимодействие между потоком фотонов и частицами плазмы. Соответствующий член взаимодействия можно ввести в уравнение Больцмана (1.11), т. е. дополнительно к уже имеющемуся в правой части столкновительному члену частица — частица добавить столкновительный член фотон — частица. Эта процедура заимствована из работы [63] и более поздней работы [64]. Мы можем вычислить теперь этот столкновительный электрон-фотонный член, используя метод двух последних параграфов. [Введение электрон-фотонного члена может показаться несколько искусственным. Однако это сделано в духе данной главы, в которой мы пренебрегали коллективными эффектами и любые взаимодействия считали короткодействующими столкновительного типа. Такие взаимодействия являются традиционной частью члена в правой части уравнения Больцмана. Другой метод нахождения реакции электромагнитного поля на распределение электронов — вычисление возмущения высшего порядка для функции распределения через самосогласованные поля, входящие в левую часть кинетического уравнения (1.11).]

Пусть величина  $(\delta f / \delta t)_{\text{фотон}}$  представляет скорость изменения распределения электронов в результате столкновений различных

типов между электронами и фотонами. Для получения этой величины подсчитаем скорость, с которой электроны входят в  $d^3p$  (из всех соседних элементов  $d^3p'$  и  $d^3p''$ , окружающих элемент  $d^3p$ ), и скорость, с которой они покидают  $d^3p$  (уходя в  $d^3p'$  и  $d^3p''$ ) из-за спонтанного испускания  $\eta_\omega$ , поглощения  $\eta_{\omega A}$  и индуцированного испускания  $\eta_{\omega S}$ . Для проведения этих расчетов предположим, что  $|\mathbf{p}'| < |\mathbf{p}|$  и  $|\mathbf{p}''| > |\mathbf{p}|$ ;  $|\mathbf{p}|$ ,  $|\mathbf{p}'|$  и  $|\mathbf{p}''|$  связаны уравнением сохранения энергии

$$\varepsilon - \varepsilon' = \varepsilon'' - \varepsilon = \hbar\omega, \quad (2.55)$$

и соответствующими уравнениями для импульсов. Суммируя все такие события, при наличии излучения интенсивностью  $I_\omega$  получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{фотон}} d^3p = & \sum_{1, 2} \left[ \int_{\Omega_k} \int_{\omega} \eta_{\omega A}(\mathbf{p}') f(\mathbf{p}') d^3p' \frac{I_\omega}{\hbar\omega} d\omega d\Omega_k - \right. \\ & \left. - \int_{\Omega_k} \int_{\omega} \eta_{\omega A}(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) d^3p \frac{I_\omega}{\hbar\omega} d\omega d\Omega_k \right] + \\ & + \sum_{1, 2} \left[ \int_{\Omega_k} \int_{\omega} \eta_{\omega S}(\mathbf{p}'') f(\mathbf{p}'') d^3p'' \frac{I_\omega}{\hbar\omega} d\omega d\Omega_k - \right. \\ & \left. - \int_{\Omega_k} \int_{\omega} \eta_{\omega S}(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) d^3p \frac{I_\omega}{\hbar\omega} d\omega d\Omega_k \right] + \\ & + \sum_{1, 2} \left[ \int_{\Omega_k} \int_{\omega} \eta_\omega(\mathbf{p}'') f(\mathbf{p}'') d^3p'' \frac{1}{\hbar\omega} d\omega d\Omega_k - \right. \\ & \left. - \int_{\Omega_k} \int_{\omega} \eta_\omega(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) d^3p \frac{1}{\hbar\omega} d\omega d\Omega_k \right]. \quad (2.56) \end{aligned}$$

Суммирование проведено по обоим модам поляризации излучения и интегрирование распространяется на все частоты излучения  $\omega$  и все направления действительных волновых векторов  $\mathbf{k}$  ( $d\Omega_k = \sin\theta d\theta d\phi$ ). Первые два слагаемых (2.56) учитывают акты поглощения  $p' \rightarrow p$ , два последующих — события индуцированного испускания  $p'' \rightarrow p$  и два последних — спонтанное испускание  $p'' \rightarrow p$ .

Перейдем теперь в (2.56) к классическому пределу. Расчеты существенно упрощаются, если считать, что  $f$  и  $\eta$  — изотропные функции  $p$ . С иллюстративной целью примем это допущение. Функции  $f(p')$ ,  $f(p'')$  и  $\eta(p')$ ,  $\eta(p'')$  разложим в ряд Тейлора по  $p$ . Используя (2.30) и то обстоятельство, что элементы объема  $d^3p''$ ,  $d^3p'$  и  $d^3p$  связаны соотношением

$$\frac{d^3p^i}{d^3p} = \frac{4\pi (p^i)^2}{4\pi (p)^2} \frac{dp^i}{dp} = \frac{\varepsilon^i p^i}{\varepsilon p}; \quad p^i = p' \quad \text{или} \quad p'', \quad (2.57)$$



для релятивистских частиц находим

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{фотон}} = \sum_{1, 2} \int_{\Omega} \int_{\omega} \frac{1}{p^2 c^2} \left[ \frac{\partial}{\partial p} (p \varepsilon \eta_{\omega} f) + \right. \\ \left. + \frac{8\pi^3 c^2}{n_r^2 \omega^2} I_{\omega} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\varepsilon^2}{c^2} \eta_{\omega} \frac{\partial f}{\partial p} \right] d\omega d\Omega_k, \quad (2.58)$$

а для нерелятивистских частиц имеем

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{фотон}} = \sum_{1, 2} \int_{\Omega} \int_{\omega} \frac{1}{m v^2} \left[ \frac{\partial}{\partial v} (v \eta_{\omega} f) + \frac{8\pi^3 c^2}{n_r^2 \omega^2} I_{\omega} \frac{\partial}{m \partial v} \eta_{\omega} \frac{\partial f}{\partial v} \right] d\omega d\Omega_k. \quad (2.59)$$

В результате интегрирования (2.58) или (2.59) по всему пространству скоростей получаем нуль из-за сохранения числа частиц.

Правую часть (2.58) или (2.59) следует добавить к члену  $(\delta f / \delta t)_{\text{столкн}}$  в уравнении Больцмана. Более общая форма для анизотропных функций  $f$  и  $\eta(\mathbf{v})$  найдена в работах [63, 64].

Первый член (2.58) связан с процессом релаксации  $f$  в результате столкновений с спонтанно испускаемыми фотонами; этот процесс проходит независимо от величины плотности энергии фотонов. Второй член описывает «нагрев» электронов окружающим полем излучения  $I_{\omega}$ . Под действием этих двух процессов плазма может релаксировать к стационарному во времени состоянию. Положив  $(\delta f / \delta t)_{\text{столкн}} = 0$ , найдем, что решение уравнения Больцмана для равновесного состояния равно

$$f = \text{const} \times \exp \left[ - \int_0^{\varepsilon} \frac{\sum \int \int \eta_{\omega}(\varepsilon)}{\sum \int \int (8\pi^3 c^2 / n_r^2 \omega^2) I_{\omega} \eta_{\omega}(\varepsilon)} d\varepsilon \right]. \quad (2.60)$$

Когда интенсивность излучения такая же, как у черного тела,  $(8\pi^3 c^2 / n_r^2 \omega^2) I_{\omega} = \kappa T$  [см. (2.11) и (2.14)] и функция (2.60) сводится к максвелловской, а именно

$$f = \text{const} \times e^{-\varepsilon / \kappa T}.$$

Это показывает, что электрон-фотонная система обладает должными равновесными свойствами.

## Испускание и поглощение при парных столкновениях

В этой главе рассматриваются процессы излучения, которые можно описать с помощью теории парных взаимодействий. Такой метод описания справедлив, если силы взаимодействия между частицами являются короткодействующими или, в случае дальнедействующих сил, если газ настолько разрежен, что в любой момент времени только незначительная часть частиц находится во взаимодействии. Это означает, что движение частиц не скоррелировано и коллективные эффекты, вызываемые взаимодействием многих тел, не существенны. Типичным примером является взаимодействие электронов с атомами в слабо ионизованном газе. Далее предполагается, что внешнее статическое магнитное поле отсутствует, т. е. можно использовать при расчетах диэлектрический коэффициент для изотропной среды. Распределение электронов по скоростям также считается изотропным, но не обязательно максвелловским.

### § 1. Спектр излучения заряда, движущегося с ускорением

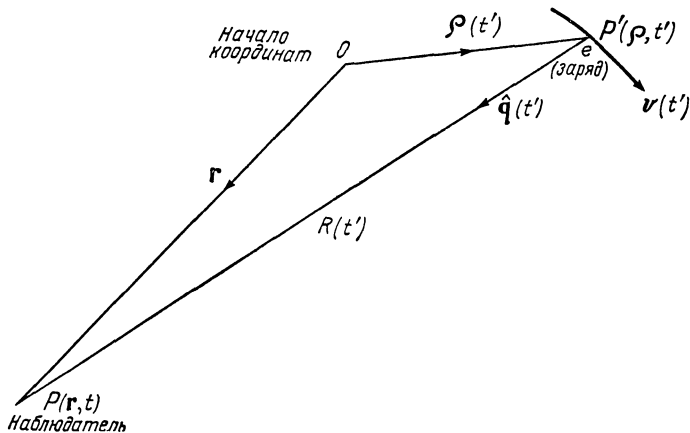
В этом параграфе приведен для справок ряд формул, связанных со спектром энергии заряда, движущегося с ускорением. Более детальный вывод формул читатель может найти в таких книгах как [67, 68].

Рассмотрим заряд  $e$  в вакууме; мгновенное положение  $P'(t')$  заряда задается вектором  $\mathbf{r}(t')$ , а мгновенная скорость его равна  $\mathbf{v}(t')$  (фиг. 18);  $t'$  — момент, в который сигнал, распространяющийся со скоростью  $c$ , должен выйти из  $P'(t')$ , чтобы достигнуть положения наблюдателя  $P(t)$  в момент времени  $t$ . «Запаздывающий» момент времени  $t'$  связан с моментом  $t$  следующим соотношением:

$$t' = t - \frac{R(t')}{c}, \quad (3.1)$$

где  $R(t')$  — расстояние между зарядом  $e$  и наблюдателем. Запаздывающие значения скорости и ускорения заряда таковы:

$$\begin{aligned} -\mathbf{v} &= \frac{d(\hat{\mathbf{q}}R)}{dt'}, \\ -\dot{\mathbf{v}} &= \frac{d^2(\hat{\mathbf{q}}R)}{dt'^2}, \end{aligned} \quad (3.2)$$



Фиг. 18. Векторная диаграмма величин, встречающихся в формулах (3.1) — (3.4).

где  $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{R}/R$  — единичный вектор в направлении от  $P'$  к  $P$ .

Электрическое и магнитное поля в  $P(\mathbf{r}, t)$ ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t),$$

выведены из потенциалов Льенара — Вихерта:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{gR} \right]_{t'}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \left[ \frac{\boldsymbol{\beta}}{gR} \right]_{t'}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ ,  $g = (1 - \hat{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\beta})$  и  $[ ]_{t'}$  означает, что величина внутри квадратных скобок взята в запаздывающий момент времени  $t'$ , определяемый (3.1). Для нерелятивистских скоростей  $g \rightarrow 1$ .

Подставим теперь (3.4) в (3.3), но, выполняя это, примем во внимание, что в уравнениях (3.3) содержатся производные по времени относительно  $t$ , а не  $t'$ , и что векторные операторы являются частными производными при постоянном  $t$ , а не  $t'$ . После довольно утомительных преобразований находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\beta})}{g^3 R^2} + \frac{\hat{\mathbf{q}} \times ((\hat{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{g^3 c R} \right]_{t'}, \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{E}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Первый член в выражении (3.5) описывает близкое, практически статическое поле движущегося заряда и не зависит от его

ускорения. Нас впредь будет интересовать второй член, описывающий поле «излучения», в котором векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  ортогональны радиус-вектору, их величины меняются линейно с  $\dot{\beta}$  и уменьшаются с расстоянием пропорционально  $1/R$ . Точка наблюдения предполагается настолько удаленной от заряда, что изменения  $\hat{\mathbf{q}}$  и  $R$  можно считать пренебрежимо малыми за малый интервал ускорения.

Выражение (3.5) позволяет определить энергию  $W(\Omega)$  на единицу телесного угла, проходящую через элементарный конус  $d\Omega$  и детектированную в точке наблюдения  $P$ :

$$W(\Omega) = \int_t R^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{\mathbf{q}} dt = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \int_t \left| \frac{\hat{\mathbf{q}} \times \{(\hat{\mathbf{q}} - \beta) \times \dot{\beta}\}}{g^3} \right|^2 dt. \quad (3.6)$$

Поскольку подынтегральное выражение в формуле (3.6) является функцией запаздывающего момента времени  $t'$ , проведем теперь замену переменных

$$dt = \frac{\partial t}{\partial t'} dt' = g dt'. \quad (3.7)$$

Тогда

$$W(\Omega) = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \int_{t'} \frac{|\hat{\mathbf{q}} \times \{(\hat{\mathbf{q}} - \beta) \times \dot{\beta}\}|^2}{g^5} dt'. \quad (3.8)$$

Угловое распределение мгновенно излучаемой мощности как функция собственного времени заряда определяется выражением

$$\frac{dW(\Omega)}{dt'} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\hat{\mathbf{q}} \times \{(\hat{\mathbf{q}} - \beta) \times \dot{\beta}\}|^2}{(1 - \hat{\mathbf{q}} \cdot \beta)^5}. \quad (3.9)$$

Для нерелятивистских частиц (3.9) принимает вид

$$\frac{dW(\Omega)}{dt} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} |\hat{\mathbf{q}} \times (\hat{\mathbf{q}} \times \dot{\mathbf{v}})|^2; \quad (3.10)$$

это выражение показывает, что  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости, содержащей  $\hat{\mathbf{q}}$  и  $\dot{\mathbf{v}}$ ; пусть  $\dot{\mathbf{v}}$  совпадает по направлению с полярной осью, а  $\theta$  — угол между  $\dot{\mathbf{v}}$  и  $\hat{\mathbf{q}}$ , тогда

$$\frac{dW(\Omega)}{dt} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \sin^2 \theta \quad (3.11)$$

и в полярных координатах картина испускаемого излучения соответствует типичной диаграмме электрического диполя. Этот предел называется дипольным приближением.

Выражение для полной мощности, излучаемой по всем направлениям, можно получить, интегрируя (3.9) по всему телесному углу; в результате находим

$$\frac{dW}{dt'} = \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c} \frac{(\dot{\beta})^2 - (\beta \times \dot{\beta})^2}{(1 - \beta^2)^3}. \quad (3.12)$$

В дипольном приближении это выражение сводится к обычной формуле Лармора

$$\frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\dot{\mathbf{v}}|^2. \quad (3.13)$$

Для нахождения спектра частот излучаемой энергии проведем анализ Фурье выражения (3.6), используя теорему Парсеваля для фурье-компонент функции  $V(t)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |V(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} V(\omega) V^*(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} W(\omega) d\omega, \quad (3.14)$$

где частота  $\omega$  определена только для положительных значений,  $V(\omega)$  — фурье-образ  $V(t)$  [см. (1.16)] и  $W(\omega)$  — спектральная плотность энергии. Тогда для энергии  $W(\Omega, \omega)$  (размерность ее: *джоуль* на  $d\Omega$ , на  $d\omega$ ) будем иметь

$$W(\omega, \Omega) = \frac{e^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t' - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{r}/c)} \frac{\hat{\mathbf{q}} \times \{(\hat{\mathbf{q}} - \beta) \times \dot{\beta}\}}{g^2} dt' \right|^2, \quad (3.15)$$

где время  $t$  заменено на  $t'$  согласно выражению (3.7) и большое расстояние  $R(t')$  аппроксимировано величиной  $r - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{r}(t')$ . Теперь единичный вектор  $\hat{\mathbf{q}}$  практически не зависит от времени и указывает направление от начала координат  $O$  к точке наблюдения  $P$ . Интегрируя по частям уравнение (3.15), можно преобразовать его к виду

$$W(\omega, \Omega) = \frac{e^2 \omega^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t' - \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{r}/c)} [\hat{\mathbf{q}} \times (\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{v})] dt' \right|^2. \quad (3.16)$$

Отметим, что  $\omega$  — частота, измеряемая по шкале собственного времени наблюдателя. Поляризация излучения определяется направлением векторного интеграла в (3.15) или в (3.16).

Для нерелятивистских скоростей (3.15) принимает вид

$$W(\omega, \Omega) = \frac{e^2}{16\pi^3 \epsilon_0 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{q}} \times [\hat{\mathbf{q}} \times \dot{\mathbf{v}}(t)] e^{-i\omega t} dt \right|^2; \quad (3.17)$$

выражение (3.17) соответствует излучению диполя с зарядом  $e$ . Полная энергия на  $d\omega$ , излучаемая в телесный угол  $4\pi$  *стер*, определяется выражением

$$W(\omega) = \frac{e^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{v}}(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (3.18)$$

Если в ускоренном движении участвует несколько зарядов  $e_i$ , то величину  $e\mathbf{v} \exp(j\omega\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q}/c)$ , стоящую под интегралом в формуле (3.16), следует заменить на

$$\sum_i e_i \mathbf{v}_i e^{j\omega\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{r}_i/c}, \quad (3.19)$$

а величину  $e\dot{\mathbf{v}}$ , стоящую под интегралом в формулах (3.17) и (3.18), на

$$\sum_i e_i \dot{\mathbf{v}}_i. \quad (3.20)$$

В последнем (нерелятивистском) случае эта замена приводит к следующему результату: система частиц с одинаковым отношением заряда к массе не может излучать (как диполь). Это вытекает из приводимого ниже соотношения

$$\sum_i e_i \dot{\mathbf{v}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i \frac{e_i}{m_i} m_i \mathbf{r}_i(t) = \frac{e_i}{m_i} \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \mathbf{r}_i(t). \quad (3.21)$$

Но

$$\sum m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{R} \sum m_i,$$

где  $\mathbf{R}$  — радиус-вектор центра массы; если последний покоится или равномерно движется, то  $\sum e_i \dot{\mathbf{v}}_i = 0$ . Заметим, что величина

$$\mathbf{d} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i \quad (3.22)$$

является дипольным моментом системы и можно выразить (3.17) и (3.18) через  $\mathbf{d}$ , как это часто делают (см. § 1 гл. 5).

Теперь можно сделать вывод о том, что парные «столкновения» между двумя электронами с нерелятивистскими скоростями не дают вклада в излучение. Поэтому, например, в полностью ионизованной плазме излучательными являются только столкновения электронов с ионами. Возникающее (в высшем порядке) при электрон-электронных столкновениях квадрупольное излучение становится существенным лишь при энергиях порядка или выше  $0,5 \text{ Мэв}$  ( $\sim m_0 c^2$ ), когда оно начинает превышать излучение при электрон-ионных столкновениях (см. работы [69—72]).

В приведенных выше уравнениях предполагалось, что заряд находится в вакууме. Теперь допустим: заряд движется в изотропной среде с коэффициентом преломления  $n(\omega)$ , в которой практически отсутствуют потери. Тогда найдем, что в случае рассмотренного здесь поперечного электромагнитного излучения можно применять формулы (3.16)—(3.18), если произвести замену  $c$  на  $c/n$  и  $e$  на  $e/n$ . Отсюда видно, что все, что необходимо сделать в *дипольном приближении* — это умножить правую часть выражений (3.17) и

(3.18) на  $n$ . Такое заключение согласуется с обсуждением в § 2 гл. 2 [выражения (2.35)]. В общем случае, описываемом (3.16), вышеупомянутые замены изменяют также экспоненциальный член под интегралом. Это приводит к существенным изменениям в характере излучения, когда скорость частицы порядка или больше фазовой скорости волны в среде (излучение Черенкова).

## § 2. Тормозное излучение при столкновениях электрон — атом

Электромагнитное излучение слабо ионизованной немагнитной плазмы связано, главным образом, со столкновениями электронов с атомами или молекулами. Ионы играют ничтожно малую роль. Действительно, это имеет место в такой плазме, процент ионизации которой порядка или меньше 0,1% (при электронной температуре, превышающей примерно 1 эв).

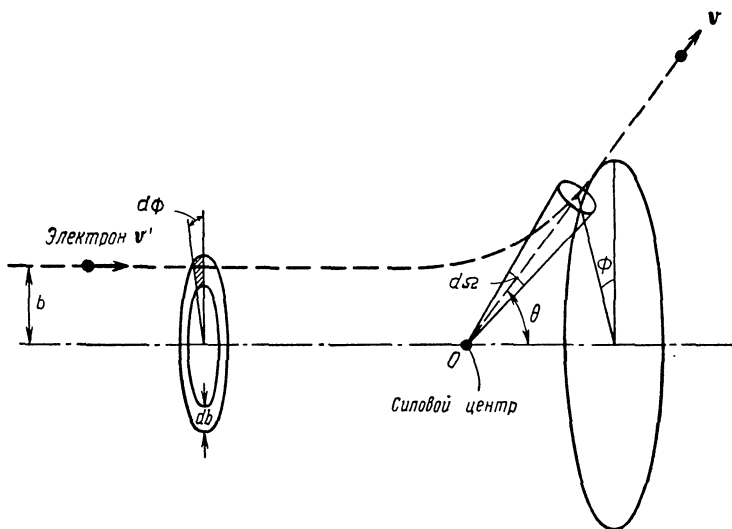
Испускание возникает при ускорении электрона в поле сил тяжелой «ударяемой» частицы. Классическая картина столкновения приведена на фиг. 19. Электрон приближается к тяжелой частице со скоростью  $v'$ ; его расстояние до оси называется параметром удара  $b$ ; электрон, испытав отклонение, определяемое углами  $\theta$  и  $\phi$ , покидает частицу со скоростью  $v$ . Для сил, обладающих сферической симметрией (которая обычно предполагается), орбита электрона все время лежит в плоскости, проходящей через  $v'$  и  $O$ .

Скорости  $v'$  и  $v$  определены в системе координат, связанной с тяжелой частицей, скорость которой обусловлена тепловым движением. Однако если только энергия атома не превышает энергию электрона в  $\sim M/m$  раз, то тяжелая частица почти покоится и тогда  $v'$  и  $v$  практически можно отнести к лабораторной системе координат.

Возьмем электроны с однородным распределением по пространству и изотропным распределением по скоростям; они приближаются к тяжелой частице хаотически со всех сторон и со всевозможными скоростями. Поэтому излучение, испускаемое ансамблем частиц, является изотропным и имеет хаотическую поляризацию. Энергия электрона предполагается нерелятивистской, и для излучаемой энергии применимо дипольное приближение (3.18).

Теперь опишем класс столкновений, определяемых скоростью  $v'$  потока электронов со всевозможными параметрами удара  $b$ , падающего на центр сил  $O$ . Пусть  $N_a$  — плотность на единицу объема таких центров сил (т. е. атомов) и пусть  $W(\omega, v', b, \phi)$  — излучаемая энергия на  $d\omega$  при одном столкновении электрона со скоростью  $v'$  и параметром удара между  $b$  и  $b + db$ . Тогда полная энергия, излучаемая в 1 сек на  $d\omega$ , равна

$$N_a v' \int \int W(\omega, v', b, \phi) b db d\phi, \quad (3.23)$$



Фиг. 19. Геометрия столкновения.

а дифференциальная испускательная способность для спонтанного излучения (см. § 2 гл. 2) выражается формулой

$$\eta_{\omega}(v') = \frac{1}{8\pi} N_a v' \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} W(\omega, v', b, \phi) b db d\phi \quad (3.24)$$

(где коэффициент  $4\pi$  связан с  $4\pi$  стер, а коэффициент  $2$  — с двумя модами поляризации). Можно определить также эффективное сечение излучения:

$$Q_r = \frac{d\omega}{\hbar\omega} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} W(\omega, v', b, \phi) b db d\phi. \quad (3.25)$$

Соотношение между  $\eta_{\omega}$  и дифференциальным эффективным сечением рассеяния  $Q(v', \theta, \phi)$  [не смешивать с  $Q_r$  из (3.25)] приводит к очень полезному результату;  $Q$  определяется выражением

$$Q d\Omega = \frac{\text{Число электронов, рассеянных в 1 сек в } d\Omega}{\text{Число электронов, падающих в 1 сек на единичную поверхность}}, \quad (3.26)$$

где  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  — элемент телесного угла вокруг оси, задаваемой углами  $\theta, \phi$  (см. фиг. 19). Из сохранения числа частиц следует

$$|Q(v', \theta, \phi) d\Omega| = |b db d\phi|, \quad (3.27)$$



Подставляя (3.27) в (3.24), получаем искомое соотношение между  $\eta_\omega$  и  $Q$ :

$$\eta_\omega(v') = \frac{1}{8\pi} N_a v' \int_0^\pi \int_0^{2\pi} W(\omega, v', \theta, \phi) Q(v', \theta, \phi) d\Omega. \quad (3.28)$$

Электрон, приближающийся к тяжелой частице, испытывает заметное ускорение в течение лишь ограниченного интервала времени, скажем  $\tau$ ; интересующее нас время порядка  $b/v'$ . Если частота  $\omega$  исследуемого излучения достаточно низкая и  $\omega\tau \ll 1$ , вклад в интеграл (3.18) происходит преимущественно за время  $t$ , для которого  $\exp(-j\omega t) \rightarrow 1$ , что приводит к следующему результату:

$$W(\omega, v', \theta, \phi) \approx \frac{e^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left| \int \dot{\mathbf{v}}(t) dt \right|^2 = \frac{e^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} |\Delta \mathbf{v}|^2, \quad (3.29)$$

где  $\Delta \mathbf{v}^2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$  — изменение скорости электрона из-за столкновения. Более того, энергия, теряемая нерелятивистским электроном на излучение, пренебрежимо мала по сравнению с его кинетической энергией и  $|\mathbf{v}'| \approx |\mathbf{v}|$ . Поэтому для сил, обладающих сферической симметрией,

$$|\Delta \mathbf{v}|^2 = 2v^2(1 - \cos \theta)$$

и

$$W(\omega, \theta) = \frac{e^2}{3\pi^2 \epsilon_0 c^3} v^2(1 - \cos \theta). \quad (3.30)$$

Подставляя этот результат в (3.28), находим

$$\eta_\omega(v) = \mathbf{v} \frac{e^2}{24\pi^3 \epsilon_0 c^3} v^2 \left[ N_a v \int_0^\pi Q(v, \theta) (1 - \cos \theta) 2\pi \sin \theta d\theta \right]. \quad (3.31)$$

Однако член в квадратных скобках определяет величину, хорошо известную в теории атомных столкновений, а именно: частоту столкновений  $\nu(v)$  для передачи импульса, или связанное с ней эффективное сечение для передачи импульса  $Q_m$ :

$$\nu(v) \equiv N_a Q_m(v) v = N_a v \int_0^\pi Q(v, \theta) (1 - \cos \theta) 2\pi \sin \theta d\theta. \quad (3.32)$$

Поэтому скорость спонтанного испускания определяется формулой

$$\eta_\omega(v) = \frac{e^2}{24\pi^3 \epsilon_0 c^3} v^2 \nu(v) = \frac{N_a e^2}{24\pi^3 \epsilon_0 c^3} v^3 Q_m(v), \quad (3.33)$$

т. е. мы получаем искомый результат. (Квантовомеханическое обоснование этого результата см. в работе [73].) Величину (малую),

испускания легко оценить, выразив результат через эффективное сечение излучения  $Q_r$ , см. (3.25), а не через  $\eta_\omega$ :

$$Q_r(v, \omega) = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{1}{137} Q_m(v) \frac{d\omega}{\omega}. \quad (3.34)$$

Число 137 возникает, если записать уравнение через постоянную тонкой структуры

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

У электрона со средней энергией  $U$  скорость потери энергии из-за упругих столкновений с атомом массой  $M$  составляет

$$\frac{dU}{U dt} \approx -v \frac{2m}{M}.$$

Поэтому эффективное сечение  $Q_U$  для потери энергии связано с  $Q_m$  следующим образом:

$$Q_U = \frac{2m}{M} Q_m.$$

Отсюда видно, что для электронов с нерелятивистской энергией потери на тормозное излучение очень малы по сравнению со столкновительными потерями. Однако для ультрарелятивистских частиц радиационные потери энергии превышают столкновительные потери [44].

Формула (3.33) очень полезна тем, что, хотя было сделано несколько прямых теоретических и экспериментальных определений  $\eta_\omega$ , она позволяет для нахождения  $\eta_\omega$  использовать многочисленные данные, полученные для  $v(v)$  или  $Q_m(v)$ . Действительно, литература за последние тридцать лет изобилует такими исследованиями. Теоретические расчеты должны быть сделаны при помощи квантовой механики, так как мы имеем здесь дело с возмущением атомных волновых функций налетающим электроном (см., например, [74, 75]). Экспериментальная техника также сильно усовершенствовалась за последние десять лет и было получено много надежных экспериментальных данных о величине  $Q_m(v)$  и ее зависимости от энергии (см., например, [66, 76, 77]).

Большинство атомов обладает сложной зависимостью эффективного сечения от энергии, что, конечно, приводит к сложному выражению для дифференциальной испускательной способности. Для грубых оценок можно постулировать степенной закон для силы взаимодействия в виде [233, 293]

$$F \sim \frac{1}{r^s}. \quad (3.35)$$

Из анализа размерности следует

$$v(v) \sim v^{(s-5)/(s-1)}. \quad (3.36)$$

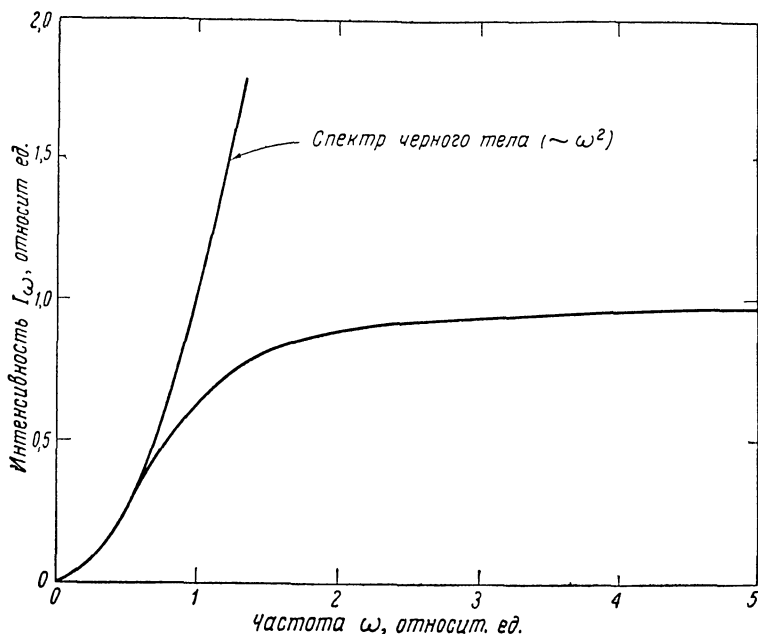
Таблица 1

## Некоторые значения частот столкновений и эффективных сечений столкновений

Атом или молекула	$\nu(\nu)$ , сек <sup>-1</sup>	$Q_m(\nu)$ , см <sup>2</sup>	Приблизительный диапазон энергии, эв
Столкновение твердых шаров, $s \rightarrow \infty$	$\sim \nu$	const	—
Поляризационная сила, $s = 5$	const	$\sim \frac{1}{\nu}$	—
Кулоновское взаимодействие, $s = 2$	$\approx \frac{1}{\nu^3}$	$\approx \frac{1}{\nu^4}$	—
Атомарный водород, H	—	$\frac{3,5 \times 10^{-15}}{U^{0,82}} (U \text{ в эв})$	1—12
Молекулярный водород, H <sub>2</sub>	$5,9 \times 10^9 p$ ( $p$ — давление газа в <i>горр</i> при 0° C)	—	$\approx 4$
Гелий, He	—	$5,5 \times 10^{-16}$	от 0,03 до 1
	$2,6 \times 10^9 p$	—	$\approx 3$
Атомарный кислород, O	—	$5,6 \times 10^{-16}$	от 3 до 11

В табл. 1 перечисляется несколько таких полуэмпирических взаимодействий и, кроме того, даны *приближенные* значения  $\nu$  или  $Q_m$  для нескольких газов, найденные из измерений. Кулоновское взаимодействие ( $s = 2$ ) включено условно. Строго говоря, его не должно быть в таблице, поскольку  $Q_m$  расходится логарифмически при  $\theta \rightarrow 0$  (или  $b \rightarrow \infty$ ) и при использовании этой величины должна быть принята определенная процедура обрезания (см. § 4 настоящей главы).

Радио- и микроволновой спектры  $\eta_\omega$  не зависят от частоты, как и должно быть при предположении об ударном столкновении.



Фиг. 20. Схематическое изображение спектра интенсивности тормозного излучения от однородного слоя плазмы.

Коэффициент испускания, полученный из формул (2.45) и (3.33), имеет вид

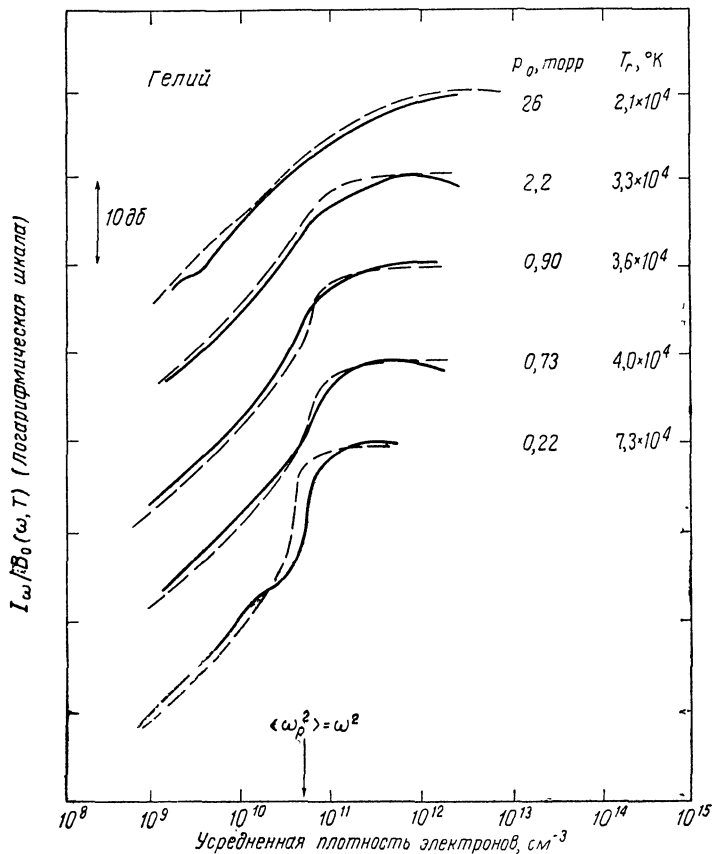
$$j_{\omega} = \frac{m\omega_p^2}{6\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \nu(v) f(v) v^4 dv; \quad (3.37)$$

он подобен коэффициенту для «белого» спектра. Коэффициент поглощения [полученный из формулы (2.46) при  $n_r = 1$ ] меняется обратно пропорционально квадрату частоты:

$$\alpha_{\omega} = -\frac{4\pi}{3c} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \int_0^{\infty} \nu(v) \frac{\partial f}{\partial v} v^3 dv. \quad (3.38)$$

В выражениях (3.37) и (3.38) функция  $f(v)$  нормирована на единицу (см. § 1 гл. 1); другими словами,  $\int f d^3v = 1$ . Поскольку  $\nu(v)$  в общем случае имеет сложную зависимость от  $v$ , необходимо проводить численное интегрирование.

Спектр интенсивности излучения горячей плазмы, имеющей постоянную температуру  $T$  и толщину  $L$ , с учетом (1.141) схемати-



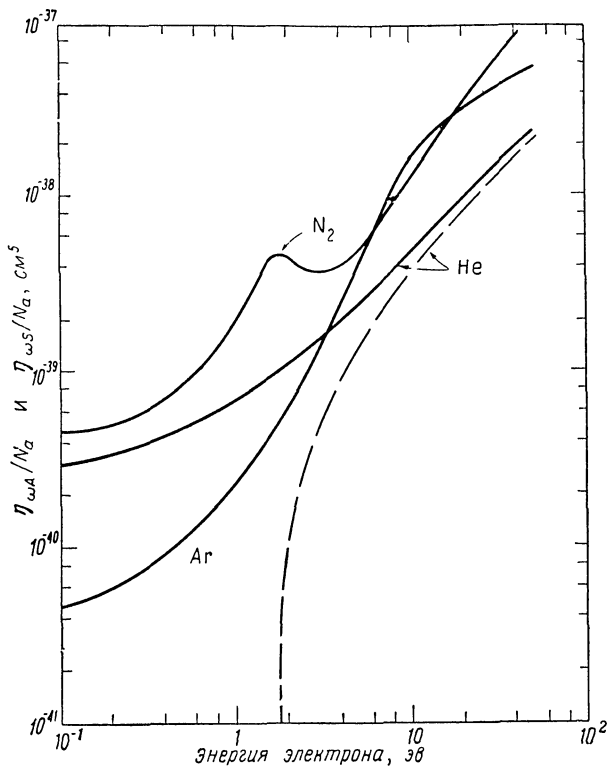
Фиг. 21. Зависимость интенсивности испускания перпендикулярно оси цилиндрического столба плазмы от плотности электронов (из работы Бекефи, Хиршфилда и Брауна [78]).

Диаметр столба равен 2,5 см; плотность усреднена по диаметру.

Пунктирная линия — теоретическая; сплошная — экспериментальная. Для наглядности кривые смещены по вертикали на 10 дБ относительно друг друга.  $T_r$  — измеренная температура излучения. В экспериментальные результаты внесены поправки на отражения от границ плазмы.

чески изображен на фиг. 20. На высоких частотах самопоглощение пренебрежимо мало и интенсивность  $I_\omega$  пропорциональна коэффициенту испускания  $j_\omega$ , полученному в результате интегрирования по всей длине луча в среде. По мере уменьшения частоты  $\omega$  коэффициент поглощения  $\alpha_\omega$  возрастает и интенсивность стремится к интенсивности излучения черного тела  $B_0(\omega, T)$ .

На фиг. 21 показано изменение интенсивности в случае, когда частота  $\omega$  остается постоянной, а плотность электронов возрастает.

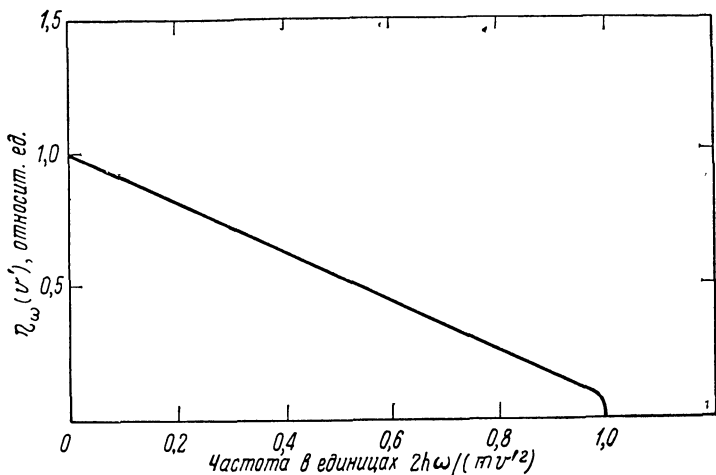


Фиг. 22. Зависимость расчетных значений скорости индуцированного испускания  $\eta_{\omega S}(v)$  и поглощения  $\eta_{\omega A}(v)$  от энергии электрона  $\frac{1}{2}mv^2$  для излучения на длине волны  $6943 \text{ \AA}$  (из работы Фелпса [83]).

$\eta_{\omega}$  измеряется в  $\text{см}^2$ , а  $N_a$  — в  $\text{см}^{-3}$ .

Сплошная кривая — поглощение; пунктирная — испускание.

При малых плотностях, когда самопоглощение мало, интенсивность  $I_{\omega}$  возрастает линейно с увеличением  $\omega_p^2$ ; при больших плотностях электронов кривая зависимости интенсивности испускания от плотности имеет плато, соответствующее интенсивности излучения черного тела. Быстрый рост при  $\omega \approx \omega_p$  нельзя объяснить в рамках вышеприведенной теории, и позже мы вернемся к этому эффекту (в § 3 настоящей главы). Экспериментально исследовалось излучение на частоте  $3000 \text{ Мгц}$ , испускаемое положительным столбом тлеющего разряда в гелии [78]. В этих экспериментах электронная температура была между 2 и 8 эв и степень ионизации была меньше  $10^{-2}\%$ .



Фиг. 23. Зависимость скорости спонтанного испускания от частоты, полученная на основании модели столкновения твердых шаров.

**Высокочастотные эффекты.** Результаты, полученные ранее в этом параграфе, становятся неверными на частоте, на которой энергия испускаемого (или поглощаемого) фотона сравнима по величине с энергией электрона. Взаимодействие не является более «упругим», как раньше, когда скорость  $v$  после столкновения была почти равна скорости  $v'$  налетающего электрона.

Квантовомеханические расчеты так называемого коэффициента свободно-свободного поглощения с различной степенью приближения были проведены рядом авторов. Одними из последних являются работы [79—81, 130—132]. С учетом результата Холстейна<sup>1)</sup> дифференциальная скорость поглощения  $\eta_{\omega A}$  (см. § 2 гл. 2) имеет вид

$$\eta_{\omega A}(v) \approx \frac{N_a e^2}{3\epsilon_0 c \hbar \omega^3} (v')^3 \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\hbar \omega}{\frac{1}{2} m v'^2} \right] Q_m \left( \frac{1}{4} m (v^2 + v'^2) \right). \quad (3.39)$$

Здесь  $v$  — скорость налетающего электрона, который после поглощения фотона  $\hbar \omega$  вылетает со скоростью  $v'$ , при этом

$$\frac{1}{2} m v'^2 - \frac{1}{2} m v^2 = \hbar \omega; \quad (3.40)$$

$Q_m$  — эффективное сечение для передачи импульса, выраженное через среднюю энергию  $\frac{1}{2} (m v^2 + m v'^2)/2$ . Размерность  $\eta_{\omega A}$  —  $m^2$ .

<sup>1)</sup> Аппроксимация Холстейна справедлива, если эффективное упругое сечение  $Q_m$  меняется достаточно медленно с энергией [82].

На фиг. 22 приведены кривые зависимости  $\eta_{\omega A}$  от энергии электрона для He, Ag и N<sub>2</sub> при фиксированной длине волны фотона 6943 Å. Эта фигура взята из работы [83], где исследовался вклад свободно-свободного поглощения фотонов в пробой газа посредством лазера. Пунктирная кривая — скорость индуцированного испускания  $\eta_{\omega S}$ , найденная из условия (2.30). Отметим, что результирующее поглощение получено при интегрировании по всем энергиям, см. формулу (2.25).

Дифференциальную испускательную способность легко рассчитать, используя (3.39), (2.30) и (2.57):

$$\eta_{\omega}(v') = \frac{N_a e^2}{24\pi^3 \epsilon_0 c^3} (v')^3 Q_m \left( \frac{1}{4} m (v^2 + v'^2) \right) \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega}{\frac{1}{2} m v'^2} \right] \left[ 1 - \frac{\hbar\omega}{\frac{1}{2} m v'^2} \right]^{1/2}. \quad (3.41)$$

В классическом пределе выражение (3.41) сводится к формуле (3.33). Спектр  $\eta_{\omega}$  схематически показан на фиг. 23; он получен при несколько нереальном предположении о том, что для всех энергий сечение  $Q_m$  можно описать столкновением твердых шаров ( $Q_m = \text{const}$ ). Спектр обрезается в точке, известной в рентгено-скопии как предел Дуана — Ханта.

### § 3. Эффекты дисперсии плазмы

До сих пор расчеты относились к разреженному газу, в котором частицы двигались так, как если бы они находились в вакууме. Дисперсионные свойства плазмы, которые при макроскопическом рассмотрении описываются диэлектрическим коэффициентом  $K$ , в этих выводах не учитывались. Их можно формально учесть с помощью уравнения Больцмана, используя дисперсионное соотношение и находя из него при помощи (1.129) величину  $\alpha_{\omega}$ . Тогда уже легко получить  $\dot{f}_{\omega}$  и  $\eta_{\omega}$ .

Вначале линеаризуем уравнение Больцмана (1.6), для этого запишем функцию  $f$  в виде суммы двух членов:

$$f(v) + f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (3.42)$$

Первый член представляет функцию распределения  $f(v)$  в отсутствие электромагнитных колебаний; считается, что функция  $f(v)$  изотропна и стационарна во времени, но не обязательно максвелловская, и что она удовлетворяет уравнению Больцмана в отсутствие возмущений. Второй член  $f_1$  описывает малое возмущение, вызванное переменным электромагнитным полем. Пренебрегая произведениями малых величин, получаем<sup>1)</sup>

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} [\mathbf{E}_0 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e}{m} [E + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = -v(v) f_1, \quad (3.43)$$

<sup>1)</sup> Для удобства заряд электрона считается положительным,



где  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{B}_0$  — равновесные поля, а  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — переменные поля. Правая часть уравнения (3.43) представляет собой аппроксимацию столкновительного члена и показывает, что если выключить все силы, то скорость уменьшения  $f_1$  определяется  $\exp[-v(v)t]$ . Эта аппроксимация в основном хороша для рассматриваемых короткодействующих сил между электроном и атомом.

Для изотропной функции распределения  $f(v)$  член  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times (\partial f / \partial \mathbf{v})$  тождественно равен нулю. Предполагая, что статические поля  $E_0$  и  $B_0$  отсутствуют, и проводя для уравнения (3.43) анализ Фурье по времени и пространству, для одной фурье-компоненты находим

$$f_1 = -\frac{e}{m} \frac{(\partial f / \partial \mathbf{v}) \cdot \mathbf{E}}{j\omega - j\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} + v(v)}. \quad (3.44)$$

Для поперечных электромагнитных волн в изотропной плазме величина волнового вектора  $\mathbf{k}$  всегда меньше  $\omega/c$  и поэтому для нерелятивистских скоростей можно пренебречь членом  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$  в знаменателе (3.44). (Пренебречь членом  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$  — это то же, что сказать: пространственная дисперсия является несущественной; см. § 2 гл. 1.)

Подставляя (3.44) в (1.9), получаем переменный ток  $\mathbf{J}$ ; используя (1.14) и (1.15), для диэлектрического коэффициента находим

$$K_T = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega} \int_0^\infty \left( \frac{\omega + jv}{\omega^2 + v^2} \right) \frac{\partial f}{\partial v} \frac{4\pi}{3} v^3 dv, \quad (3.45)$$

где функция  $f$  нормирована на единицу. Этот результат получен Маргенау [84].

Дисперсионное соотношение для волны имеет вид

$$k^2 c^2 = \omega^2 K_T. \quad (3.46)$$

По определению показатель преломления  $n$  и коэффициент поглощения  $\alpha_\omega$  выражаются формулами

$$\begin{aligned} n &= \frac{c}{\omega} \operatorname{Re} k, \\ \alpha_\omega &= -2 \operatorname{Im} k. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Легко показать, что  $\alpha_\omega$  можно представить через  $n$  и  $K_T$ :

$$\alpha_\omega = -\frac{\omega}{c} \frac{\operatorname{Im} K_T}{n}; \quad (3.48)$$

это приводит к следующему результату:

$$\alpha_\omega = -\frac{1}{n} \frac{4\pi}{3c} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \int_0^\infty \frac{v(v)}{1 + (v(v)/\omega)^2} \frac{\partial f}{\partial v} v^3 dv. \quad (3.49)$$

Выражение для дифференциальной испускательной способности  $\eta_\omega$  можно получить, приравнявая (3.49) и (2.46) и сравнивая соответствующие подынтегральные выражения [необходимо следить за различной нормировкой функции  $f(v)$  в (3.49) и функции  $f(\rho)$  в (2.46)]:

$$\eta_\omega(v) = \frac{e^2 n}{24\pi^3 \epsilon_0 c^3} v^2 \frac{v(v)}{1 + (v(v)/\omega)^2}. \quad (3.50)$$

Вычисления на этом заканчиваются.

Видно, что формулы (3.49) и (3.50) в пределе  $v/\omega \rightarrow 0$  и  $n \rightarrow 1$  сводятся к соответствующим выражениям (3.38) и (3.33). Отсутствие в последних члена  $(v/\omega)^2$  связано с тем, что при выводе  $\eta_\omega$  мы в сущности не учитывали последовательные электрон-атомные столкновения.

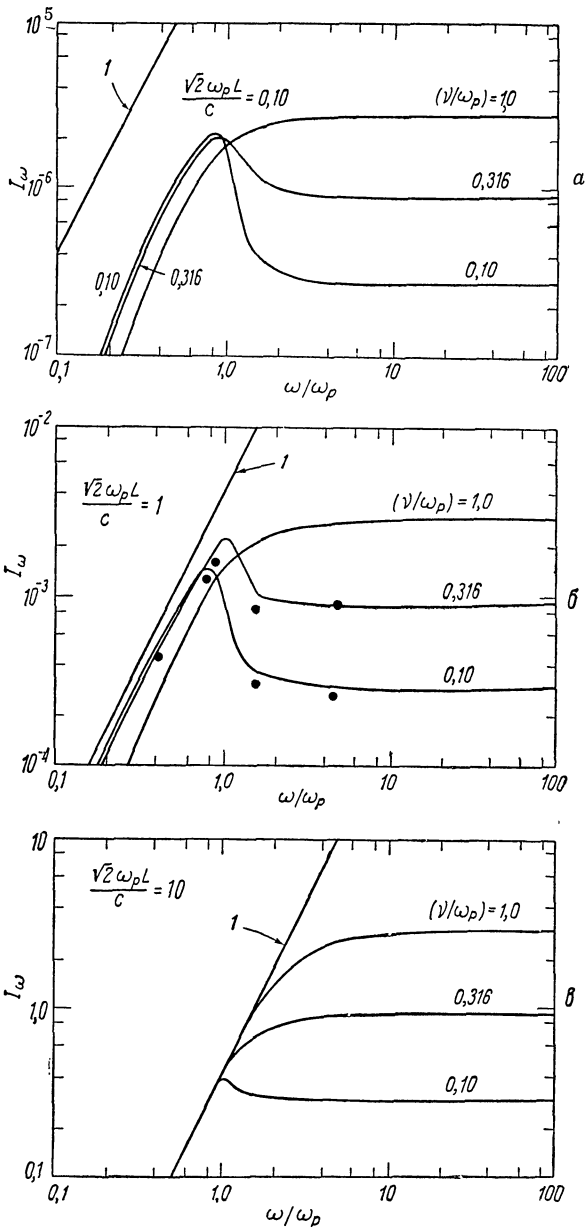
Исконный дисперсионный эффект представлен показателем преломления  $n$ , входящим в знаменатель выражения для  $\alpha_\omega$  и в числитель выражения для  $\eta_\omega$  (или  $j_\omega$ ). Диэлектрические свойства плазмы отражены в этих уравнениях точно так, как в (2.35).

При частотах  $\omega$  вблизи  $\omega_p$  коэффициент поглощения  $\alpha_\omega$ , определяемый (3.49), достигает очень больших значений, что оказывает сильное влияние на спектр испускаемого излучения (см. также [85]). Вместо спектра, представленного на фиг. 20, теперь имеются спектры, типа показанных на фиг. 24 для разных толщин  $L$  однородного слоя плазмы. Вычисления проведены по формулам (3.47) и (3.49) в предположении, что  $v$  не зависит от скорости. Интенсивность рассчитана по формуле (1.141), следовательно, отражения на границе плазма — вакуум не учитывались.

Точки, приведенные на фиг. 24, б, получены из измерений в тлеющем разряде в гелии на различных частотах в диапазоне примерно от 2000 до 35000 Мгц. Увеличение испускания при  $\omega \approx \omega_p$  связано с наличием показателя преломления  $n$  в знаменателе (3.49).

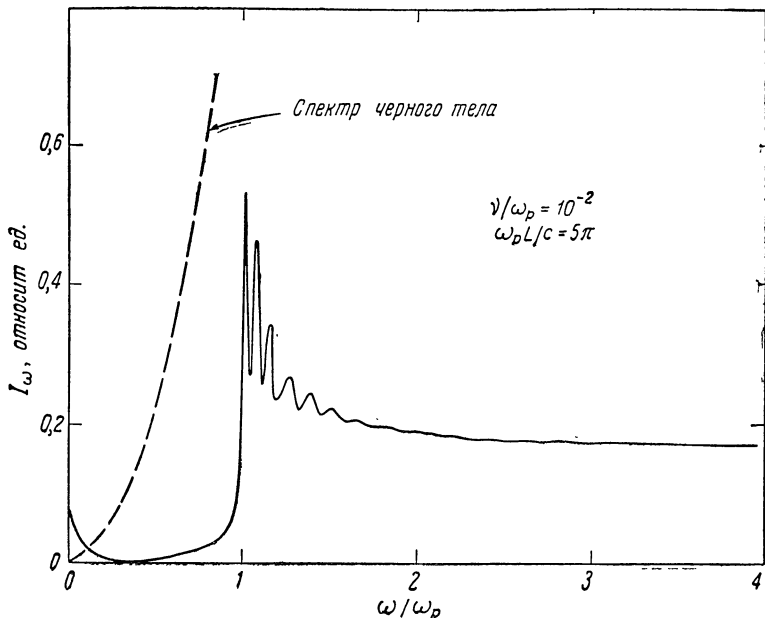
Резкие изменения интенсивности  $I_\omega$  около  $\omega = \omega_p$ , показанные на фиг. 21, вызваны тем же самым диэлектрическим эффектом.

Необходимо отметить, что как расчеты, так и эксперименты показывают наличие испускания на частотах  $\omega < \omega_p$ . Это противоречит расчетам, проведенным в § 6 и 7 гл. 1 и в § 1 гл. 2, где на этих частотах испускание было запрещено. Согласно таким расчетам свойства по обе стороны от  $\omega = \omega_p$  резко отличаются: с одной стороны испускание возможно, с другой — запрещено. Это связано с предположением о слабом затухании волн. Мы были вынуждены сделать такое предположение, чтобы дать определение некоторых важных величин, например групповой скорости, плотности энергии и т. д., внутри среды. Однако, если мы решили уравнение переноса для  $I_\omega$  в некоторой точке вне среды, можно забыть об этих допущениях и позволить величине  $\alpha_\omega$  в (1.139), (1.141) или (1.142)



Фиг. 24. Влияние диэлектрической дисперсии на интенсивность тормозного излучения под прямыми углами от однородного слоя плазмы.

Интенсивность дана в единицах  $\kappa T/2L^2$ . В теории не учитываются отражения от границ. Точки получены из экспериментальных данных, в которые внесены поправки на отражения от плазменных границ. Прямая линия 1 — интенсивность излучения черного тела.



Фиг. 25. Расчетный спектр испускания с учетом отражений от двух границ слоя плазмы (из работы Френча, Клотьева, Бачински [108]).

Видно, что излучение изотропной плазмы при низкой частоте столкновений и четко определенных границах приближается к излучению черного тела на частоте, непосредственно прилегающей (со стороны больших значений) к плазменной частоте.

принимать любые возможные значения, совместимые с дисперсионным уравнением для волны. Резкий излом при  $\omega = \omega_p$  имеет тогда место только при низких давлениях ( $\nu/\omega \ll 1$ ) и становится все менее и менее заметным по мере увеличения затухания из-за столкновений. Такую несколько вольную трактовку теории переноса можно оправдать только более точным исследованием, проведенным в § 3 гл. 4.

Показатель преломления излучающей плазмы может на определенных частотах существенно отличаться от единицы; это означает, что излучение испытывает отражение на границах. Если границы неровные, интенсивность  $I_\omega$  можно рассчитать по формуле (1.142). Однако если они гладкие, падающие и отраженные от граничного слоя волны будут интерферировать между собой, что скажется на спектре испускания. На фиг. 25 показан такой спектр, рассчитанный для  $\nu/\omega_p = 10^{-2}$  и  $L = 5\pi c/\omega_p$  (ср. с фиг. 24)<sup>1)</sup>. Чем больше значение  $\nu/\omega_p$  и чем больше  $L$ , тем меньше становятся эффекты

<sup>1)</sup> Для учета эффектов интерференции нужно решить граничную задачу методом, изложенным в § 3 гл. 4, см. (4.68).

интерференции. Отметим, что интенсивность  $I_\omega$  быстро уменьшается на частотах  $\omega < \omega_p$ . Это связано с тем, что величина  $v/\omega_p$  выбрана небольшой. Ситуация, изображенная на фигуре, исключительно редко может встретиться на практике, поскольку границы плазмы обычно достаточно размытые.

#### § 4. Столкновения электрон — ион (классическая механика)

Поскольку большая часть материи находится в ионизованном состоянии с довольно высокой степенью ионизации (за исключением таких своеобразных мест, как Земля), то тормозное излучение от электрон-ионных столкновений является значительно более распространенным, чем испускание при столкновениях электронов с атомами. Расчеты спектра испускания нерелятивистского электрона, движущегося по классической орбите вокруг свободного иона, проведены в работах [33, 86, 87]. Хотя эти расчеты являются математически строгими, точный диапазон их применимости к реальной плазме неясен. Связано это с тем, что силы Кулона являются дальнедействующими, и поэтому модель парных столкновений нелегко оправдать. Чтобы эта модель была верна, плазма непременно должна быть очень разреженной, и поскольку около плазменной частоты проявляются коллективные эффекты, можно ожидать, что область применимости будет при  $\omega \gg \omega_p$ . Более детально вся проблема будет исследована в гл. 5.

Свободно-свободный переход электрона в кулоновском поле иона с зарядом  $Ze$  соответствует классической гиперболической траектории электрона, показанной на фиг. 26 (ион считается положительным). Из закона сохранения энергии и импульса получим обычные уравнения, описывающие орбиту:

$$r = b_0 \frac{\mathcal{E}^2 - 1}{1 - \mathcal{E} \cos \theta}, \quad (3.51)$$

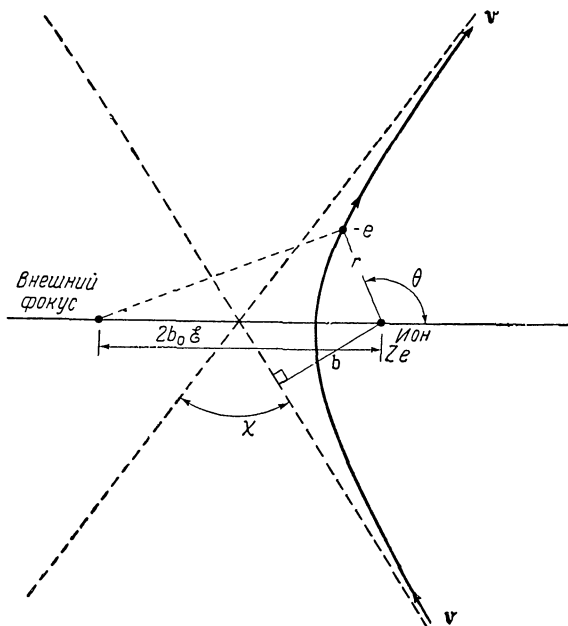
где параметр  $b_0$  определяется следующим образом:

$$b_0 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}, \quad (3.52)$$

а эксцентриситет  $\mathcal{E}$  орбиты связан с углом рассеяния  $\chi$  и параметром удара  $b$  соотношением

$$\mathcal{E}^2 - 1 = \text{ctg}^2 \frac{\chi}{2} = \left( \frac{b}{b_0} \right)^2. \quad (3.53)$$

Последнее выражение выявляет смысл  $b_0$ : это такая величина параметра удара  $b$ , при которой электрон испытывает отклонение на  $90^\circ$ , что имеет место в случае, когда потенциальная энергия электрона равна удвоенной кинетической энергии.



Фиг. 26. Гиперболическая траектория электрона в поле положительного иона.  $b$  — параметр удара,  $\xi$  — эксцентриситет.

Спектральная плотность энергии  $W(\omega, b)$  вычисляется по формуле (3.18), где  $\dot{v}(t)$  заменяется мгновенными компонентами (в декартовой системе координат) ускорения электрона  $\ddot{x}(t)$ ,  $\ddot{y}(t)$ , и проводится интегрирование. Алгебра утомительна и мы приведем только результат:

$$W(\omega) = \left( \frac{2e^2\omega^2}{3\pi^2\epsilon_0 c^3} \right) \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2} \right)^2 \left\{ [K'_{j\Omega}(\Omega \mathcal{E})]^2 + \frac{\mathcal{E}^2 - 1}{\mathcal{E}^2} [K_{j\Omega}(\Omega \mathcal{E})]^2 \right\} e^{\pi\Omega}, \quad (3.54)$$

где

$$\Omega = \frac{\omega b_0}{v} \quad (3.55)$$

и  $K_\nu$  — модифицированная функция Ханкеля мнимого (нецелого) порядка  $j\Omega$ . Выражение для дифференциальной испускательной способности  $\eta_\omega$  можно получить, интегрируя (3.54) по параметру удара  $b$  [см. (3.24)] от  $b = 0$  до  $b = \infty$ :

$$\eta_\omega = N_i \left( \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon_0 c^3} \right) \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m} \right)^2 \frac{1}{v} \left[ -\Omega K_{j\Omega}(\Omega) K'_{j\Omega}(\Omega) \right] e^{\pi\Omega}. \quad (3.56)$$

Здесь  $K'_{j\Omega}$  означает дифференцирование по аргументу,

Если проводить вычисления для силы отталкивания (т. е. для соударения электрона с отрицательным ионом), то получится тот же самый результат, за исключением дополнительного множителя  $\exp(-2\pi\Omega)$  в правой части (3.54) и (3.56). Однако на низкочастотном конце спектра излучения, который нас сейчас интересует,  $\Omega \rightarrow 0$  и спектр тормозного излучения одинаков независимо от того, является ли «ударяемая» частица положительным или отрицательным ионом.

Можно ожидать, что испускание на частоте  $\omega$  возникает из-за столкновений, длительность которых  $\tau \approx b/v$  меньше или порядка величины обратной частоты, ибо, когда  $\omega\tau \gg 0$ , экспоненциальный множитель в (3.18) так быстро осциллирует, что вклады подинтегральных выражений уничтожаются. В этом случае имеем

$$\frac{1}{\omega} \approx \frac{b}{v} = \frac{b_0}{v} \sqrt{\mathcal{E}^2 - 1} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v^3} \sqrt{\mathcal{E}^2 - 1}, \quad (3.57)$$

откуда можно оценить эксцентриситет. Положим  $\omega = 10^{11}$  рад·сек<sup>-1</sup> и  $v = 10^8$  см/сек, тогда  $\mathcal{E} \sim 10^4$ . Таким образом, траектория частицы является практически прямой линией и низкочастотное излучение возникает при дальних столкновениях, при которых электроны испытывают малые ускорения. В результате (3.54) принимает вид

$$W(\omega) \approx \left( \frac{2e^2\omega^2}{3\pi^2\epsilon_0 c^3} \right) \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2} \right)^2 \left\{ \left[ K'_0 \left( \frac{\omega b}{v} \right) \right]^2 + \left[ K_0 \left( \frac{\omega b}{v} \right) \right]^2 \right\}, \quad (3.58)$$

где использовались приближения  $\Omega \rightarrow 0$ ,  $\Omega\mathcal{E} \rightarrow \omega b/v$ . Это в точности тот же результат, который мы получили бы, если бы с самого начала предположили, что траектория прямолинейная, как показано на фиг. 27. Первый член выражения связан с компонентой ускорения  $\ddot{y}$ , а второй член — с компонентой  $\ddot{x}$ . Зависимость  $W(\omega)$  от  $(\omega b/v)$  приведена на фиг. 28. Она подтверждает наши более ранние утверждения о том, что испускание мало при  $\omega b/v \gg 1$ .

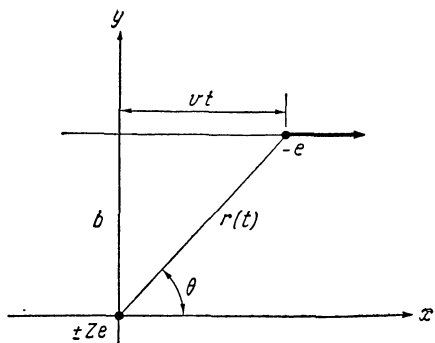
Теперь, используя в (3.56) приближение  $\Omega \ll 1$ , находим

$$\eta_\omega = N_i \left( \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon_0 c^3} \right) \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m} \right)^2 \frac{1}{v} \ln \left( \frac{2}{\gamma} \frac{4\pi\epsilon_0 m v^3}{\omega Ze^2} \right). \quad (3.59)$$

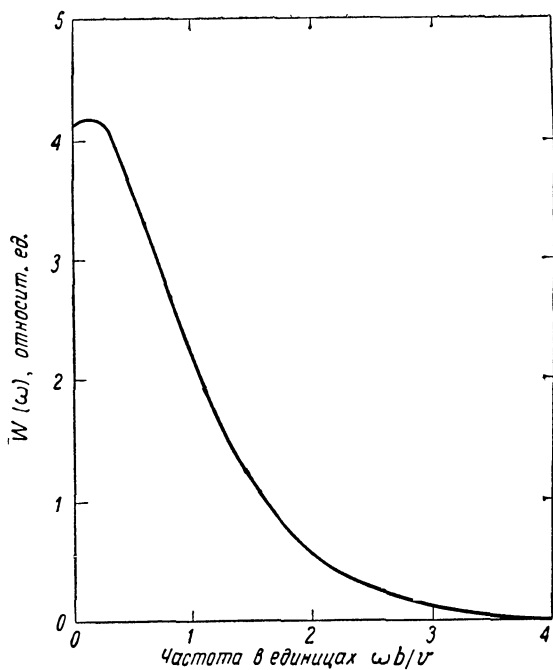
Здесь  $\gamma = 1,781 = \exp C$ , где  $C = 0,577$  — постоянная Эйлера. Аргумент логарифма можно записать (с точностью до коэффициента порядка единицы) как отношение максимального и минимального параметров удара:

$$\frac{b_{\text{макс}}}{b_{\text{мин}}} = \frac{v/\omega}{b_0}. \quad (3.60)$$

Такая форма логарифмической зависимости характерна для эффективного сечения кулоновского столкновения. Заметим, однако, что при вычислениях  $W$  или  $\eta_\omega$  не возникают расходящиеся интегралы, как это имеет место при вычислениях эффективного сечения  $Q_m$ , и поэтому нет необходимости вводить искусственное обрезание.



Ф и г. 27. Приближение прямой линии для траектории электрона.



Ф и г. 28. Частотный спектр энергии, излучаемой электроном.  
 $v$  — скорость электрона,  $b$  — параметр удара.



Выражения для коэффициентов поглощения и испускания  $j_\omega$  и  $\alpha_\omega$  можно получить, интегрируя  $\eta_\omega(v)$  по распределению  $f(v)$ , согласно (2.45) и (2.46). Предположим, что функция  $f$  является максвелловской. Тогда для одной поляризации найдем

$$j_\omega = NN_i \left( \frac{Z^2 e^6}{48\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m^2} \right) \left( \frac{m}{2\pi\kappa T} \right)^{1/2} \ln \left[ \left( \frac{2}{\gamma} \right)^{3/2} \left( \frac{\kappa T}{m} \right)^{3/2} \left( \frac{4\pi\epsilon_0 m}{Ze^2 \omega} \right) \right] =$$

$$= 2,39 \times 10^{-53} \frac{NN_i Z^2}{T^{3/2}} \left[ 19,56 + \ln \frac{T^{3/2}}{\omega Z} \right] \text{вт} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{стер}^{-1} \cdot \text{рад}^{-1} \cdot \text{сек}, \quad (3.61)$$

где  $N$  — плотность электронов в  $\text{м}^{-3}$  и  $T$  — электронная температура в  $^\circ\text{К}$ . Соответствующий коэффициент поглощения

$$\alpha_\omega = 3,86 \times 10^{-11} \frac{NN_i Z^2}{T^{3/2} \omega^2} \left[ 19,56 + \ln \frac{T^{3/2}}{\omega Z} \right] \text{м}^{-1}. \quad (3.62)$$

В табл. 2 приведены значения величины, стоящей в квадратных скобках в (3.61) и (3.62).

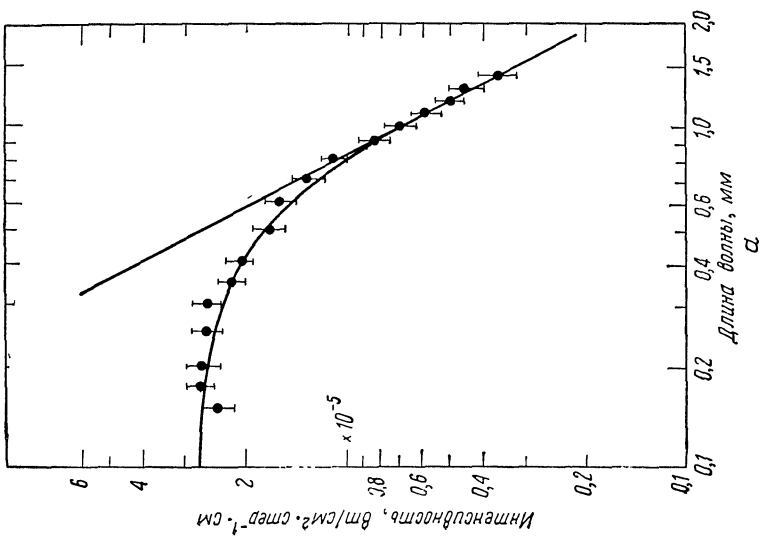
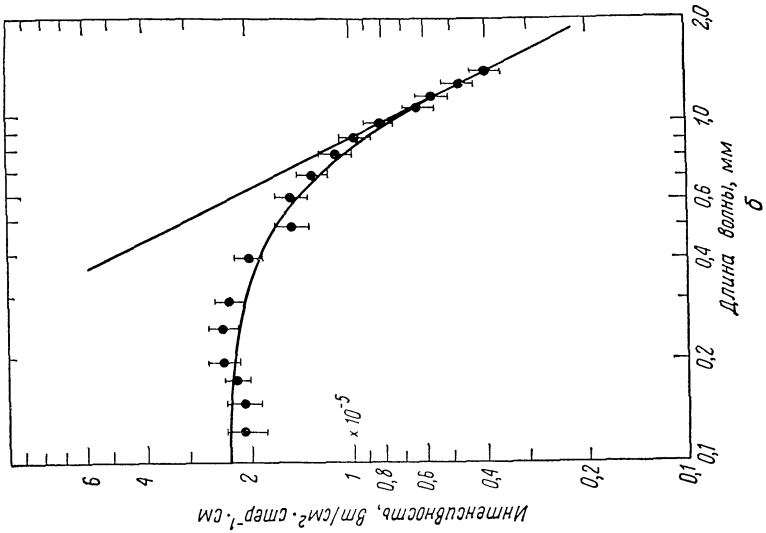
Таблица 2

Значения величины  $\left[ 19,56 + \ln \left( \frac{T^{3/2}}{\omega Z} \right) \right]$  для различных частот и температур

$\omega Z, \text{рад/сек}$	$10^7$	$10^8$	$10^9$	$10^{10}$	$10^{11}$
$T, ^\circ\text{К}$					
$10^3$	13,8	11,5	9,2	6,9	4,6
$10^4$	17,3	15,0	12,7	10,4	8,1
$10^5$	20,7	18,4	16,1	13,8	11,5
$10^6$	24,2	21,9	19,6	17,3	15,0

Выражения (3.61) и (3.62) были получены в работах [10, 87, 88] и они являются основными для интерпретации радио- и микроволнового испускания разреженной ( $\omega \gg \omega_p$ ) сильно ионизованной плазмы. Зависимость  $j_\omega$  и  $\alpha_\omega$  от частоты примерно такая же, как при электрон-атомных столкновениях (за исключением медленно меняющегося логарифмического члена), и поэтому зависимость интенсивности  $I_\omega$  от частоты имеет качественно тот же вид, какой представлен на фиг. 20.

На фиг. 29 показан экспериментально определенный спектр. Эти измерения [89] были сделаны на термоядерной установке «Зета». На этой установке плазма создается во время импульса, длящегося примерно 2 мсек. Газ — дейтерий при давлении  $5 \times 10^{-3}$  торр. Плотность электронов равна примерно  $9 \times 10^{14} \text{см}^{-3}$ , а их температура равна  $9 \times 10^4$   $^\circ\text{К}$ . Излучение принималось от столба плазмы длиной 64 см. Каждая точка на фиг. 29 является



усредненным значением по нескольким импульсам. Инфракрасное излучение детектировалось угольным болометром, стоящим после решетчатого спектрографа. Это относительно «медленный» инструмент (время разрешения порядка нескольких миллисекунд); для получения измерений с разрешением во времени (не показанных) использовался детектор на антимиониде индия [90] (время разрешения примерно 1 мксек).

Вторым примером электрон-ионного тормозного излучения является радиоизлучение, наблюдаемое из многих областей галактики. Спектр этой специфической компоненты галактического излучения (известный как «плоская компонента»), грубо говоря, похож на спектр, представленный на фиг. 29. Испускание возникает в облаках ионизованного газа, неоднородно распределенных по галактике. Облака излучают также в оптическом диапазоне длин волн и легко наблюдаются.

Радио- и оптическое излучение скоррелированы и их интенсивность пропорциональна величине

$$EM = \int_0^L NN_i ds = \int_0^L N^2 ds, \quad (3.63)$$

где  $L$  — длина луча, проходящего через облако. Эта величина известна как «мера испускания». Из формул (1.141) и (3.61) видно, что для прозрачной среды интенсивность тормозного излучения  $I_\omega$  действительно пропорциональна  $EM$ . Интенсивность оптического излучения также пропорциональна  $EM$ ; это следует из того обстоятельства, что излучение возникает при рекомбинации электронов и протонов, приводящей к образованию возбужденных атомов  $H$ , которые, излучая, переходят на более низкие энергетические уровни.

Типичная электронная температура различных галактических объектов составляет от 10 000 до 15 000° К. Однако измеренное излучение меняется в большом диапазоне. Для наиболее слабо излучающих объектов на небе, наблюдаемых только с помощью наиболее совершенных фотоэлектрических приборов,  $EM \approx 400$  парсек  $\times$   $\times$   $см^{-6}$ . (Для удобства в выражении для измеряемого излучения  $N$  определяют как число электронов в 1  $см^3$ , а  $L$  — в парсек; 1 парсек = 3,26 светового года =  $3,084 \times 10^{18}$  см.) Для облаков ионизованного газа  $EM$  изменяется примерно от 10 000 до 30 000, в то время как для одного из наиболее ярких объектов на небе, центра туманности Ориона,  $EM$  примерно равно  $8 \times 10^6$ .

## § 5. Столкновения электрон — ион (квантовая механика)

Поправки к классическим расчетам величин  $\eta_\omega$ ,  $j_\omega$  и  $\alpha_\omega$  возникают из-за волновой природы электрона, падающего на ион. Если классические электроны заменяются волновыми пакетами,

то при определении пути возникает неопределенность  $\Delta x \geq \hbar/p$ , где  $p$  — импульс электрона. Для параметров удара  $b$ , меньших  $\Delta x$ , классические представления не годятся. Поэтому, когда с высокой энергией электрон очень близко подходит к иону, можно ожидать, что классический минимальный параметр удара  $b_{\text{мин}} = b_0$ , см. (3.60), должен быть заменен на  $b_{\text{мин}} = a\hbar/mv$ , где  $a$  — числовой коэффициент порядка единицы. Не считая этой поправки, существенного различия между классическими и квантовомеханическими результатами в радио- и микроволновом диапазонах частот нет. Однако, как будет видно ниже, на высоких частотах спектры существенно различаются.

Удобно включить поправки на различные температурные и частотные эффекты в величину  $G$ , обычно называемую *множителем Гаунта* [91], и при дальнейшем обсуждении поправки на новые физические явления также включать в этот множитель. Перепишем формулы (3.59), (3.61) и (3.62) следующим образом:

$$\eta_{\omega} = nN_i \left( \frac{e^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \right) \left( \frac{Ze^2}{4\pi \epsilon_0 m} \right)^2 \frac{1}{v} \left( \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) G(v, \omega), \quad (3.64)$$

$$j_{\omega} = nNN_i \left( \frac{Z^2 e^6}{48\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m^2} \right) \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \left( \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) \bar{G}(T, \omega), \quad (3.65)$$

$$\alpha_{\omega} = \frac{NN_i}{n} \left( \frac{Z^2 e^6}{6\pi \epsilon_0^3 c m^2} \right) \left( \frac{m}{2\pi (kT)^3} \right)^{1/2} \frac{1}{\omega^2} \left( \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) \bar{G}(T, \omega). \quad (3.66)$$

Логарифмическому множителю из (3.59) в формуле (3.64) соответствует множитель  $(\pi/\sqrt{3})G(v, \omega)$ ; тогда как логарифмическим членам из (3.61) и (3.62) в формулах (3.65) и (3.66) отвечает множитель  $(\pi/\sqrt{3})\bar{G}(T, \omega)$ . Черта над  $G$  означает, что было проведено суммирование по распределению по скоростям. Коэффициент  $\pi/\sqrt{3}$  включен для согласованности с традиционным определением множителя Гаунта. Показатель преломления  $n$  введен в формулы в соответствии с обсуждениями, проведенными в § 2 гл. 2 и в § 3 гл. 3. Однако здесь множитель Гаунта не представляет собой полную сумму вкладов от всех диэлектрических эффектов. Интересная часть, которая связана с действительно коллективным характером кулоновских взаимодействий, вносится в множитель Гаунта в § 1 гл. 5.

Квантовомеханический анализ свободно-свободных переходов был проведен Зоммерфельдом [92]. В этой работе вычислены дипольные матричные элементы излучения с помощью точных (неэкранированных) волновых кулоновских функций, полученных из нерелятивистского уравнения Шредингера. В квантовомеханическом рассмотрении параметр удара  $b$  явно не проявляется, так что результат можно сравнить с классическим только после интегрирования последнего по всем значениям  $b$ . На самой первой стадии

можно провести сравнение дифференциальных испускательных способностей  $\eta_{\omega}(v)$  [или эффективных сечений излучения  $Q_r$ , см. (3.24) и (3.25)]. Тогда найдем, что  $\eta(v')$  определяется формулой (3.64), причем множитель Гаунта  $G$  имеет вид

$$G(v, \omega) = \sqrt{3} \pi \frac{x d |F(x)|^2 / dx}{(e^{2\pi q'} - 1)(1 - e^{-2\pi q})}, \quad (3.67)$$

здесь  $F(x)$  — гипергеометрическая функция  ${}_2F_1(jq'; jq; 1; -x)$ , где  $j = \sqrt{-1}$  и

$$x = \frac{4q'q}{(q' - q)^2}. \quad (3.68)$$

Величины  $q'$  и  $q$  определяются формулами

$$q' = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar v'}, \quad q = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0\hbar v}, \quad (3.69)$$

где  $v'$  и  $v$  — начальная (входная) и конечная (выходная) скорости электрона. Две скорости подчиняются условию частот Бора (3.40). Отметим, что в качестве  $v$  в знаменателе (3.64) теперь нужно взять начальную скорость  $v'$ .

Широкое использование формулы Зоммерфельда в большом диапазоне частот затруднено из-за гипергеометрической функции и следует обратиться к помощи таблиц или вычислительных машин (см. работы [93—96]). Часто, однако, можно сделать полезные приближения. На низких частотах, таких, как

$$\omega \left( \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v^3} \right) \ll 1, \quad (3.70)$$

или

$$\frac{\omega b_0}{v} \ll 1, \quad (3.71)$$

$$G = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{2mv'^2}{\hbar\omega} \right) + \psi(1) - \operatorname{Re} \psi(1 + jq') \right]. \quad (3.72)$$

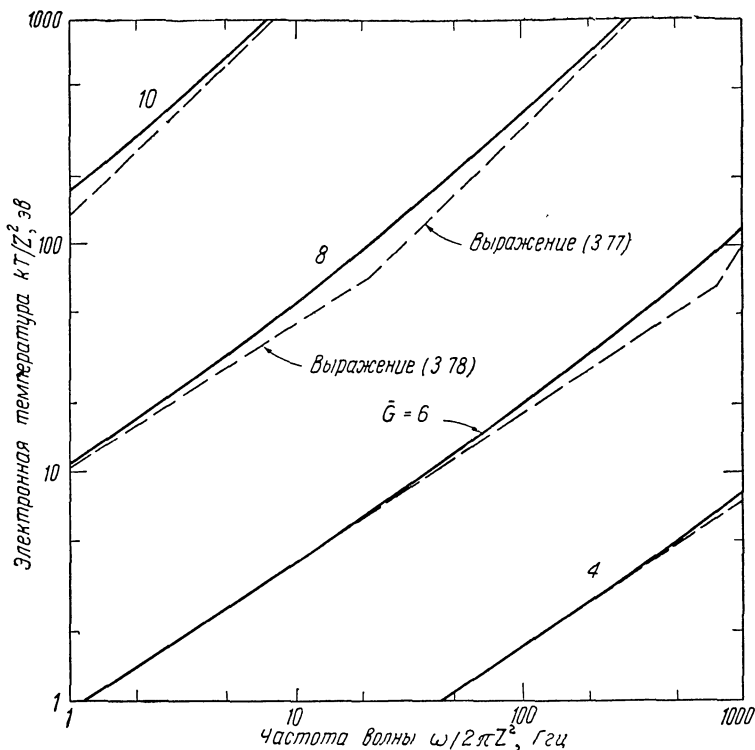
Здесь  $\operatorname{Re}$  означает действительную часть функции  $\psi$ , а последняя представляет собой логарифмическую производную гамма-функции:

$$\psi(t) = \frac{d\Gamma(t)/dt}{\Gamma(t)}, \quad (3.73)$$

$\psi(1) = -0,577$  — постоянная Эйлера;  $\operatorname{Re} \psi(jt) \rightarrow \ln t$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим теперь два предельных случая. Первый — для электронов, имеющих малую скорость, поэтому для них  $q^1 \rightarrow \infty$ . Тогда

$$G(v, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{2}{v} \frac{4\pi\epsilon_0 m v^3}{\omega Z e^2}; \quad (3.74)$$



Фиг. 30. Кривые для множителя Гаунта в случае низкочастотного излучения, показывающие переход от низких к высоким температурам электрона (из работы Хелда и Уортона [98]).

Это — классический результат, см. формулу (3.59). Вторым случаем — для электронов, имеющих большую скорость, поэтому для них  $q' \rightarrow 0$ . Тогда

$$G(v, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{2mv^2}{\hbar\omega}. \quad (3.75)$$

Отметим, что последнюю формулу можно получить, подставляя в логарифм минимальный и максимальный параметры удара, определяемые формулами

$$b_{\text{мин}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\hbar}{mv}, \quad b_{\text{макс}} = \frac{2}{\gamma} \frac{v}{\omega}. \quad (3.76)$$

Чтобы получить усредненный множитель Гаунта  $\bar{G}$  (следовательно,  $j_\omega$  и  $\alpha_\omega$ ) для плазмы, состоящей из горячих электронов,

проинтегрируем выражение (3.64) по всему распределению электронов по скоростям. Остер [87] нашел

$$\bar{G}(T, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{4}{\gamma} \frac{\kappa T}{\hbar \omega} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[ 26,41 + \ln \frac{T}{\omega} \right]; \quad (3.77)$$

это выражение является асимптотическим пределом для высоких (но не релятивистских) температур, который следует сравнивать с соответствующим пределом для низких температур, определяемым (3.61) и (3.62):

$$\bar{G}(T, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[ 19,56 + \ln \frac{T^{3/2}}{\omega Z} \right]. \quad (3.78)$$

Если экстраполировать эти два предела, они пересекутся при температуре  $(8,9 \times 10^5 Z^2)^\circ \text{K}$ . Конечно, переход между двумя режимами происходит постепенно; детали перехода изучались в работах [97, 98, 119]. Результаты работы [98] приведены на фиг. 30, где пунктирными линиями представлены данные асимптотические выражения.

**Излучение на высоких частотах.** Обычно используются два высокочастотных приближения формулы Зоммерфельда. Приближение Борна

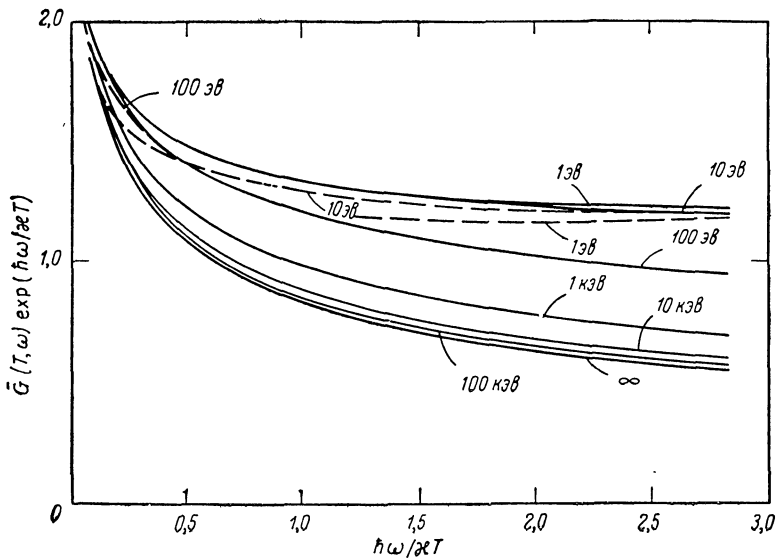
$$G(v, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{q + q'}{q - q'} \quad (3.79)$$

применимо при  $q' \ll 1$  и является квантовомеханическим аналогом приближения, при котором классическая орбита электрона считается прямой линией (см. § 4 настоящей главы). Эльверт [99] получил приближение, справедливое в значительно большем диапазоне энергий

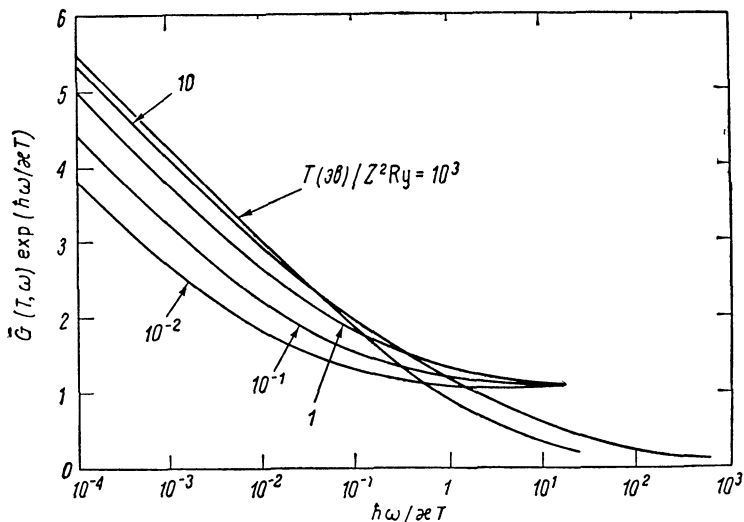
$$G(v, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{q}{q'} \frac{1 - e^{-2\pi q'}}{1 - e^{-2\pi q}} \ln \frac{q + q'}{q - q'}. \quad (3.80)$$

Интегрируя по всему максвелловскому распределению по скоростям, можно получить спектр  $j_\omega$  или  $\alpha_\omega$ . На фиг. 31а показаны результаты численного интегрирования, проведенного Грином [94]. По оси ординат отложена величина  $\bar{G}(T, \omega) \exp(\hbar\omega/\kappa T)$ , а по оси абсцисс  $(\hbar\omega/\kappa T)$ . Различные кривые относятся к разным температурам электронов. Более детальные расчеты, проведенные в широком диапазоне частот, приведены в работе [95]; эти результаты показаны на фиг. 31б.

На фиг. 31а видно, что на частотах  $\hbar\omega/\kappa T \gg 1$  интенсивность излучения уменьшается примерно как  $\exp[-\hbar\omega/\kappa T]$ . Такая зависимость от частоты отражает экспоненциальное изменение энергии при максвелловском распределении электронов по скоростям. При интегрировании  $\eta_\omega(v')$  по скоростям частицы закон сохранения



Фиг. 31а. Множитель Гаунта для высокочастотного излучения иона водорода,  $Z=1$  (из работы Грина [94]). Пунктирная кривая – точное выражение; сплошная – приближение Эльверта. Кривая, обозначенная  $\infty$ , рассчитана по формуле (3.81).



Фиг. 31б. Множитель Гаунта для низких и высоких частот излучения. Кривые приведены для различных температур электронов, выраженных в единицах  $T(\text{эв})/Z^2 R_y$ , где  $R_y = 13,6 \text{ эв}$  – постоянная Ридберга.



энергии требует, чтобы  $v'_{\text{мин}} = (2\hbar\omega/m)^{1/2}$ . Этот нижний предел интегрирования и предполагаемое максвелловское распределение по скоростям приводят к примерно экспоненциальному уменьшению  $j_{\omega}$  с увеличением частоты  $\omega$ .

Важно отметить, что формула (3.66) для  $\alpha_{\omega}$  неприменима на высоких частотах, так как при ее выводе из условия

$$\frac{j_{\omega}}{\alpha_{\omega}} = n^2 B_0(\omega, T)$$

предполагалось, что  $B_0$  определяется приближением Рэля — Джинса (2.14). Чтобы получить выражение для  $\alpha_{\omega}$ , справедливое на высоких частотах, нужно использовать формулу (2.10) для  $B_0(\omega, T)$  и формулу (3.65) для  $j_{\omega}$ . Можно найти выражение для  $\alpha_{\omega}$ , справедливое на всех частотах; для этого следует умножить правую часть (3.66) на

$$\frac{e^x - 1}{x},$$

где  $x = \hbar\omega/kT$ . Физически этот множитель связан с вкладом в излучение от спонтанного испускания.

В приближении Борна интегрирование по скоростям можно провести аналитически; это дает

$$\bar{G}(T, \omega) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} e^{-\hbar\omega/2kT} K_0\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right). \quad (3.81)$$

На низких частотах выражение (3.81) сводится к выражению (3.77), а на высоких частотах мы имеем

$$\bar{G}(T, \omega) = \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{e^{-\hbar\omega/kT}}{\sqrt{\hbar\omega/kT}}. \quad (3.82)$$

В связи с этим следует отметить: мы таким образом определили множитель Гаунта, что в него включили всю зависимость  $j_{\omega}$  от частоты (за исключением зависимости  $n$  от частоты). В литературе по этому вопросу у множителя Гаунта часто выделяют экспоненциальную часть. Связь такая:

$$\bar{G}(\text{здесь}) = e^{-\hbar\omega/kT} \bar{g} \text{ (в других местах)}. \quad (3.83)$$

Полное тормозное излучение можно получить, интегрируя  $j_{\omega}$  по всем частотам. Найденный результат (для одной поляризации) имеет вид

$$\begin{aligned} j &= NN_i \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{Z^2 e^6}{96\pi^4 \epsilon_0^3 \hbar mc^2} \left(\frac{kT}{mc^2}\right)^{1/2} \bar{G} = \\ &= \frac{1,43}{8\pi} \times 10^{-40} NN_i Z^2 T^{1/2} \bar{G} \text{ (в } \text{вт} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{стер}^{-1}\text{)}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

где  $\overline{\overline{G}}$  означает множитель Гаунта, проинтегрированный по частоте. На фиг. 32 показана зависимость  $\overline{\overline{G}}$  от  $T$  для ядра водорода ( $Z = 1$ ). В приближении Борна интегрирование можно провести аналитически, что дает

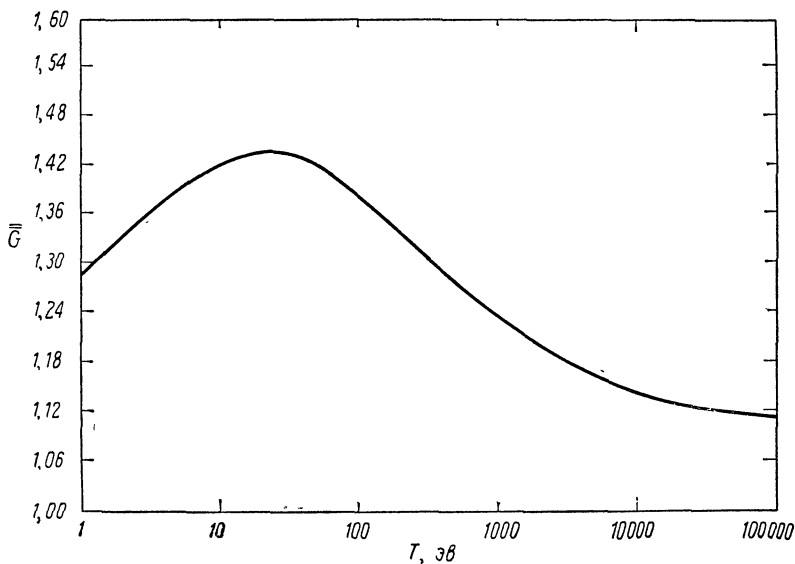
$$\overline{\overline{G}} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}. \quad (3.85)$$

При энергиях выше 5 кэв величина  $\overline{\overline{G}}$ , определяемая формулой (3.85), отличается от точного значения меньше чем на 5%.

Законы подобия для  $j_\omega$  и  $j$ , описывающие переход от водородной плазмы к плазме с большим значением  $Z$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{j_\omega(\hbar\omega; \kappa T)}{NN_i} \Big|_Z &= Z \frac{j_\omega(\hbar\omega/Z^2; \kappa T/Z^2)}{NN_i} \Big|_{\text{Водород}}, \\ \frac{j(\kappa T)}{NN_i} \Big|_Z &= Z^3 \frac{j(\kappa T/Z^2)}{NN_i} \Big|_{\text{Водород}}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

**Важность тормозного излучения в термоядерных реакторах.** Тормозное излучение налагает определенные ограничения на работу будущих термоядерных реакторов синтеза. Для ядерного горючего с малым значением  $Z$  выделение энергии эффективно конкурирует



Фиг. 32. Множитель Гаунта для излучения, проинтегрированного по всем частотам,  $Z = 1$  (из работы Грина [94]).

Кривая получена численным интегрированием формулы Зоммерфельда (3.67).

с потерями энергии на тормозное излучение. Как выделение энергии, так и потеря энергии зависят от произведения  $N^2$  на некоторую возрастающую функцию температуры  $T$ . При низкой температуре  $T$  потери на тормозное излучение превышают выделение энергии, а при высокой температуре  $T$  — наоборот. Рассмотрим D—D-реактор, в котором сжигается только дейтерий и который работает (если бы он был возможен) в отсутствие удерживающего магнитного поля. Найдем тогда, что температура поджига, при которой может осуществляться самоподдерживающаяся реакция, равна примерно 36 экв ( $\sim 4,2 \times 10^8$  °K); для D—T-реакции — около 4 экв [100, 101]. Наличие удерживающего магнитного поля усложняет проблему энергетического баланса, который будет рассмотрен в § 4 гл. 6.

Поскольку испускание сильно зависит от  $Z$ , очень вредными для реактора являются примеси с высоким значением  $Z$ . Рассмотрим реактор, у которого ядерное горючее с  $Z = 1$  имеет плотность  $N_i$ . Пусть плотность примесных атомов с  $Z_X$  равна  $N_{iX}$ . Легко показать на основании (3.84) и (3.86), что при фиксированном значении  $N_i$  энергия, теряемая на тормозное излучение, возрастает в

$$fZ_X(1 + Z_X + fZ_X^2) \text{ раз,}$$

где  $f = N_{iX}/N_i$ . Поэтому 1% примеси атомов кислорода увеличивает потери энергии на 77%. Такое количество примеси повышает температуру поджига от 36 экв до примерно 80 экв.

При этих расчетах температур поджига предполагалось, что тормозное излучение имеет пренебрежимо малое самопоглощение. Проверим теперь это предположение.

В пределе сильного самопоглощения на всех частотах плазма излучает как черное тело и поток энергии по закону Стефана — Больцмана определяется выражением

$$F = \sigma T^4 = 5,67 \times 10^{-8} T^4 \text{ вт/м}^2.$$

[Для получения этого результата формула (2.10) была проинтегрирована по всем частотам, умножена на 2 для учета обеих поляризацій и было использовано указанное выше соотношение  $F = \pi I$ , см. (1.101).] Термоядерная плазма с  $T = 10^8$  °K будет теперь излучать примерно  $10^{21}$  вт/см<sup>2</sup>, и немислима реакция, которая могла бы компенсировать это огромное количество энергии. К счастью, плазма лабораторных размеров, как видно будет далее, не излучает как черное тело. (Конечно, в очень маленьком диапазоне частот плазма может действительно излучать как черное тело, и примеры такого излучения видны на фиг. 24, 25 и 29.)

Рассмотрим плазменную сферу радиусом  $a$ . Чем больше  $a$ , тем больше реабсорбция, и это продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто такое положение, когда объемное излучение будет точно

равно поверхностному излучению (поверхность излучает как черное тело). В этом случае найдем

$$a \approx 1,2 \times 10^{33} \frac{T^{7/2}}{NN_i Z^2 \bar{G}} \quad (\text{в м}).$$

Для плазмы с  $T = 10^8$  К,  $N = 10^{17}$  см<sup>-3</sup>,  $Z = 1$ ,  $\bar{G} = 2\sqrt{3}/\pi$ ,  $a \approx 10^{17}$  см!

Заметим, что величина  $1/a$  определяет эффективный коэффициент поглощения  $\alpha_{\text{эфф}}$ , проинтегрированный по частоте. Для плазмы с характерным размером  $L$  безразмерный параметр

$$\tau \equiv \alpha_{\text{эфф}} L = 8,4 \times 10^{-34} \frac{NN_i Z^2 \bar{G} L}{T^{7/2}};$$

он является мерой, показывающей, насколько излучение данной среды приближается к излучению черного тела. Детальный анализ этой проблемы, проведенный Бабиковым и Коганом [102], приводит к характерному параметру, аналогичному уже упомянутому:

$$\tau' = 3,4 \times 10^{-33} \frac{NN_i Z^2 L}{T^{7/2}}.$$

По мере возрастания  $\tau'$  излучение стремится к излучению черного тела при температуре  $T$ . Найдено, что, когда  $\tau' \approx 25$ , интенсивность достигает половины своего максимального значения.

## § 6. Излучение частично ионизованного газа

В частично ионизованном газе полный коэффициент испускания является суммой вкладов от электрон-атомных и электрон-ионных столкновений:

$$j_{\omega} (\text{полный}) = j_{\omega} (ea) + j_{\omega} (ei). \quad (3.87)$$

Чтобы определить, какой процесс является преобладающим, нужно сравнить величины (3.37) и (3.61) [или (3.65)]. С этой целью примем, что частота электрон-атомных столкновений  $\nu(v)$  не зависит от скорости, и запишем

$$\nu = bN_a, \quad (3.88)$$

где  $b$  — константа и  $N_a$  — плотность атомов. Вычислив интеграл из (3.37) в предположении максвелловского распределения электронов по скоростям, найдем

$$j_{\omega} (ea) = 6,56 \times 10^{-48} N_a N b T \quad (\text{в вт} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{стер}^{-1} \cdot \text{рад}^{-1} \cdot \text{сек}) \quad (3.89)$$

и отношение двух коэффициентов испускания

$$\frac{j_{\omega} (ei)}{j_{\omega} (ea)} \approx 6,5 \times 10^{-6} \frac{N_i Z^2}{N_a} \frac{\bar{G}(T, \omega)}{bT^{9/2}}. \quad (3.90)$$

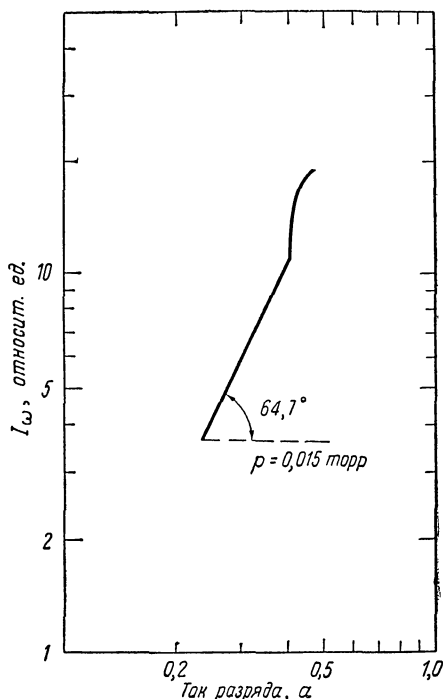
Положим  $T = 10^4$  °К и  $\omega = 10^{10}$  рад/сек, в этом случае  $\bar{G} \approx 5,7$ . Рассмотрим гелий, для которого  $b \approx 7 \times 10^{-14}$ , как можно найти из табл. 2. Тогда из (3.90) (при  $Z = 1$ ) получаем

$$\frac{j_{\omega}(ei)}{j_{\omega}(ea)} \approx 5 \times 10^2 \frac{N_I}{N_a},$$

откуда видно, что когда степень ионизации порядка 1%, испускание из-за кулоновских столкновений уже превосходит испускание

Фиг. 33. Зависимость интенсивности излучения положительного столба разряда на постоянном токе в парах цезия от тока в условиях, когда преобладающими являются кулоновские столкновения (см. фиг. 21) (из работы Терлоува [109]).

Радиус разрядной трубки 0,8 см. Для уменьшения радиальной диффузии приложено аксиальное магнитное поле, примерно равное 600 гс. Плотность электронов, соответствующая крутому излому кривой при частоте  $\omega \approx \omega_p$ , равна примерно  $10^{12}$  см $^{-3}$  (см. § 3 настоящей главы).



из-за электрон-атомных столкновений. Баланс очень чувствителен к температуре: при малых величинах  $T$  даже в очень слабо ионизованной плазме преобладают кулоновские взаимодействия. Этот факт использовался в работах [103—105, 133]—плазме разрешилось распадаться до комнатной (и даже ниже) температуры при устранении источника возбуждения. Так, несмотря на то, что в этих работах процент ионизации плазмы был меньше  $\sim 10^{-2}$ , ее поведение с точки зрения столкновительных эффектов было как у среды с высокой степенью ионизации.

Такого типа поведение плазмы обнаружено также в равновесных разрядах в парах щелочных металлов. Например, потенциал

ионизации цезия равен только 3,89 эв и поэтому его легко ионизовать малой входной мощностью. Равновесная электронная температура низка. Результаты измерений излучения такого разряда приведены на фиг. 33. По оси ординат отложена интенсивность излучения на частоте 9000 Мгц; по оси абсцисс отложен ток разряда, который практически пропорционален средней плотности электронов  $N$ . При малых токах, которым соответствует прямая линия в двойном логарифмическом масштабе, плазма является оптически тонкой и интенсивность излучения пропорциональна  $j_\omega$ . Из наклона кривой видно, что  $j_\omega \sim N^2$ ; это соответствует испусканию при кулоновских столкновениях. Причина излома кривой при  $\omega \approx \omega_p$  уже обсуждалась в § 4 настоящей главы. Горизонтальная часть кривой соответствует излучению черного тела. Электронная температура, оцененная по этой предельной величине, приблизительно равна 3000° К.

**Эффективная частота столкновений и другие вспомогательные величины, удобные для расчета.** Для облегчения расчетов часто полезно определить эффективную частоту столкновений и выразить все нужные формулы через этот параметр.

Рассмотрим вначале слабо ионизованную плазму, в которой преобладают столкновения с атомами. Тогда можно записать формулу (3.49) для коэффициента поглощения в виде

$$\alpha_\omega = \frac{1}{n} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\nu_{\text{эфф}}(ea)}{c}, \quad (3.91)$$

где

$$\nu_{\text{эфф}}(ea) = \frac{\int \frac{1}{2} m v^2 \nu(v) f(v) d^3v}{\int \frac{1}{2} m v^2 f(v) d^3v} \quad (3.92)$$

— эффективная частота столкновений; она равна «физической» величине  $\nu$ , когда последняя не зависит от скорости. При выводе формул (3.91) и (3.92) предполагалось для простоты, что функция  $f$  является максвелловской; предполагалось также, что  $v^2 \ll \omega^2$ , т. е. знаменатель в подынтегральном выражении в (3.49) можно аппроксимировать единицей. Это не сильно ограничивает значения частоты  $\omega$ , поскольку большинство наблюдений проведено на частотах, значительно больших  $\nu$ .

Выражение для коэффициента испускания, так же как и дисперсионное соотношение (3.46), можно теперь записать через  $\nu_{\text{эфф}}(ea)$ . Они соответственно принимают вид

$$j_\omega = \frac{n\omega_p^2}{8\pi^3 c^3} \kappa T \nu_{\text{эфф}}(ea) \quad (3.93)$$

и

$$k^2 c^2 \approx \omega^2 - \omega_p^2 - j \frac{\omega_p^2}{\omega} \nu_{\text{эфф}}(ea). \quad (3.94)$$

В сильно ионизованной плазме можно таким же образом определить эффективную частоту столкновений; для этого нужно просто сравнить выражения (3.91) и (3.66):

$$\begin{aligned} \nu_{\text{эфф}}(ei) &= \frac{\sqrt{3}}{9\pi^{1/2}} \left( \frac{Ze^2}{m\epsilon_0} \right) \left( \frac{m}{2\kappa T} \right)^{3/2} \omega_p^2 \bar{G}(T, \omega) = \\ &= 2,07 \times 10^{-9} \frac{Z\omega_p^2}{T^{3/2}} \bar{G} = 6,60 \times 10^{-6} \frac{ZN}{T^{3/2}} \bar{G} \quad (\text{в сек}^{-1}), \end{aligned} \quad (3.95)$$

где  $N$  — в  $\text{м}^{-3}$  и  $T$  — в  $^\circ\text{К}$ . Свойства среды теперь легко выразить через  $\nu_{\text{эфф}}(ei)$ , если ввести этот параметр в (3.91), (3.93) и (3.94). Это довольно распространенная процедура (см., например, работы [10, 106, 107]).

## Флуктуации

Оставим теперь довольно ограниченную модель парных столкновений (гл. 3) и рассмотрим проблему со значительно более общей точки зрения — на основании теории флуктуаций. Заряды плазмы испытывают действие взаимных сил трения и поэтому генерируют локальные электрические и магнитные поля. Цель данной главы — вычислить спектр этих флуктуирующих полей; сначала для плазмы, находящейся в термодинамическом равновесии, а затем в более общем случае — для неравновесной плазмы. Знать спектр флуктуаций необходимо, так как он является отправной точкой для вычислений излучения поперечных электромагнитных волн в плазме. Как и в гл. 3, предположим, что среда является изотропной по своим диэлектрическим свойствам, т. е. внешние магнитные поля не рассматриваются.

### § 1. Флуктуационно-диссипативная теорема для термически равновесной среды

Спонтанно генерируемые электрические и магнитные поля в плазме вызываются силами трения между частицами. Поэтому флуктуации связаны с необратимыми процессами и проблема вывода их спектра оказывается трудным делом. Однако в ряде случаев можно связать спектр этих термодинамических флуктуаций с обобщенной восприимчивостью среды по отношению к внешнему возмущению. Примером этого является теорема Найквиста [110], которая дает количественное выражение для тепловых шумов в сопротивлении через величину сопротивления и температуру. Если  $R$  — сопротивление и  $T$  — температура, то теорема утверждает, что среднеквадратичные флуктуации напряжения холостого хода (в  $v^2$ ) определяются выражением

$$\langle V^2 \rangle = \frac{2}{\pi} \kappa T R \Delta\omega, \quad (4.1)$$

где  $\Delta\omega$  — полоса частот, в которой измеряются шумы (см. § 4 гл. 1). Теорему Найквиста можно также записать для среднеквадратичных флуктуаций тока короткого замыкания (в  $a^2$ ), а именно:

$$\langle i^2 \rangle = \frac{2}{\pi} \kappa T C \Delta\omega, \quad (4.2)$$



где  $C$  — проводимость источника. (Более детальное рассмотрение проведено в работах [110, 111]; экспериментальное подтверждение теоремы дано в работе [112].)

Выражения (4.1) и (4.2) являются частными случаями более общей теоремы [113, 114], широко известной как флуктуационно-диссипативная теорема. Она применима как к классическим величинам, так и к квантовомеханическим. В литературе имеются различные выводы этой теоремы (см., например, работы [115—117]). Ниже мы дадим классический аналог<sup>1)</sup> квантовомеханического доказательства, приведенного в работе [120].

Рассмотрим пространственно однородную среду, в которой флуктуационные процессы являются стационарными во времени (см. § 4 гл. 1), так что корреляционная функция  $\langle V(\mathbf{r}; t) V^*(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0; t-\tau) \rangle$  зависит только от  $\mathbf{r}_0$  и  $\tau$ .

Возьмем изолированную систему, находящуюся в тепловом равновесии, и обозначим ее гамильтониан через  $H_0$ . Допустим, что к системе приложена внешняя сила  $F(t)$ , вызывающая малое возмущение энергии:

$$H_1 = - AF(t). \quad (4.3)$$

Параметр  $A$  зависит от координат  $\mathbf{r}$  и импульсов  $\mathbf{p}$  системы. Например,  $F$  можно рассматривать как электрическое поле, поляризующее среду и приводящее к появлению дипольного момента  $A$ .

Среднее значение  $A$  считается равным нулю, когда  $F$  равно нулю; далее, поскольку  $A$  соответствует некоторой физической величине, значение  $A$  в момент  $t$  зависит только от значений  $F$  в предшествующие (а не последующие) интервалы времени. Это можно записать так:

$$A = \int_0^{\infty} K(\tau) F(t-\tau) d\tau, \quad (4.4)$$

где параметр  $K(\tau)$  — функция свойств среды.

Спектральные компоненты этих функций можно теперь получить при помощи преобразований Фурье. Используя (1.16), найдем

$$A(\omega) = \chi(\omega) F(\omega), \quad (4.5)$$

где  $\chi(\omega)$  — «обобщенная восприимчивость», являющаяся комплексной величиной и определяемая формулой

$$\chi(\omega) = \int_0^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (4.6)$$

<sup>1)</sup> Е. В. Ноорег, частное сообщение. См. также работу [118].

Непосредственно из (4.6) следует

$$\chi(-\omega) = \chi^*(\omega). \quad (4.7)$$

Как легко показать, это означает, что действительная сила  $F(t)$  приводит к действительному значению величины  $A$ .

Скорость изменения энергии системы равна

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (4.8)$$

где  $H$  — гамильтониан ( $H_0 + H_1$ ). Из (4.3) следует

$$\frac{dW}{dt} = -A \frac{dF}{dt}. \quad (4.9)$$

Нам теперь необходимо усреднить по времени величину (4.9). Отметим, что нас интересуют шумовые сигналы и что нужно учитывать предостережения, указанные в § 4 гл. 1. Поскольку величины  $A$  и  $F$  не имеют фурье-образов, их следует заменить обрезанными функциями, аналогичными (1.64). Чтобы не усложнять обозначения, не будем этого делать явно, а предположим, что это уже сделано.

Усредненная по времени величина (4.9) определяется формулой

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = - \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0/2} A \frac{dF(t)}{dt} dt. \quad (4.10)$$

Заменяя величины  $A$  и  $F$  их фурье-образами и используя (4.5) и (4.7), находим

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) d\omega, \quad (4.11)$$

где действительная часть спектральной плотности мощности,

$$\operatorname{Re} G(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T_0} [-\omega |F(\omega)|^2 \operatorname{Im} \chi(\omega)], \quad (4.12)$$

является мерой скорости диссипации энергии в среде на интервал частот  $d\omega$ . Выражение (4.12) показывает, что диссипация обусловлена мнимой частью обобщенной восприимчивости [ср. с (1.127)].

Теперь получим другое уравнение для  $\langle dW/dt \rangle$  и, приравнявая правые части его и (4.11), установим искомую теорему.

Рассмотрим полную систему, описываемую гамильтонианом  $H = H_0 + H_1$  и функцией распределения частиц  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ . Скорость изменения энергии определяется выражением

$$\frac{dW}{dt} = \int d\Gamma_N \frac{\partial H_1}{\partial t} f. \quad (4.13)$$

Подставляя вместо  $H_1$  его значение из (4.3), получаем

$$\frac{dW}{dt} = - \int d\Gamma_N A \frac{dF(t)}{dt} f, \quad (4.14)$$

где  $d\Gamma_N$  — элемент полного фазового пространства системы из  $N$  частиц, т. е.

$$d\Gamma_N = dx_1 \dots dx_{3N} dp_1 \dots dp_{3N}, \quad (4.15)$$

а  $f$  — функция распределения, определяемая уравнением движения Лиувилля:

$$\frac{df}{dt} = 0 = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H] \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right). \quad (4.16)$$

Квадратные скобки являются скобками Пуассона:

$$[A, B] = \sum \left( \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial x_i} \right). \quad (4.17)$$

Для случая малой силы уравнение (4.16) можно линеаризовать. Запишем

$$f = f_0 + f_1(t), \quad (4.18)$$

где  $f_0$  — функция распределения для невозмущенной системы,

$$f_0 = Z^{-1} e^{-H_0/kT}, \quad (4.19)$$

$Z$  — статистическая сумма,  $f_1(t)$  — малое отклонение от равновесия. Если мы подставим (4.18) в уравнение (4.16), пренебрежем членами второго порядка малости и учтем (4.3), то получим

$$\frac{\partial f_1(t)}{\partial t} = [H_0, f_1] - F(t) [A, f_0]. \quad (4.20)$$

Чтобы найти решение для  $f_1(t)$ , удобно использовать оператор [115, 121]:

$$jL_0 B(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \equiv [H_0, B]. \quad (4.21)$$

Тогда мы получим (4.20) в виде

$$f_1(t) = - \int_{-\infty}^t dt' F(t') e^{jL_0(t-t')} [A, f_0], \quad (4.22)$$

что легко проверить, подставляя (4.22) в (4.20). После замены переменных,  $t' = t - \tau$ , выражение (4.22) можно записать следующим образом:

$$f_1(t) = - \int_0^{\infty} d\tau F(t - \tau) e^{jL_0\tau} [A, f_0]. \quad (4.23)$$

Подставляя (4.19) в скобки Пуассона  $[A, f_0]$ , находим

$$[A, f_0] = -\frac{\dot{f}_0}{\kappa T} [A, H_0] = \frac{\dot{f}_0}{\kappa T} jL_0 A. \quad (4.24)$$

Следовательно,

$$f_1(t) = -\frac{j}{\kappa T} \dot{f}_0 \int_0^\infty d\tau F(t-\tau) e^{jL_0\tau} L_0 A. \quad (4.25)$$

Подставим теперь (4.18) и (4.25) в (4.14) и усредним по времени; это даст

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \left( \frac{j}{\kappa T} \right) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \int_0^\infty \int_0^\infty dt d\Gamma_N d\tau \dot{f}_0 \frac{dF(t)}{dt} F(t-\tau) A e^{jL_0\tau} L_0 A. \quad (4.26)$$

При получении (4.26) мы использовали равенство

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int \int dt d\Gamma_N \dot{f}_0 \frac{dF(t)}{dt} A = 0. \quad (4.27)$$

Остальные расчеты сводятся к следующему: мы производим преобразования Фурье подынтегрального выражения в (4.26), находим действительную часть и приравниваем ее к выражению (4.12). Результат получается после довольно длительных манипуляций. Он имеет вид

$$\langle A^2 \rangle = -\frac{\kappa T}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} \chi(\omega) \frac{d\omega}{\omega}, \quad (4.28)$$

где  $\langle A^2 \rangle$  означает среднее по ансамблю:

$$\langle A^2 \rangle = \int d\Gamma_N \dot{f}_0 A^2. \quad (4.29)$$

Соотношение (4.28) представляет собой формулировку флуктуационно-диссипативной теоремы в ее классической форме и применимо на частотах  $\hbar\omega/\kappa T \ll 1$ . Квантовомеханический расчет дает следующий результат, справедливый на всех частотах:

$$\langle A^2 \rangle = -\frac{\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im} \chi(\omega) \text{cth} \left( \frac{\hbar\omega}{2\kappa T} \right) d\omega. \quad (4.30)$$

Когда  $\hbar\omega/\kappa T \ll 1$ , множитель

$$\text{cth} \left( \frac{\hbar\omega}{2\kappa T} \right) \rightarrow \frac{2\kappa T}{\hbar\omega}$$

и выражение (4.30) сводится к (4.28).

Если определить спектральную плотность мощности  $P(\omega)$  выражением

$$\langle A^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega, \quad (4.31)$$

то из (4.28) следует

$$P(\omega) = -\frac{\kappa T}{\pi\omega} \operatorname{Im} \chi(\omega). \quad (4.32)$$

Теперь оказывается удобным представить результаты несколько иначе — через величину  $\langle A(\omega) A^*(\omega') \rangle$ , являющуюся спектральной корреляционной функцией [здесь  $A(\omega)$  — фурье-образ  $A(t)$ ]. Используя формулу (1.16) для усредненного по времени<sup>1)</sup> значения  $A^2(t)$ , получаем

$$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle A(\omega) A^*(\omega') \rangle e^{i(\omega - \omega')t} d\omega d\omega', \quad (4.33)$$

и непосредственно сравнивая с (4.31) и (4.32), находим

$$\begin{aligned} \langle A(\omega) A^*(\omega') \rangle &= (2\pi)^2 P(\omega) \delta(\omega - \omega') = \\ &= -4\pi \frac{\kappa T}{\omega} \operatorname{Im} \chi(\omega) \delta(\omega - \omega'), \end{aligned} \quad (4.34)$$

где  $\delta$  — дельта-функция.

Чтобы применить эти результаты к конкретным физическим процессам, требуется идентифицировать величины  $A$ ,  $\chi$  и  $F$ . Это обычно можно сделать при помощи (4.5) и одного из соотношений для энергии: (4.9) или (4.12).

Рассмотрим, например, флуктуации тока  $i(t)$  в линейной цепи и предположим, что  $V$  — приложенная извне э.д.с.. Тогда мы имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \chi(\omega) F(\omega), \\ V(\omega) &= i(\omega) Z(\omega), \\ -\omega |F(\omega)|^2 \operatorname{Im} \chi(\omega) &= |V(\omega)|^2 \operatorname{Re} [Z(\omega)]^{-1}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Первое соотношение тождественно (4.5); второе — это закон Ома, где  $Z(\omega)$  — комплексный импеданс, равный  $R + jX$ ; третье мы получили, приравнявая усредненную по времени скорость изменения энергии, определяемую (4.12), и усредненную по времени скорость, полученную из выражения  $[i(t) V(t)]$ . Для нахождения флуктуации

<sup>1)</sup> В системах, стационарных во времени, усреднения по времени и по ансамблю являются эквивалентными.

тока положим, что функция  $A(\omega) = i(\omega)$ . Тогда эти три соотношения удовлетворяются при

$$\chi(\omega) = -\frac{j\omega}{Z(\omega)} \quad \text{и} \quad F(\omega) = -\frac{V(\omega)}{j\omega}. \quad (4.36)$$

Подставляя (4.36) в (4.32) и (4.34), получаем

$$P(\omega) = \frac{\kappa T}{\pi} \frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2} \quad (4.37)$$

и

$$\langle i(\omega) i^*(\omega') \rangle = -4\pi\kappa T \frac{R(\omega)}{|Z(\omega)|^2} \delta(\omega - \omega'). \quad (4.38)$$

Выражение (4.37) является по существу формулой Найквиста (4.2). Последняя отличается от (4.37) коэффициентом 2, поскольку  $\langle i^2 \rangle$  в формуле (4.2) было определено только для положительных частот, а  $P(\omega)$  определено как для положительных, так и для отрицательных частот.

До сих пор изучались временные флуктуации такой среды, в которой обобщенная восприимчивость  $\chi$  является функцией только частоты. В «теплой» плазме должны рассматриваться пространственные флуктуации зарядов (см. § 2 гл. 1), которые приводят к тому, что восприимчивость  $\chi$  становится функцией волнового вектора  $\mathbf{k}$ .

Чтобы учесть пространственные флуктуации, необходимо провести анализ Фурье всех величин как во времени, так и в пространстве [см. (1.31)]. Однако можно расширить область применения соотношения (4.28), не повторяя все расчеты, а учитывая, что число стоячих волн, у которых волновые векторы  $\mathbf{k}$  лежат в малом элементе объема  $d^3k$ , равно  $d^3k/(2\pi)^3$ . Допуская, что (4.28) определяет флуктуации для каждой стоячей волны, проинтегрировав по всем таким волнам, получаем

$$\langle A^2(\mathbf{x}, t) \rangle = -\frac{\kappa T}{\pi} \int \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{\omega} \text{Im} [\chi(\mathbf{k}, \omega)], \quad (4.39)$$

где теперь

$$\langle A^2 \rangle = \int \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} d\omega P(\mathbf{k}, \omega) \quad (4.40)$$

и спектральная плотность мощности определяется выражением

$$P(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\kappa T}{\pi\omega} \text{Im} \chi(\mathbf{k}, \omega). \quad (4.41)$$

Для получения корреляционной функции  $\langle A(\mathbf{k}, \omega) A^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle$  поступим так же, как при переходе от (4.33) к (4.34), за исключением

того, что помимо временных преобразований Фурье дополнительно проведем пространственные преобразования Фурье

$$\langle A(\mathbf{k}, \omega) A^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = (2\pi)^5 P(\mathbf{k}, \omega) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') = \\ = - (2\pi)^5 \frac{\kappa T}{\pi\omega} \text{Im} \chi(\mathbf{k}, \omega) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'). \quad (4.42)$$

Нужно рассмотреть еще одно обобщение — на случаи, в которых имеется несколько одновременно флуктуирующих величин (например, различные компоненты электрического и магнитного полей). Если  $A_m, A_n$  — две такие величины с временным средним  $\langle A_m A_n \rangle$ , то спектральная плотность мощности имеет вид

$$P_{mn} = - \frac{\kappa T}{2\pi\omega} j(\chi_{mn}^* - \chi_{nm}), \quad (4.43)$$

где  $\chi_{mn}$  — элемент тензора восприимчивости.

Приведенные результаты были применены ко многим физическим процессам, как, например, к броуновскому движению и звуковым флуктуациям [113], к молекулярному притяжению между твердыми телами [5] и к магнитному резонансному поглощению [122]. Применения к плазме имеются в работах [117, 123—125]. Специфические применения к проблемам излучения можно найти в работах [16, 46, 126—128]. Некоторые из этих работ упоминаются в следующих параграфах.

## § 2. Флуктуации электромагнитного поля

Чтобы найти спектр флуктуаций электрического и магнитного полей, нужно связать результаты § 1 настоящей главы с уравнениями Максвелла. Это можно сделать, введя в уравнения Максвелла плотности «пробного» тока  $\mathbf{J}_s$  и «пробного» заряда  $\rho_s$  (см., например, [126, 129]):

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t), \\ \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\rho(\mathbf{r}, t) + \rho_s(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Плотности пробного тока и пробного заряда удовлетворяют условию непрерывности для заряда

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_s = 0, \quad (4.45)$$

и их средние по времени значения равны нулю. Анализ Фурье этих уравнений во времени и пространстве [ср. (1.19)] дает

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) &= \omega \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega), \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) &= -\omega \varepsilon_0 K(k, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) + j \mathbf{J}_s(\mathbf{k}, \omega), \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) K(k, \omega) &= \frac{j \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{k}, \omega)}{\omega \varepsilon_0}, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}, \omega) &= 0, \quad \omega \rho_s(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{k}, \omega), \end{aligned} \quad (4.46)$$

где  $K(k, \omega)$  — скалярный диэлектрический коэффициент изотропной плазмы.

Микроскопические токи  $\mathbf{J}_s$  и заряды  $\rho_s$  можно теперь рассматривать как источники, возбуждающие флуктуирующие электрические и магнитные поля. Поскольку спектр корреляций  $\mathbf{J}_s$  известен, уравнения Максвелла дают спектр  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

Для отождествления величин  $A$ ,  $F$  и  $\chi$ , приведенных в § 1 настоящей главы, с величинами, входящими в уравнения Максвелла, воспользуемся третьим уравнением (4.46) и будем действовать так же, как в примере (4.35) — (4.38). Найдем

$$\begin{aligned} F(\mathbf{k}, \omega) &\rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega), \\ j\omega A(\mathbf{k}, \omega) &\rightarrow -\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega), \\ \chi(\mathbf{k}, \omega) &\rightarrow \varepsilon_0 K(k, \omega). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Из (4.43) следует, что в рассматриваемой сейчас изотропной среде ( $K$  является скалярной величиной) нет корреляций между ортогональными компонентами  $\mathbf{J}_s$ . Тогда из (4.42) имеем

$$\langle \mathbf{J}_s(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{J}_s^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = - (2\pi)^5 \frac{\varepsilon_0 \omega}{\pi} \kappa T [\text{Im} K(k, \omega)] \times \\ \times \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'). \quad (4.48)$$

Выражение (4.48) можно записать через высокочастотную комплексную проводимость  $\sigma(k, \omega)$  в виде

$$\langle \mathbf{J}_s(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{J}_s^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = (2\pi)^5 \frac{\kappa T}{\pi} [\text{Re} \sigma(k, \omega)] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'), \quad (4.49)$$

где использовано соотношение <sup>1)</sup>

$$K = 1 + \frac{\sigma}{j\omega \varepsilon_0}. \quad (4.50)$$

<sup>1)</sup> Когда плазма является анизотропной из-за наличия магнитного поля, выражение (4.48) принимает вид [5, 46]:

$$\langle J_\alpha(k, \omega) J_\beta^*(k', \omega') \rangle = - (2\pi)^5 \frac{\varepsilon_0 \omega}{\pi} \kappa T \frac{K_{\beta\alpha}^* - K_{\alpha\beta}}{-2j} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'),$$

где  $K_{\alpha\beta}$  — компонента тензора диэлектрического коэффициента.



Эти выражения являются обобщением теоремы Найквиста на трехмерную среду, в которой допускается пространственная дисперсия.

Теперь уместно обсудить отдельно флуктуации продольных полей и флуктуации поперечных электромагнитных полей.

**Продольное электрическое поле**,  $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = 0$ . Для получения спектра флуктуаций продольного электрического поля нужно использовать выражение (4.48) и третье уравнение (4.46). В результате имеем

$$\langle E^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int d^3k d\omega P(k, \omega), \quad (4.51)$$

где спектральная плотность мощности  $P(k, \omega)$  определяется выражением

$$P(k, \omega) = \frac{\kappa T}{\pi\omega\epsilon_0} \operatorname{Im} \frac{1}{K_L(k, \omega)}, \quad (4.52)$$

а для корреляционной функции имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle &= (2\pi)^5 P(k, \omega) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') = \\ &= (2\pi)^5 \frac{\kappa T}{\pi\omega\epsilon_0} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{K_L(k, \omega)} \right] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Индекс  $L$  у коэффициента  $K_L$  напоминает, что рассматриваются продольные колебания.

Отметим, что величина

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E^2(\omega) \rangle = \frac{\kappa T}{2\pi\omega} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \operatorname{Im} \frac{1}{K_L(k, \omega)} \quad (4.54)$$

равна энергии в единице объема на  $d\omega$  при продольном электрическом поле. Однако такое отождествление можно провести только в случае слабого затухания (см. § 7 гл. 1).

Пространственную корреляционную функцию для флуктуаций электрических полей в двух точках  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  можно получить, обращая пространственное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega') \rangle &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int \langle \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')} d^3k d^3k'. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Подставив (4.53) в (4.55), можно провести однократное интегрирование из-за наличия  $\delta$ -функции  $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ , тогда получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega') \rangle &= \\ &= (2\pi)^2 \frac{\kappa T}{\omega\pi\epsilon_0} \delta(\omega - \omega') \int \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{K_L(k, \omega)} \right] e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

В отсутствие пространственной дисперсии, когда  $K_L$  не зависит от  $\mathbf{k}$ , проинтегрируем (4.56) по  $\mathbf{k}$ , используя соотношение

$$\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{x}), \quad (4.57)$$

в результате придем к формуле вида

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}', \omega') \rangle = (2\pi)^2 \frac{\kappa T}{\omega \pi \epsilon_0} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{K_L(\omega)} \right] \delta(\omega - \omega') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (4.58)$$

Из приведенных формул видно, что вся необходимая информация относительно спектра  $\mathbf{E}$  содержится в комплексном продольном диэлектрическом коэффициенте  $K_L(k, \omega)$ . Он получается путем решения кинетических уравнений (1.6) для всех сортов частиц, участвующих в движении.

**Поперечные электромагнитные волны,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ .** Для получения спектра флуктуаций поперечных электромагнитных волн нужно использовать полную систему уравнений Максвелла, а не просто уравнение Пуассона, как было сделано в начале параграфа. Исключим  $\mathbf{H}$  из двух первых уравнений (4.46), тогда найдем

$$\left[ k^2 - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 K_T(k, \omega) \right] \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = -j\omega\mu_0 \mathbf{J}_s(\mathbf{k}, \omega), \quad (4.59)$$

где  $K_T$  — диэлектрический коэффициент для поперечных волн. Аналогичное выражение получается для волнового вектора  $\mathbf{k}'$  и частоты  $\omega'$ . Взяв скалярное произведение (4.59) на комплексно сопряженную величину и используя (4.48), найдем искомую корреляционную функцию для флуктуаций электрического поля:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = (2\pi)^5 \frac{\kappa T}{\pi \omega \epsilon_0} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{K_{\text{эфф}}(k, \omega)} \right] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'), \quad (4.60)$$

где  $K_{\text{эфф}}$  определяется формулой

$$K_{\text{эфф}} = K_T(k, \omega) - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}. \quad (4.61)$$

Выражение для флуктуаций  $\mathbf{H}$  можно получить, используя (4.60) и систему уравнений Максвелла.

Выражение (4.60) имеет такой же общий вид, как и (4.53). Пространственную корреляционную функцию для флуктуаций поперечных полей можно найти, обращая пространственное преобразование Фурье. В результате получим уравнение (4.56), в котором  $K_L$  заменено на  $K_{\text{эфф}}$ . Заметим, однако, в связи с этим, что, хотя в плазме может отсутствовать пространственная дисперсия для поперечных волн, эффективный диэлектрический коэффициент  $K_{\text{эфф}}$  является, тем не менее, функцией  $k$  и необходимо должным образом проводить интегрирование по  $d^3k$ .

**Пример.** Вычислим спектральную плотность энергии поперечного электрического поля в бесконечной плазме, диэлектрический коэффициент которой  $K_T$  не обладает пространственной дисперсией.

Заменяя коэффициент  $K_L$  в (4.54) на коэффициент  $K_{эфф}$ , определяемый формулой (4.61), и перегруппировав множители, получим

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \langle E^2(\omega) \rangle = - \frac{\kappa T}{2\pi\omega} \frac{\text{Im } K_T}{2\pi^2} \left( \frac{\omega}{c} \right)^4 \int \frac{k^2 dk}{|k^2 - (K_T \omega^2 / c^2)|^2}. \quad (4.62)$$

Интеграл можно вычислить, проинтегрировав по контуру:

$$\int \frac{k^2 dk}{|k^2 - n^2|^2} = \frac{\pi c}{4\omega n \eta}, \quad (4.63)$$

где

$$\sqrt{K_T} = n(1 - j\eta). \quad (4.64)$$

Величины  $n$  и  $-n\eta$  — действительная и мнимая части показателя преломления. Подставляя выражения (4.63) и (4.64) в (4.62), находим

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \langle E^2(\omega) \rangle = \frac{n\kappa T \omega^2}{8\pi^2 c^3}. \quad (4.65)$$

Если плазма слабо поглощающая, то можно определить суммарную плотность электрической энергии и энергии частиц. Для нее напишем следующее выражение [ср. с (1.49)]:

$$u_{E+P} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 2 \langle E(\omega) \rangle^2 \frac{\partial \omega K_T}{\partial \omega}, \quad (4.66)$$

где  $K_T$  означает действительную часть ( $K_T \rightarrow n^2$ ), а коэффициент 2 связан с тем, что плотность  $u(\omega)$  определена только для положительных частот. Флуктуации магнитного поля  $\frac{1}{2} \mu_0 \langle H^2(\omega) \rangle$  оказываются по величине в  $n^2$  раз больше флуктуаций электрического поля (4.65). Просуммируем обе плотности энергии:

$$u_{E+P} + u_M = \frac{\kappa T \omega^2}{4\pi^2 c^3} \left( n \frac{\partial \omega n^2}{\partial \omega} + n^3 \right) = \frac{\kappa T \omega^2}{2\pi^2 c^3} n^2 \frac{\partial \omega n}{\partial \omega}; \quad (4.67)$$

это выражение точно соответствует классическому пределу плотности энергии черного тела, определяемому (2.7).

Энергию на моду колебаний можно получить, разделив (4.67) на число стоячих волн (см. § 1 гл. 2):

$$\frac{k^2}{2\pi^2} \frac{dk}{d\omega} = \frac{\omega^2 n^2}{2\pi^2 c^3} \frac{d\omega n}{d\omega}.$$

Таким образом, мы находим, что энергия на моду равна  $\kappa T$ . Используя формулы (4.65), (4.66) и замечание, следующее за

формулой (4.66), находим также, что эта энергия распределяется следующим образом:  
электрическая энергия

$$\frac{\kappa T}{2} \frac{1}{n} \frac{d\omega}{d\omega n} = \frac{\kappa T}{2} \frac{v_p \omega}{c^2},$$

где  $v_p$  и  $\omega$  — фазовая и групповая скорости соответственно;  
магнитная энергия

$$\frac{\kappa T}{2} n \frac{d\omega}{d\omega n} = \frac{\kappa T}{2} \frac{\omega}{v_p};$$

остаток — кинетическая энергия частиц.

Если положить

$$K_T = n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

то мы получим результат, который обсуждался после формулы (2.15).

### § 3. Использование флуктуационно-диссипативной теоремы для ограниченных сред

Полезное применение флуктуационно-диссипативная теорема находит себе для случая испускания излучения термически равновесным телом с произвольными поглотительной способностью, размером или формой.

Для таких тел ценность теоремы заключается не в расчетах излучения *внутри* испускающей среды. Если мы попытаемся рассчитать плотность энергии или поток в точке внутри среды, то обычно встретим затруднения (связанные с расходящимися интегралами), которые можно устранить только в пределе очень слабого затухания. Тот факт, что затруднения не встретились при получении величины  $\langle E^2 \rangle$ , определяемой выражением (4.65), является случайным. Детальное исследование этой проблемы проведено в книге Рытова [16].

Причины таких затруднений были упомянуты ранее после формулы (1.130); они обусловлены, главным образом, тем, что мы не способны определить плотность энергии, поток и т. д. в сильно поглощающей среде. Однако, согласно флуктуационно-диссипативной теореме, требуется определять эти величины не внутри среды, как в теории переноса (см. гл. 1), а только вне среды, где эти величины хорошо определены. Процедура заключается в расчете полей  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$  внутри и вне среды как функций координат и в представлении их через «пробный» ток  $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, \omega)$  [см. (4.44)]. Граничные условия на тангенциальные компоненты  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  налагаются на границе раздела среды и вакуума. Хотя, конечно, ток  $\mathbf{J}_s$  равен нулю вне среды, граничные условия позволяют выразить внешние

поля через  $\mathbf{J}_s$ . Тогда усредненные по времени значения потока или плотности энергии вне среды содержат произведения вида  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^*$ , которые в конечном итоге выпадают из ответа в силу (4.48).

Несколько таких расчетов проведены Рытовым [16] для полубесконечной среды, цилиндра и для сферы и тел внутри волноводов. Пространственная дисперсия и продольные волны не рассматривались, а обсуждались только однородные изотропные тела с однородной температурой. Несмотря на эти упрощения, расчеты оказываются трудоемкими. К счастью, для расчета излучения вне излучающего тела нет необходимости использовать на всех этапах флуктуационно-диссипативную теорему. В рамках упомянутых ограничений Рытов выводит теорему взаимности, которая существенно упрощает задачу. На основании этой теоремы излучение данного тела можно найти, если можно получить решение соответствующей проблемы дифракции. Теорема Рытова представляет собой формулировку одного из законов Кирхгофа [не путать с (2.38)], который связывает испускательные и поглощательные свойства излучателя. Однако теорема Рытова является более общей, так как учитывает рассеяние и дифракцию.

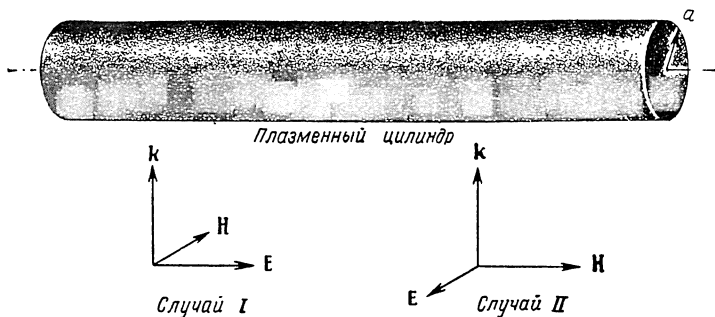
Рассмотрим наблюдателя, находящегося в фраунгоферовой зоне излучения испускающего объекта. Мощность излучения с одной поляризацией на единицу телесного угла на  $d\omega$  определяется выражением

$$\frac{P_\omega}{S} = B_0(\omega, T) A_\omega, \quad (4.68)$$

где  $B_0(\omega, T)$  — интенсивность излучения черного тела в вакууме, определяемая формулой (2.10),  $S$  — площадь поперечного сечения эмиттера или его проекция на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения,  $A_\omega$  — поглощательная способность для рассматриваемой поляризации; последняя определяется отношением усредненной по времени мощности, поглощаемой в среде, к усредненной по времени мощности, приходящейся на  $S$ , когда тело освещается воображаемой плоской волной (с той же поляризацией, что и испускаемое излучение), посылаемой из места, где находится наблюдатель. Поглощательная способность связана с переменным током  $\mathbf{J}$  и электрическим полем  $\mathbf{E}$  в теле соотношением

$$A_\omega = \frac{\int_V \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}^*) dV}{\int_S \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^*) \cdot d\mathbf{S}},$$

где  $V$  — объем тела, а  $\mathbf{E}_i$  и  $\mathbf{H}_i$  — электрическое и магнитное поля падающей «пробной» волны;  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{E}$  связаны законом Ома (1.14):  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ .



Фиг. 34. Волны, падающие на плазменный цилиндр.

Выражение (4.68) можно записать несколько иначе:

$$P_{\omega} = B_0(\omega, T) Q_{\text{погл}}(\omega), \quad (4.69)$$

где  $Q_{\text{погл}}$  — эффективное сечение поглощения, которое по традиции используется чаще поглощательной способности  $A_{\omega}$ . Определение  $Q_{\text{погл}}$  — это краевая задача при решении уравнений Максвелла. Расчеты для объектов различных форм выполнены в работах [358, 361].

Рассмотрим, например, испускание перпендикулярно оси бесконечного плазменного цилиндра, радиус которого  $a$  мал по сравнению с длиной волны  $\lambda$  в свободном пространстве (фиг. 34). Эффективное сечение поглощения цилиндра длиной  $L$  (для  $2\pi a/\lambda \ll 1$ ) определяется формулами

$$\begin{aligned} Q_{\text{погл}}(\text{I}) &= -\frac{2\pi^2 a^2 L}{\lambda} \text{Im}(K_T - 1), \\ Q_{\text{погл}}(\text{II}) &= -\frac{4\pi^2 a^2 L}{\lambda} \text{Im} \frac{K_T - 1}{K_T + 1}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

где  $K_T$  — комплексный диэлектрический коэффициент. Первое выражение (4.70) соответствует случаю I на фиг. 34, когда вектор электрического поля направлен вдоль оси цилиндра, а второе выражение (4.70) соответствует случаю II, когда  $\mathbf{E}$  перпендикулярно оси цилиндра.

Рассмотрим плазму, в которой определяющую роль играют столкновения; пусть частота электронных столкновений  $\nu$  — постоянная величина. Из (3.45) следует

$$K_T = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} - j \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} \frac{\nu}{\omega}. \quad (4.71)$$

Легко увидеть, что при слабом затухании ( $\nu \ll \omega$ ) для  $Q_{\text{погл}}(\text{II})$  имеет место резонанс на частоте  $\omega = \omega_p / \sqrt{2}$  — на этой частоте испускание сильно возрастает [для  $Q_{\text{погл}}(\text{I})$  резонанса нет]. Однако наблюдалось много дополнительных резонансов, которые не объясняются данной теорией. Мы вернемся к этим резонансам в § 6 гл. 5; здесь же только отметим, что теория имеет недостаток: в ней пренебрегается пространственной дисперсией и, следовательно, возможностью распространения продольных волн.

Для частного случая излучения от полубесконечной среды, ограниченной плоской поверхностью, формула (4.68) принимает вид

$$I_{\omega} = \frac{P_{\omega}^{(\parallel, \perp)}}{S} = B_0(\omega, T) [1 - \Gamma_{\omega}^{(\parallel, \perp)}], \quad (4.72)$$

где  $\Gamma_{\omega}$  — коэффициент отражения от поверхности,  $A_{\omega} = (1 - \Gamma_{\omega})$ ; индексы  $\parallel$  и  $\perp$  означают поляризацию, параллельную и перпендикулярную плоскости падения, соответственно (для нормального падения  $\Gamma_{\omega}^{\parallel} = \Gamma_{\omega}^{\perp}$ ). Коэффициенты отражения определяются хорошо известными соотношениями Френеля (см. работу [134]). Расчеты  $\Gamma_{\omega}$  и  $A_{\omega}$  для характерных параметров плазмы и различных углов падения даны в работе [135]. Независимое доказательство (4.72) непосредственно следует из рассмотрения баланса между потоком, покидающим тело в данном направлении, и потоком, падающим на него от воображаемого черного тела той же температуры, расположенного на бесконечности.

Пусть  $I_{\omega}$  — интенсивность излучения (с одной из двух характерных поляризаций) в заданном направлении от полубесконечного тела. Тело принимает интенсивность  $B_0(\omega, T)$ , при этом  $\Gamma_{\omega} B_0(\omega, T)$  отражается от поверхности. При равновесии два противоположно направленных потока равны, что и приводит к формуле (4.72).

Необходимое предостережение: формулы (4.68), (4.69) и (4.72) обычно неприменимы к магнитоактивной плазме. Это связано с тем, что

$$A_{\omega}(\mathbf{r}) \neq A_{\omega}(-\mathbf{r}),$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор по направлению к наблюдателю; следовательно, обычная теорема взаимности, представляющая собой формулировку одного из законов Кирхгофа, неприменима (за исключением некоторых выделенных направлений распространения и некоторых характеристических мод). Эту трудность иногда можно обойти, если считать, что  $A_{\omega}$  — поглощательная способность в направлении, в котором воспринимается излучение. Тогда справедливо утверждение: «хороший излучатель является также хорошим поглотителем волн, распространяющихся в том же самом направлении».

#### § 4. Испускание и поглощение продольных волн при наличии столкновений

Спектр продольных флуктуаций в термически равновесной плазме всецело определяется комплексным продольным диэлектрическим коэффициентом  $K_L(k, \omega)$ , в который обычно вносят свой вклад все сорта зарядов плазмы.

Рассмотрим вначале спектр на достаточно высоких частотах, при которых ионы не успевают следовать за быстрыми колебаниями поля и единственно интересным сортом частиц являются электроны. Значение  $K_L$  для электронных плазменных колебаний приближенно определяется формулой Бома и Гросса (1.35). Однако эта формула не учитывает затухания. Допустим, что затухание возникает из-за столкновений. Их нужно приближенно включить в формулу (1.35)<sup>1)</sup>, заменив массу  $m$  всюду, где она встречается (за исключением  $v_0$ ), на  $m[1 - j(\nu/\omega)]$  (здесь  $\nu$  — частота столкновений). К такой замене мы придем, если подставим член, описывающий затухание, в уравнение движения:  $m\dot{\nu} + m\nu v = eE$ . Тогда формула (1.35) (для малых затуханий,  $\nu/\omega \ll 1$ ) примет вид

$$K_L \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3k^2 v_0^2}{\omega^2} \right) - j \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( \frac{\nu}{\omega} \right). \quad (4.73)$$

Спектральная плотность мощности  $P(k, \omega)$ , определяемая формулой (4.52), пропорциональна

$$\text{Im} \frac{1}{K_L(k, \omega)} = - \frac{K_i}{K_r^2 + K_i^2}. \quad (4.74)$$

<sup>1)</sup> Когда используется уравнение Больцмана, то столкновения обычно представляют простым релаксационным членом [см. (3.41)]:

$$\left( \frac{\delta F}{\delta t} \right)_{\text{столкн}} = -\nu(v) (F - f) = -\nu(v) f_1,$$

где  $F = f + f_1$  ( $f$  — невозмущенная функция распределения,  $f_1$  — возмущение). Хотя такое представление является удовлетворительным для возмущений в поперечной электромагнитной волне, оно оказывается плохим для продольных колебаний. Связано это с тем, что данное соотношение не удовлетворяет закону сохранения заряда,  $\int \frac{dF}{dt} d^3v = 0$ , который существует для продольных колебаний и не существует для поперечных. Однако полуэмпирическое соотношение Батнагара — Гросса — Крука [136]

$$\left( \frac{\delta F}{\delta t} \right)_{\text{столкн}} = -\nu(v) \left[ F - f \frac{\int \nu(v) F d^3v}{\int \nu(v) f d^3v} \right]$$

удовлетворяет закону сохранения частиц. Если его использовать при получении  $K_L(k, \omega)$ , то придем к формуле (4.73) при частоте столкновений, не зависящей от скорости.



Теперь рассмотрим частоту  $\omega = \omega_0$  ( $\approx \omega_p$ ), при которой знаменатель (4.74) принимает минимальное значение. Последнее имеет место при слабом затухании, когда в (4.73)  $K_r(k, \omega_0) \approx 0$ . Таким образом, в этом случае уровень флуктуаций электрического поля сильно возрастает; их интенсивность пропорциональна теперь  $1/K_L$ . Следовательно, если вычертить кривые зависимости интенсивности флуктуаций от  $k$  для различных значений  $\omega$ , то на кривой, соответствующей  $\omega = \omega_0$ , появится острый «пик» при таком значении  $k$ , для которого

$$\omega_0^2 \approx \omega_p^2 + 3k^2 v_0^2.$$

Это не является неожиданным, поскольку данное соотношение — приближенное дисперсионное соотношение для продольной волны и, таким образом, представляет «резонансное» условие для существования самой волны как естественной моды колебания плазменной среды. На частотах, отличных от  $\omega \approx \omega_0$ , при движении зарядов колебания возбуждаются на «нерезонансных» частотах.

На частотах  $\omega \approx \omega_0$  в непосредственной близости от резонансного пика, диэлектрический коэффициент можно разложить в ряд Тейлора по степеням  $(\omega - \omega_0)$  и, так как  $K_L(k, \omega_0) = 0$ , написать

$$K_L(k, \omega) \approx \left[ \frac{\partial \operatorname{Re} K_L(k, \omega)}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + j \operatorname{Im} K_L(k, \omega).$$

Тогда в пределе слабого затухания,  $\operatorname{Im} K_L(k, \omega_0) \rightarrow 0$ , имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{K_L(k, \omega)} \right] &= \pi \left[ \frac{\partial \operatorname{Re} K_L}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0}^{-1} \delta(\omega - \omega_0), \\ \frac{1}{|K_L(k, \omega)|^2} &= - \frac{\pi}{\operatorname{Im} K_L(k, \omega)} \left[ \frac{\partial \operatorname{Re} K_L}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_0}^{-1} \delta(\omega - \omega_0); \end{aligned} \quad (4.75)$$

видно, что спектральная плотность мощности  $P(k, \omega)$  при резонансе и около него не зависит от величины  $\operatorname{Im} K_L$ , до тех пор, пока она мала. Обратим внимание на то, что вышеприведенные представления через  $\delta$ -функцию имеют физический смысл только при проведении последующего интегрирования по частоте  $\omega$ , например, если мы хотим вычислить полную энергию в резонансе.

В заключение, отметим, что в частном случае электронных плазменных колебаний первое выражение (4.75) имеет более простой вид

$$\left[ \operatorname{Im} \frac{1}{K_L(k, \omega)} \right]_{\omega \approx \omega_p} \approx \frac{\pi}{2} \omega_p \delta(\omega - \omega_p).$$

**Коэффициент испускания для продольных волн.** Усредненная по времени скорость поглощения мощности определяется выражением

(1.127) и величина

$$\alpha(k, \omega) = -2\omega \operatorname{Im} K_L(k, \omega) \quad (4.76)$$

является мерой скорости поглощения мощности.

Плотность энергии на единичный интервал круговых частот на единичный объем определяется выражением (4.54):

$$u(k, \omega) = \frac{\kappa T}{2\pi\omega} \operatorname{Im} \frac{1}{K_L(k, \omega)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}.$$

В бесконечной среде при равновесии скорость испускания волн равна скорости поглощения и можно ожидать (см. § 2 гл. 2) соотношение вида

$$j_L(k, \omega) = u(k, \omega) \alpha(k, \omega), \quad (4.77)$$

где  $j_L$  — скорость испускания энергии на единичный объем на  $d\omega$ , или эффективный коэффициент испускания для продольных волн. (Термин «коэффициент испускания» сохраняется по традиции и для поперечных волн, но его нельзя путать с этой величиной.)

Подставим в (4.77) значения  $u(k, \omega)$  и  $\alpha(k, \omega)$ , тогда будем иметь

$$j_L(k, \omega) = \frac{\kappa T}{\pi} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{[\operatorname{Im} K_L(k, \omega)]^2}{|K_L(k, \omega)|^2}. \quad (4.78)$$

Этот результат получил Ростокер [117], но другим путем. Его вывод сводится к расчету электрического поля  $\mathbf{E}$ , образованного пробным электроном, движущимся со скоростью  $\mathbf{v}$  сквозь среду. Потери энергии электрона — это работа, производимая против силы  $e\mathbf{E}$ , действующей на электрон со стороны созданного им поля. Скорость потерь энергии равна  $|e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}|$  и равна скорости испускания (см. также § 6 гл. 7).

Если теперь проинтегрировать  $j_L$  вблизи резонанса,  $\omega \approx \omega_p$ , и воспользоваться выражениями (4.73) и (4.75), то для скорости испускания волн с волновыми числами между  $k$  и  $k + dk$  найдем

$$\int j_L d\omega = \kappa T \left( \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \right) v.$$

Мы вернемся к вопросу о продольных колебаниях после изучения в следующем параграфе диэлектрического коэффициента  $K_L$  для полностью ионизованной плазмы.

## § 5. Продольный диэлектрический коэффициент $K_L(k, \omega)$ для полностью ионизованной плазмы

Для определения диэлектрических свойств плазмы нужно найти токи и заряды, индуцированные электрическим полем. В частности, для получения  $K_L$  необходимо знать высокочастотную плотность пространственного заряда, индуцированного полями. Начнем с ки-

нетических уравнений (1.6). Если плазма является полностью ионизованной и горячей, мы часто можем (в хорошем приближении) полностью пренебречь столкновениями частиц, описываемыми правыми частями этих уравнений<sup>1)</sup>. Уравнение для данного сорта частиц, которое нужно тогда решить, так называемое уравнение Власова. В линеаризованной форме оно имеет вид (ср. § 3 гл. 3)

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (4.79)$$

где  $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — малое возмущение  $f(\mathbf{v})$ , вызванное переменным полем  $\mathbf{E}$ . Предполагается, что все постоянные электрические и магнитные поля равны нулю. Переменное магнитное поле также равно нулю, поскольку нас интересуют только чисто продольные колебания,  $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = 0$ .

Простейший путь решить уравнение (4.79) — это записать функцию  $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  в виде

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_1(\mathbf{k}, \mathbf{v}, \omega) e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

и подставить в (4.79), что приведет к результату

$$f_1 = - \frac{(e/m) \mathbf{E} \cdot \partial f(\mathbf{v})/\partial \mathbf{v}}{j(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) + \nu}. \quad (4.80)$$

В знаменатель выражения (4.80) введена величина  $\nu$  для математического удобства при вычислении сингулярного интеграла, который вскоре появится;  $\nu$  — частота столкновений, входящая в релаксационный член,  $-f_{1\nu}$ , который нужно ввести в правую часть (4.79). В окончательном результате частота  $\nu$  будет положена равной нулю.

Высокочастотная плотность заряда  $\rho$ , которую можно получить, подставляя (4.80) в (1.10), связана с  $\mathbf{E}$  уравнением Пуассона [третье уравнение в (4.44)]. В результате вычислений находим

$$-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} - \omega_p^2 \int \frac{\mathbf{E} \cdot \partial f(\mathbf{v})/d\mathbf{v}}{j(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) + \nu} d^3v. \quad (4.81)$$

Здесь  $\rho_s$  — плотность «пробного» заряда, который можно рассматривать как источник, возбуждающий поля (см. § 2 настоящей

<sup>1)</sup> Какую плазму можно считать горячей бесстолкновительной «власовской» плазмой, зависит от конкретного рассматриваемого явления. При некоторых условиях температура, равная доле электрон-вольта, вполне достаточна, чтобы плазма стала бесстолкновительной. Для волновых явлений обычно (хотя и не всегда) достаточно, чтобы длина волны была гораздо больше характерной длины свободного пробега между столкновениями частиц. Другими словами,  $kv_0 \gg \nu$ , где  $k$  — волновое число;  $v_0$  — тепловая скорость частиц, участвующих в колебаниях;  $\nu$  — частота столкновений.

главы). Функция распределения  $f$  нормирована на единицу и поэтому плотность заряда выносится из-под интеграла и включается в  $\omega_p$ . Исключая  $\rho_s$  с помощью уравнения непрерывности

$$\omega \rho_s = \mathbf{k} \cdot \mathbf{J}_s$$

и приравнивая результат (4.46), для продольного диэлектрического коэффициента получаем

$$K_L(k, \omega) = 1 + \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \partial f(\mathbf{v}) / \partial \mathbf{v}}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) - jv} d^3v. \quad (4.82)$$

Так как высокочастотная плотность заряда  $\rho$  и плотность тока  $\mathbf{J}$  равны линейным суммам вкладов от индивидуальных сортов зарядов, диэлектрический коэффициент для плазмы с  $i$  компонентами определяется просто формулой

$$K_L(k, \omega) = 1 + \lim_{v \rightarrow 0} \sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \partial f_i(\mathbf{v}) / \partial \mathbf{v}}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) - jv} d^3v. \quad (4.83)$$

Интеграл должен быть корректно определен при частоте  $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ , на которой возникает особенность. Рецепт для интерпретации этого интеграла дан Ландау [137] (детальное рассмотрение проведено в работах [4, 138]). Вычисление проводится так:

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(v) dv}{(\omega - kv) - jv} &= \lim_{v \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(v) (\omega - kv) + jv}{(\omega - kv)^2 + v^2} dv = \\ &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(v) dv}{\omega - kv} + j \lim_{v \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(v) v dv}{(\omega - kv)^2 + v^2} = \\ &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(v) dv}{\omega - kv} + \frac{j\pi}{k} g\left(\frac{\omega}{k}\right), \end{aligned} \quad (4.84)$$

где  $P$  — главное значение интеграла. Символически эту операцию можно записать в виде

$$\int \frac{1}{X} = P \int \frac{1}{X} + j\pi \delta(X). \quad (4.85)$$

Применив ее к (4.82), получим

$$\begin{aligned} K_L(k, \omega) &= 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2} P \int \frac{\mathbf{k} \cdot \partial f(\mathbf{v}) / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} d^3v + \\ &+ j\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} d^3v \equiv \\ &\equiv 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \phi\left(\frac{\omega}{k}, f\right), \end{aligned} \quad (4.86)$$

— это и является искомым результатом. Отметим, что до сих пор не было наложено никаких ограничений на действительную форму функции распределения  $f(v)$ .

Рассмотрим теперь только частицы одного сорта (электроны) и предположим, что распределение по скоростям максвелловское. Тогда  $\phi$  в (4.86) является функцией одного параметра:

$$x = \frac{\omega}{\sqrt{2} k v_0},$$

где

$$v_0 = \left( \frac{xT}{m} \right)^{1/2}.$$

После довольно длинных манипуляций находим

$$\phi(x) = -2x^2 \left( 1 - 2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt - j \sqrt{\pi} xe^{-x^2} \right). \quad (4.87)$$

Интеграл ошибок в этом уравнении табулирован (см., например, работу [139]). Для очень длинных волн ( $x$  велико) и очень коротких волн ( $x$  мало) имеем

$$\begin{aligned} 2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt &= 1 + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4x^4} + \frac{15}{8x^6} + \dots \quad (x \gg 1); \\ &= 2x^2 \left( 1 - \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^4}{15} - \dots \right) \quad (x \ll 1). \end{aligned} \quad (4.88)$$

На фиг. 35 дан график действительной и мнимой частей функции  $\phi(x)$ . В предельном случае длинных волн, подставляя  $\phi(x)$  в (4.86), получаем

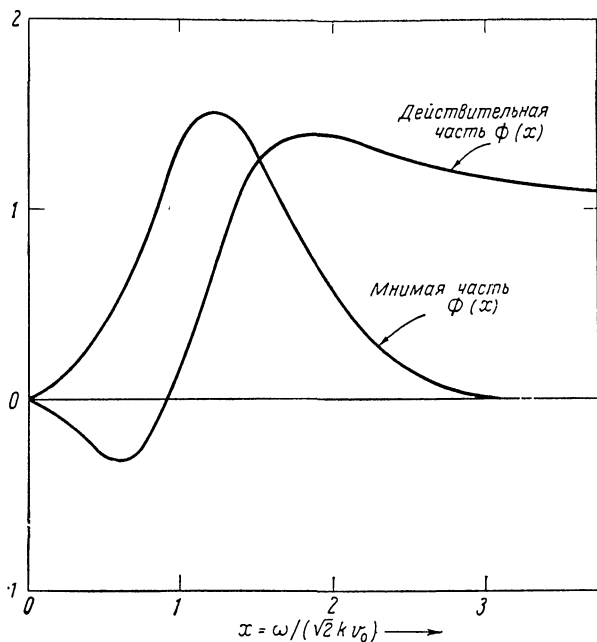
$$K_L(k, \omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left\{ 1 + \frac{3k^2 v_0^2}{\omega^2} + j \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \left( \frac{\omega}{k v_0} \right)^3 \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{k v_0} \right)^2 \right] \right\}, \quad (4.89)$$

а в предельном случае коротких волн имеем

$$K_L(k, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_0^2} - j \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega}{k v_0} \right)^3. \quad (4.90)$$

Действительная часть (4.89) представляет собой приближение Бома и Гросса [формула (1.35)]. Мнимая часть (4.89) обусловлена эффектом затухания, происхождение которого не связано со столкновениями. Этот эффект был открыт Ландау [137]. Энергия волны теряется из-за резонансного взаимодействия между высокочастотными колебаниями и теми частицами, скорости которых равны фазовой скорости волны.

Принято выражать диэлектрический коэффициент, определяемый формулами (4.86) и (4.87), через некоторую функцию  $Z(\xi)$ ,



Фиг. 35. Действительная и мнимая части функции  $\phi$ , входящей в формулу для диэлектрического коэффициента:

$$K_L(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \phi.$$

называемую плазменной дисперсионной функцией; она табулирована в работах [140, 141]. Эта функция тесно связана с функцией ошибок, но является более общей, так как ее аргумент  $\zeta$  может быть комплексным. Она и ее производная по аргументу  $Z'(\zeta)$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \pi^{1/2} Z(\zeta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-t^2) dt}{t - \zeta} && \text{для } \text{Im } \zeta < 0; \\ &= P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-t^2) dt}{t - \zeta} - j\pi e^{-\zeta^2} && \text{для } \text{Im } \zeta = 0; \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-t^2) dt}{t - \zeta} - j2\pi \exp(-\zeta^2) && \text{для } \text{Im } \zeta > 0; \end{aligned}$$

и

$$Z'(\zeta) = -2[1 + \zeta Z(\zeta)].$$

Продольный диэлектрический коэффициент, выраженный через эти функции, имеет вид

$$K_L(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} x^2 Z'(x),$$

где, как и раньше,  $x$  определяется формулой

$$x = \frac{\omega}{\sqrt{2} kv_0}.$$

Если в движении участвуют  $i$  сортов заряженных частиц, то, согласно (4.83), имеем

$$K_L(k, \omega) = 1 - \sum_i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} x_i^2 Z'(x_i),$$

где

$$x_i = \frac{\omega}{\sqrt{2} kv_{0i}}.$$

**Дисперсионное соотношение.** Соотношение  $K_L(k, \omega) = 0$  является условием существования продольной волны как естественной моды колебаний системы. Для действительных значений  $k$  это соотношение может быть удовлетворено только при комплексных значениях  $\omega$ . Можно записать  $\omega$  в виде

$$\omega(1 + j\delta); \quad (4.91)$$

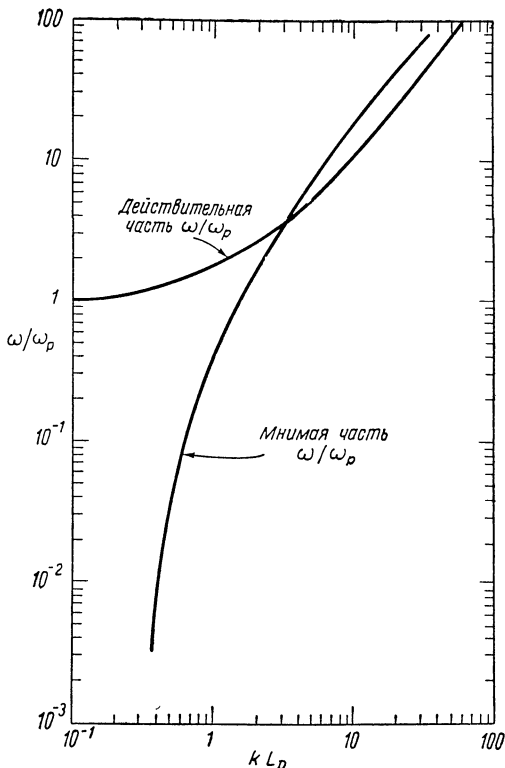
время, за которое амплитуда волны уменьшается в  $e$  раз, равно  $1/\omega\delta$ , где  $\delta$  — малая величина по сравнению с единицей, если длина волны больше дебаевского радиуса экранирования:

$$L_D = \left( \frac{\kappa T \epsilon_0}{N e^2} \right)^{1/2} = \frac{v_0}{\omega_p}. \quad (4.92)$$

При таких длинах волн хорошим приближением для  $K_L$  является (4.89). Подставляя (4.91) в (4.89) для действительной и мнимой частей  $\omega$  будем иметь

$$\begin{aligned} \omega^2 &\approx \omega_p^2 [1 + 3(kL_D)^2], \\ \delta &\approx \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{(kL_D)^3} \exp \left[ -\frac{1}{2(kL_D)^2} - \frac{3}{2} \right]. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Когда  $kL_D \ll 2$ , затухание Ландау является несущественным (фиг. 36а). С увеличением  $kL_D$  затухание вначале растет почти экспоненциально; когда  $kL_D = 1$ , то  $\delta \approx 0,24$ , и тогда колебания существенно затухают после четырех или пяти периодов. Для еще больших значений  $k$  выражения (4.93) несправедливы. Нужно найти диэлектрический коэффициент, определяемый формулами (4.86) и (4.87), для комплексных частот, используя табулированные значения функций ошибок от комплексного аргумента (см. кривые на



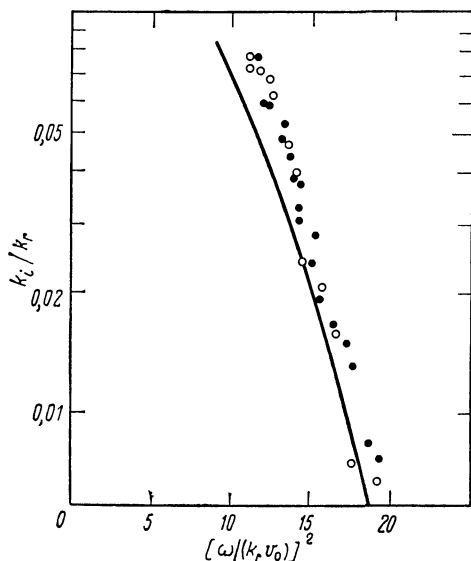
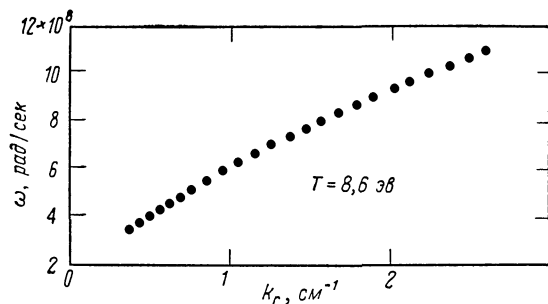
Фиг. 36а. Дисперсионные характеристики продольной волны  $K_L(k, \omega) = 0$  в бесстолкновительной плазме для действительных значений  $k$  и комплексных значений  $\omega$  (из работы Либермана и Берса [168]).

фиг. 36а, для построения которых были взяты таблицы из работы [141]). При увеличении  $k$  мы достигаем точки, в которой действительная и мнимая части  $\omega$  равны; это имеет место при  $kL_D \approx 3,3$  и  $\omega/\omega_p \approx 3,5$ . При еще больших значениях  $k$  бессмысленно говорить о продольных волнах.

Когда малая область плазмы возбуждается внешним источником с частотой  $\omega$ , продольные волны расходятся из этой области, причем их амплитуда уменьшается экспоненциально. Затухание вычисляется путем решения дисперсионного соотношения для действительного значения  $\omega$  и комплексного значения  $k$ . Когда  $k_i \ll k_r$  (индексы  $r$  и  $i$  относятся к действительной и мнимой частям соответственно), находим

$$k_i \approx \frac{\omega \delta(k_r)}{\omega} \left[ \cos \left( \frac{k_i}{k_r} \frac{\omega^2}{k_r^2 v_0^2} \right) \right] \left[ 1 + 6 \left( \frac{k_r v_0}{\omega} \right)^2 + 15 \left( \frac{k_r v_0}{\omega} \right)^4 + \dots \right]^{-1},$$





Фиг. 366. Измеренные дисперсионные характеристики продольной волны для действительных значений  $\omega$  и комплексных значений  $k$  (из работы Малмберга и Уортона [142]).

Сплошная кривая — теоретическая; черные кружки —  $T = 5,9$  эв, светлые —  $T = 8,6$  эв.

где  $\delta(k_r)$  — постоянная затухания, определяемая (4.93), а  $\omega = d\omega/dk_r$  — групповая скорость.

Существование затухания, описываемого этим уравнением, продемонстрировали Малмберг и Уортон [142] в серии прекрасных экспериментов. Высоко ионизованная плазма создавалась с помощью дугового источника — дуоплазматрона — в устройстве, на одном конце которого электроны удерживались магнитной пробкой, а на другом — отражающей электростатической концевой пластинкой. Были достигнуты: плотность электронов  $10^8$  —  $10^9$   $\text{см}^{-3}$  и электронная температура 5—20 эв. Источником возбуждаемых волн

являлась маленькая антенна, помещенная внутри плазмы; вторая, подвижная, антенна использовалась как зонд для определения аксиальной длины волны и аксиального затухания колебаний. На фиг. 36б показаны измеренные дисперсионные характеристики. Сплошная линия — теоретическая. Видно, что измеренные значения затухания хорошо совпадают с расчетной кривой.

До сих пор дискутировалось только затухание волны. Обратим теперь внимание на характеристики распространения: рассмотрим зависимость  $\omega$  от  $k_r$ , представленную на фиг. 36б. Из сравнения с фиг. 36а ясно видно, что измеренные значения не совпадают с предсказанными, сделанными для бесконечной плазменной среды. Причина заключается в том, что длина волны сравнима с радиальным размером плазменного столба и поэтому нужно решать соответствующую краевую задачу.

Влияние конечных размеров плазмы на дисперсионное соотношение рассматривалось в ряде работ, например [143—149]. Расчеты не трудны, когда движение электронов из-за наличия очень сильного аксиального магнитного поля ограничено, т. е. когда они движутся лишь вдоль оси плазменного столба ( $\omega_b \gg \omega$ ,  $\omega_b \gg \omega_p$  и электронный ларморовский радиус значительно меньше диаметра столба, как было в экспериментах). Эти условия приводят к важному упрощению: движение электронов вблизи границы плазма — вакуум не зависит от наличия границы. Следовательно, ток может протекать только вдоль оси и среда обладает «пространственной дисперсией» (см. § 2 гл. 1) только в этом направлении; продольный диэлектрический коэффициент  $K_L(k, \omega)$  определяется формулами (4.86) и (4.87), где  $k$  — волновое число вдоль столба.

Теперь можно представить волну как возмущение потенциала

$$\phi(r, \theta, z) = \phi(r, \theta) e^{-jkz}.$$

Последний должен удовлетворять волновому уравнению

$$\nabla_{r, \theta}^2 \phi - k^2 K_L(k, \omega) \phi = 0.$$

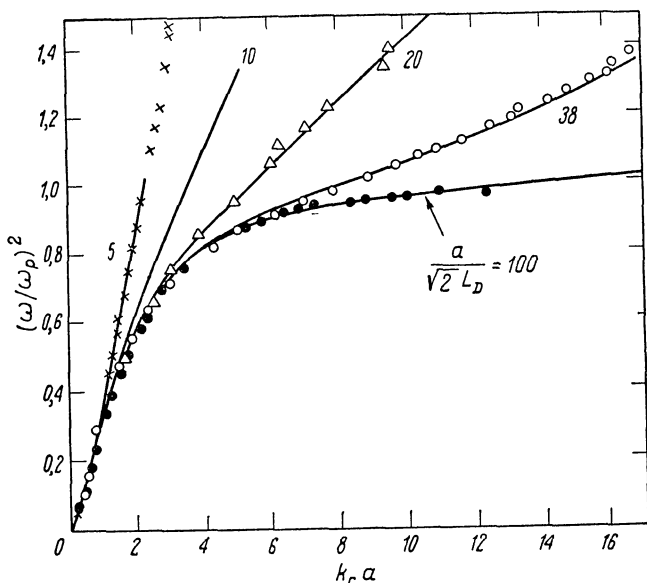
Для однородного плазменного столба радиусом  $a$  потенциал  $\phi$  имеет вид

$$\begin{aligned} \phi &= AJ_m(jkr \sqrt{K_L}) e^{im\theta}, & r \leq a; \\ &= BK_m(kr) e^{im\theta}. & r \geq a, \end{aligned}$$

где  $J_m$  и  $K_m$  — функция Бесселя и модифицированная функция Ханкеля соответственно. Непрерывность электрической индукции  $D_r$  и электрических полей  $E_z$  и  $E_\theta$  при  $r = a$  приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$\frac{J_m(jka \sqrt{K_L})}{j \sqrt{K_L} J'_m(jka \sqrt{K_L})} = \frac{K_m(ka)}{K'_m(ka)}.$$

Здесь штрих означает производную по аргументу



Фиг. 36в. Дисперсионные характеристики волн, распространяющихся вдоль однородного плазменного столба радиусом  $a$ , для низшей моды  $m=0$ .

Сплошные линии — расчетные, для пяти различных значений параметра  $a\omega_p/(\sqrt{2}v_0) \equiv a/(\sqrt{2}L_D)$ . Крестики — экспериментальные данные, полученные в работе Малмберга и Уортона [142]; точки, кружки и треугольники — экспериментальные данные, полученные в работе Баррега, Франклина и Джонса [150]. В последнем эксперименте эффективный радиус  $a = 0,85$  см, плотность электронов в диапазоне от  $1 \times 10^8$  до  $3 \times 10^9$  см $^{-3}$  и температура электронов примерно равна 0,25 эв.

Вышенаписанное дисперсионное уравнение имеет решения, соответствующие различным азимутальным модам  $m$  и различным радиальным модам. Сплошные кривые на фиг. 36в соответствуют решению для моды  $m=0$  и низшей радиальной моды. Крестиками на фиг. 36в нанесены экспериментальные данные, взятые из работы [142] (они были приведены на фиг. 36б); треугольники, светлые и сплошные кружки — экспериментальные данные, полученные в работе [150] для плазменного столба термически ионизованного цезия. Видно, что имеется очень хорошее согласие между теорией и экспериментом.

Когда электростатическая концевая пластина имеет отрицательный потенциал, достаточный для удержания всех электронов, свойства волн, распространяющихся параллельно и антипараллельно дрейфу электронов, практически одни и те же. Однако соответствующим образом регулируя потенциал пластины, можно очень сильно уменьшить затухание волн, распространяющихся антипараллельно дрейфу. Это получается в результате устранения из хвоста

максвелловского распределения тех электронов, скорость которых равна фазовой скорости волны — факт, который придает доверие утверждению о том, что наблюдаемое затухание действительно обусловлено механизмом Ландау.

При обсуждении продольных волн на частотах вблизи электронной плазменной частоты нужно рассматривать только один член (электронный член) суммы в (4.83). На этих частотах ионы не в состоянии следовать за быстрыми колебаниями, они только создают нейтрализующий фон. На низких частотах, однако, нужно рассматривать вклад в сумму в (4.83) как электронов, так и ионов (см. работы [151, 152]). Обратим внимание, что в работе [153] было измерено и сравнивалось с теорией затухание Ландау низкочастотных ( $\lesssim 1$  Мгц) ионных «акустических» волн.

**Примеры.** Теперь, когда мы нашли  $K_L$ , вернемся назад и рассмотрим несколько задач по продольным колебаниям, обсужденных в § 2 и 4 настоящей главы.

а. В § 2 настоящей главы было показано, что величина  $k^2 \text{Im}(1/K)$ , проинтегрированная по всем значениям  $k$ , пропорциональна среднеквадратичной флуктуации спектральной компоненты напряженности электрического поля. Это подынтегральное выражение будет также найдено в соответствующей части гл. 5. Зависимость подынтегрального выражения от  $1/k$  для трех различных значений  $\omega/\omega_p$  схематически изображена на фиг. 37. Эта функция  $k^2 \text{Im}[1/K_L(k, \omega)]$  является монотонной на всех частотах за исключением тех, для которых  $\text{Re} K_L(k, \omega_0) = 0$ . Пик, возникающий на частоте  $\omega = \omega_0$ , соответствует возбуждению плазменных волн (см. § 4 настоящей главы).

б. Спектр флуктуаций электрического поля определяется выражениями (4.51) и (4.52); его можно записать в виде

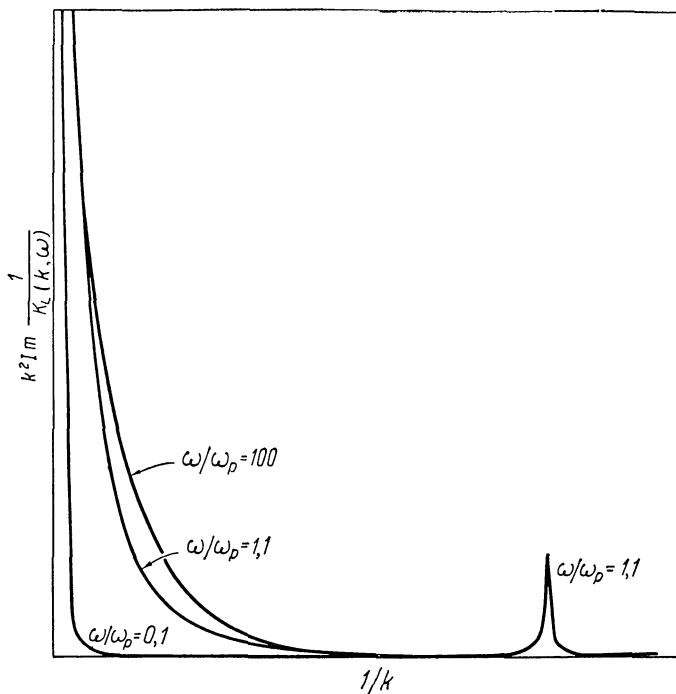
$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{\kappa T}{2\pi} \int \int \frac{d\omega}{\omega} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Im} \frac{1}{K_L(k, \omega)}. \quad (4.94)$$

Интегрирование по частоте  $\omega$  можно провести путем интегрирования по контуру. В результате имеем

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{\kappa T}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{1 + (kL_D)^2}. \quad (4.95)$$

Энергия электрического поля на одну моду продольной волны достигает величины  $\kappa T/2$  для случая длинных волн, когда  $kL_D \ll 1$ , но она значительно меньше этой величины для случая коротких волн.

Можно вычислить также плотность энергии плазменных волн в окрестности резонансного пика, показанного на фиг. 37. Здесь



Фиг. 37. Зависимость подынтегрального выражения (4.51) от длины волны (из работы Даусона и Обермана [169]).

Диэлектрический коэффициент определяется выражениями (4.86) и (4.87). Пик возникает при

$$\omega^2 \approx \omega_p^2 [1 + 3(kL_D)^2].$$

Для очень больших  $k$ ,  $k^2 \text{Im}(1/K_L) \sim 1/k$  и поэтому интеграл от этой величины по  $k$  расходится логарифмически при  $k \rightarrow \infty$  и интегрирование должно быть соответствующим образом обрезано (см. § 1 гл. 5).

$\text{Im}[1/K_L]$  можно аппроксимировать формулой (4.75); интегрируя по частотам, находим

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \langle |E(k)|^2 \rangle = \frac{\kappa T}{4\pi^2} \int_0^{k_{\text{макс}}} k^2 dk.$$

Так как практически незатухающие волны могут существовать только для волновых чисел  $k \lesssim L_D^{-1}$ , обрежем интеграл на  $k_{\text{макс}} = L_D^{-1}$ , тогда получим

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \langle |E|^2 \rangle = \frac{\kappa T}{12\pi^2} \frac{1}{L_D^3}.$$

Разделив эту плотность энергии на плотность всей кинетической энергии электронов  $\frac{3}{2}N\kappa T$ , придем к следующему интересному результату:

$$\frac{\text{Плотность энергии волны}}{\text{Плотность энергии электронов}} = \frac{1}{18\pi^2 N L_D^3}.$$

Величина  $(4\pi/3)NL_D^3$  — число частиц  $N_D$  в дебаевской сфере. Поскольку  $N_D$  является большой величиной для большинства газовых плазм, энергия волн, обусловленных тепловыми флуктуациями, мала по сравнению с кинетической энергией частиц.

в. В качестве третьего примера рассмотрим спектр флуктуаций плотности заряда в «электронной плазме» с неподвижными ионами. Из (4.53) и уравнения Пуассона получим выражение для корреляционной функции плотности:

$$\langle \rho(\mathbf{k}, \omega) \rho^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = (2\pi)^5 \frac{\kappa T}{\pi \omega} \epsilon_0 k^2 \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{K_L(k, \omega)} \right] \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega').$$

Тогда спектр мощности для флуктуаций плотности имеет вид

$$P_\rho(k, \omega) = \frac{k^2 \epsilon_0}{\pi} \frac{\kappa T}{\omega} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{K_L(k, \omega)} \right].$$

Зависимость его от  $x = \omega / (\sqrt{2k}v_0)$  показана на фиг. 38 для различных значений параметра  $kL_D$ . На фиг. 38 спектр мощности  $P_\rho(k, \omega)$  нормирован на спектр мощности  $P_\rho(k)$ , проинтегрированный по всем частотам. Последний определяется следующим выражением:

$$P_\rho(k) = k^2 \epsilon_0 \kappa T [1 - \{K_L(k, \omega = 0)\}^{-1}] = k^2 \epsilon_0 \kappa T [1 + (kL_D)^2]^{-1}.$$

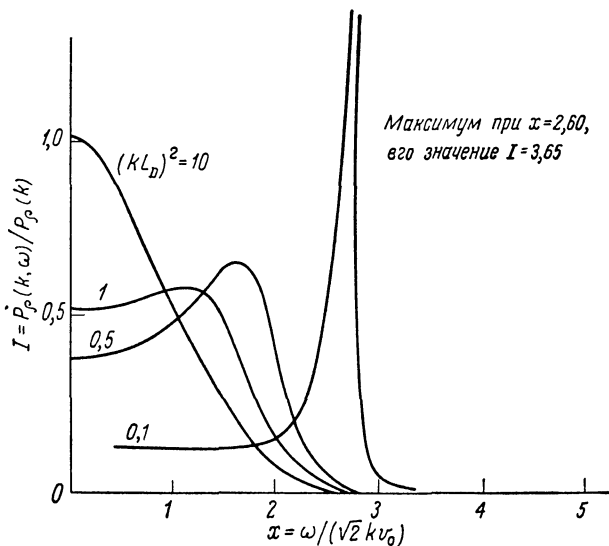
Из фигуры видно, что, когда  $kL_D$  велико по сравнению с единицей, преобладают низкочастотные флуктуации. Естественно, при таких условиях спектр приближается к гауссовому:

$$P_\rho(k, \omega) \sim \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{kv_0} \right)^2 \right].$$

Это типичное доплеровское уширение от отдельных, некоррелированных зарядов (см. также § 3 гл. 8). Другими словами, коллективные взаимодействия не возникают. С другой стороны, при малых значениях  $kL_D$  флуктуации возникают, главным образом, на высоких частотах, вблизи электронного плазменного резонанса.

г. В качестве четвертого примера рассчитаем по формуле (4.78) коэффициент испускания волн. Скорость испускания волн с волновым числом  $k$  на единицу объема равна

$$\int j_L(\mathbf{k}, \omega) d\omega = \frac{\kappa T}{\pi} \int \frac{[\operatorname{Im} K_L(k, \omega)]^2}{|K_L(k, \omega)|^2} d\omega k^2 \frac{dk}{2\pi^2}. \quad (4.96)$$



Фиг. 38. Спектры флуктуаций плотности заряда в электронной плазме (из работы Ситенко [165]).

Положение резонансных пиков определяется приближенно дисперсионным уравнением Бома и Гросса, которое можно записать в виде

$$2x^2 = 3 + (kL_D)^{-2}.$$

Площадь под каждой кривой удовлетворяет условию нормировки:  $\int_0^{\infty} I dx = 1$ .

Ограничим интегрирование по частоте резонансной областью, соответствующей «испусканию» плазменных волн. Тогда знаменатель выражения (4.96) можно аппроксимировать с помощью (4.75); в результате получим

$$\int_{\omega \sim \omega_p} j_L(\mathbf{k}, \omega) d\omega \approx -\kappa T \omega_p \int \text{Im} K_L(\mathbf{k}, \omega) \delta(\omega - \omega_p) d\omega k^2 \frac{dk}{2\pi^2}. \quad (4.97)$$

Используя для  $K_L$  формулу (4.89), придем к следующему выражению:

$$\int_{\omega \sim \omega_p} j_L(\mathbf{k}, \omega) d\omega \approx \kappa T k^2 \frac{dk}{2\pi^2} [2\omega \delta(\mathbf{k}, \omega)]_{\omega=\omega_p}, \quad (4.98)$$

где  $\delta$  — коэффициент затухания Ландау [см. (4.93)]. Множитель 2 возникает, поскольку вычисляется затухание энергии. Множитель  $\kappa T (k^2 dk / 2\pi^2)$  — плотность энергии волн на элемент объема пространства волновых векторов, определяемая формулой Рэлея —

Джинса (см. § 1 гл. 2). Выражение (4.98), очевидно, аналогично соотношению Кирхгофа между испусканием и поглощением.

Когда исследовалось испускание отдельного «пробного» электрона, было найдено, что суммарное черенковское испускание продольных волн, возбуждаемых электронами, находящимися в хвосте максвелловского распределения, является источником  $j_L$ . Данный пробный электрон испускает волну, фазовая скорость которой  $\omega/k (\approx \omega_p/k)$  меньше скорости частицы  $v$ . Излучение испускается в основном в элемент конуса, половина угла которого при вершине  $\theta$  определяется величиной  $\cos \theta \approx \omega_p/kv$ . Это дает обычный черенковский ударный фронт. Энергия, излучаемая на единицу длины пути, проходимого пробным электроном, определяется выражением

$$\frac{e^2 \omega_p^2}{8\pi \epsilon_0 v^2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{2v^2}{3v_0^2} \right) \right],$$

где

$$v_0^2 = \frac{\kappa T}{m}.$$

Частицы, скорость которых меньше среднеквадратичной тепловой скорости  $(3\kappa T/m)^{1/2}$ , не возбуждают черенковского поля (см. работы [154—157]; применение к излучению Солнца дано в работе [158]).

### § 6. Спектр микрополей в плазме в отсутствие теплового равновесия

Цель этого параграфа — распространить флуктуационно-диссипативную теорему из § 1 настоящей главы на плазму, которая не находится в тепловом равновесии; иначе говоря, нам необходимо получить выражение для спектральной плотности мощности  $P(\mathbf{k}, \omega)$ , эквивалентное (4.52), для плазмы, частицы которой не имеют максвелловского распределения по скоростям. Нас интересуют только продольные колебания, так что уравнение Пуассона является единственным уравнением Максвелла, которое нужно рассматривать.

Начнем с одного сорта частиц плазмы, например электронов; пусть  $\rho_i$  — плотность заряда одного «пробного» электрона  $i$ :

$$\rho_i(\mathbf{r}, t) = e\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)], \quad (4.99)$$

где  $\mathbf{r}_i(t)$  — положение электрона в момент времени  $t$ . Этот электрон может двигаться самым нерегулярным образом, но предположим, что его путь является практически прямолинейным и скорость постоянной; тогда

$$\rho_i(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0i} - \mathbf{v}_i t), \quad (4.100)$$



где  $\mathbf{r}_{0i}$  и  $\mathbf{v}_i$  — начальное положение и скорость. Прямолинейное движение является хорошим приближением, поскольку большинство электронов претерпевает малые отклонения в кулоновском поле других частиц. То, что дело обстоит именно так, было найдено в § 4 гл. 3 [см. (3.57)] в связи с расчетами парных столкновений.

Проведя анализ Фурье выражения (4.100), получим

$$\rho_i(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi e \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i) e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0i}}. \quad (4.101)$$

Подставив (4.101) в уравнение Пуассона (4.46), найдем

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{j\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2 \varepsilon_0 K_L(k, \omega)} \rho_i(\mathbf{k}, \omega). \quad (4.102)$$

Затем, обратив преобразование Фурье для волнового вектора  $\mathbf{k}$ , для электрического поля в точке  $\mathbf{r}$ , созданного пробным электроном в точке  $\mathbf{r}_{0i}$ , получим следующий результат:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{0i}, \omega) = \frac{j\mathbf{e}}{(2\pi)^2} \int \frac{\mathbf{k} d^3k}{|\mathbf{k}|^2 \varepsilon_0 K_L(k, \omega)} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i) e^{-j\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0i})}. \quad (4.103)$$

Данный результат иллюстрирует диэлектрические свойства плазмы. Теперь можно представить себе, что пробный электрон помещен в диэлектрическую среду, характеризующуюся макроскопическим диэлектрическим коэффициентом  $K_L$ . Частица, «одетая» таким образом в свое диэлектрическое облако, создает электрическое поле  $\mathbf{E}$ , которое теперь эффективно заменяет ее кулоновское поле. При расчете электрического поля, обусловленного всеми электронами, предполагается, что эти «одетые» электроны двигаются независимо друг от друга и что полное флуктуирующее поле в некоторой точке является суммой экранированных полей всех «одетых» электронов, когда они рассматриваются как статистически независимые. Такую теорему сформулировали Хаббард [124] и Ростокер [117], вскоре она будет использована. Однако прежде чем перейти в следующем разделе к этой проблеме, исследуем несколько более детально поле вокруг пробного заряда. Выполняя временное преобразование Фурье для (4.103), т. е. записывая (4.103) для настоящего момента времени, а затем интегрируя по частоте с учетом дельта-функции, находим, что продольное электрическое поле в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  определяется выражением

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \frac{j\mathbf{e}}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathbf{k} d^3k}{|\mathbf{k}|^2 \varepsilon_0 K_L(k, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} e^{-j\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}t)} \quad (\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}). \quad (4.103a)$$

Этот результат будет использован в § 7 настоящей главы. Аналогично легко можно показать, используя соотношение

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi,$$

что для электрического потенциала  $\phi$  имеем

$$\phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \frac{e}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{|k|^2 \epsilon_0 K_L(k, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{v}t)} \quad (\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}).$$

Теперь можно получить статическое возмущение вокруг стационарного пробного заряда. Положим в последней формуле  $v = 0$  и для начала предположим (неправильно), что ионы не играют роли. Тогда статический диэлектрический коэффициент для термически равновесной плазмы определяется по формуле (4.90); он имеет вид

$$K_L(k, 0) = \frac{k^2 + L_D^{-2}}{k^2},$$

где  $L_D = (\kappa T \epsilon_0 / Ne^2)^{1/2}$  — дебаевский радиус только для электронов. Подставив это значение  $K_L$  в вышенаписанную формулу и проинтегрировав, для характеристического экранированного потенциала получим

$$\phi(R) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-R/L_D}}{R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|;$$

он был впервые найден Дебаем и Хюккелем [159]. Если принять во внимание, что помимо электронов имеется один или более сортов ( $i$ ) ионов, и использовать (4.83) и (4.90), то для диэлектрического коэффициента получим

$$K_L(k, 0) = \frac{k^2 + L_D^{-2} + \sum_i L_{Di}^{-2}}{k^2}, \quad L_{Di} = \left( \frac{\kappa T_i \epsilon_0}{N_i e_i^2} \right)^{1/2};$$

отсюда следует, что дебаевский радиус  $L_D$ , входящий в экспоненту выражения для  $\phi(R)$ , теперь нужно заменить полным эффективным дебаевским радиусом  $L_{DT}$ , определяемым выражением

$$\frac{1}{L_{DT}^2} = \frac{1}{L_D^2} + \sum_i \frac{1}{L_{Di}^2}.$$

Когда нейтральная плазма состоит из электронов с плотностью  $N$  и только из одного сорта ионов с зарядом  $Ze$ , температура которых  $T_i$  не обязательно равна температуре электронов  $T$ ,

$$\frac{1}{L_{DT}^2} = \frac{Ne^2}{\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\kappa T} + \frac{Z}{\kappa T_i} \right],$$

откуда видно, что более холодные из двух сортов частиц определяют величину радиуса экранирования.

Укажем, что при рассмотренных здесь статических условиях ( $v = 0$ ) в выражение для радиуса экранирования необходимо должным образом включать ионы. Однако при изучении колеба-

тельных явлений и при других нестационарных условиях ионы часто не появляются в выражении для радиуса экранирования. Один такой случай встречался уже в § 5 настоящей главы при электронных колебаниях плазмы. Причина такова — за то время, пока тяжелые ионы не могут сдвинуться с места, они не вносят вклада в экранирование.

**Корреляционная функция для флуктуаций электрического поля.** Корреляционная функция для флуктуаций поля получается путем усреднения по ансамблю (по всем электронам) скалярного произведения  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$ , найденного из выражения (4.102):

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{\varepsilon_0^2 |k|^2 |k'|^2 K_L(k, \omega) K_L^*(k', \omega')} \left\langle \sum_{ij} \rho_i(\mathbf{k}, \omega) \rho_j^*(\mathbf{k}', \omega') \right\rangle, \quad (4.104)$$

где

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{ij} \rho_i(\mathbf{k}, \omega) \rho_j^*(\mathbf{k}', \omega') \right\rangle &= \\ &= (2\pi)^2 \sum_{ij} e_i e_j \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i) \delta(\omega' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}_j) \langle e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0i} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_{0j})} \rangle. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Из обсужденного выше принципа суперпозиции следует: множитель  $\langle \exp(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0i} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_{0j}) \rangle$  равен нулю, если  $i \neq j$ ; это связано с тем, что частицы не коррелируют, пока они не находятся в тесном контакте. Следовательно, в сумме остается только член с  $i = j$  и сумма по  $i$  и  $j$  сводится к сумме по  $i$ . Используя также результат, что для плазмы с объемом  $V$

$$V \langle e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_{0i}} \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (4.106)$$

получаем

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{ij} \rho_i(\mathbf{k}, \omega) \rho_j^*(\mathbf{k}', \omega') \right\rangle &= \\ &= (2\pi)^5 e^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') \left\langle \sum_i \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i) \right\rangle V^{-1} = \\ &= (2\pi)^5 N e^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') \int f(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d^3v, \end{aligned} \quad (4.107)$$

где  $f$  — функция распределения частиц по скоростям, нормированная на единицу. Подставив (4.107) в (4.104), приходим к искомому результату:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle &= \\ &= \frac{(2\pi)^5 N e^2}{|k|^2 \varepsilon_0^2 |K_L(k, \omega)|^2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') \int f(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d^3v, \end{aligned} \quad (4.108)$$

$$P(\mathbf{k}, \omega) = \frac{N e^2}{|k|^2 \varepsilon_0^2 |K_L(k, \omega)|^2} \int f(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d^3v. \quad (4.109)$$

Выражение (4.109) для спектральной плотности мощности  $P(\mathbf{k}, \omega)$  получено из определения, которое дается в первой строке выражения (4.53). Выражение (4.109) выведено в работе [124].

Последние два выражения представляют собой формулировку флуктуационно-диссипативной теоремы для плазмы в отсутствие теплового равновесия. В случае многокомпонентной плазмы, содержащей  $i$  сортов подвижных частиц, нужно правую часть (4.109) просуммировать по  $i$ ; тогда найдем

$$P(\mathbf{k}, \omega) = \sum_i \frac{N_i e_i^2}{|k|^2 \epsilon_0^2 |K_L(k, \omega)|^2} \int \hat{f}_i(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d^3v, \quad (4.110)$$

где  $K_L$  определяется формулой (4.83). Отметим, что  $K_L$  нужно вычислять для рассматриваемой функции распределения и что выражение (4.87) для  $\phi(x)$  применимо только при максвелловском распределении.

Целесообразно привести выражение (4.109) к несколько иному виду, заменив величину  $1/|K_L|^2$  по формуле

$$\frac{1}{|K_L|^2} = -\frac{\text{Im}(1/K_L)}{\text{Im} K_L} \quad (4.111)$$

и подставив  $\text{Im} K_L$  из (4.86):

$$P(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{m}{\pi \epsilon_0} \text{Im} \left[ \frac{1}{K_L(k, \omega)} \right] \frac{\int \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f(\mathbf{v}) d^3v}{\int \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k} \cdot (\partial f / \partial \mathbf{v}) d^3v}. \quad (4.112)$$

При тепловом равновесии функция  $f$  — максвелловская и (4.112) сводится к нашему прежнему выражению (4.52):

$$P(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\kappa T}{\pi \omega \epsilon_0} \text{Im} \frac{1}{K_L(k, \omega)}; \quad (4.113)$$

Необходимо отметить, что (4.113) является точным выражением для спектральной плотности мощности системы, находящейся в тепловом равновесии, в предположении, что можно найти точное значение  $K_L$  (а не получить, например, из уравнения Власова, как это было сделано в § 5 настоящей главы). С другой стороны, в выражении (4.112) содержатся довольно фундаментальные приближения, а именно: предположения о прямолинейном движении зарядов и о статистической независимости «одетых» частиц.

Выражение (4.112) справедливо не для любой функции распределения, как могло бы показаться на первый взгляд. Для некоторых распределений система является неустойчивой, так что решение дисперсионного уравнения  $K_L = 0$  приводит к отрицательной мнимой части для частоты  $\omega$  (см. § 2 гл. 9). Поля тогда беспрестанно возрастают (согласно использованному здесь линейризованному расчету) и стационарный спектр определить нельзя.

Запишем выражение для спектральной плотности системы, не находящейся в тепловом равновесии, в виде

$$P(\mathbf{k}, \omega) = \kappa T_{\text{фл}} \frac{1}{\pi \omega \epsilon_0} \operatorname{Im} \frac{1}{K_L(k, \omega)}; \quad (4.114)$$

оно формально то же самое, что и (4.113). Параметр  $T_{\text{фл}}$  определяется как эффективная «флуктуационная температура» и задается формулой

$$\frac{\kappa T_{\text{фл}}}{m} = - \frac{\int \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) f(\mathbf{v}) d^3 v}{\int \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) (k/\omega) \cdot [\partial f(\mathbf{v})/\partial \mathbf{v}] d^3 v}. \quad (4.115)$$

Заметим, что это выражение имеет ту же общую структуру, что и формула (2.47) для температуры излучения  $T_r$  поперечных волн, испускаемых некоррелированными электронами.

При выводе вышенаписанных выражений две компоненты скорости частицы, перпендикулярные вектору  $\mathbf{k}$ , не входили ни в какие преобразования, связанные с  $k$ , и поэтому вначале удобно провести по ним интегрирование. Если  $\mathbf{u}$  — скорость частицы, параллельная вектору  $\mathbf{k}$ , то можно определить одномерную функцию распределения  $F(u)$  следующим образом:

$$F(u) = \int f(u, v_{\perp}) d^2 v_{\perp}, \quad (4.116)$$

где  $v_{\perp}$  — компонента скорости, перпендикулярная вектору  $\mathbf{k}$ . Если, например,  $f(v)$  — максвелловская функция распределения, то

$$F(u; \text{максвелловская функция}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_0} e^{-u^2/2v_0^2}. \quad (4.117)$$

Функцию (4.116) можно записать иначе:

$$F(u) = \int d^3 v \delta\left(u - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{k}\right) f(\mathbf{v}). \quad (4.118)$$

Спектральная плотность мощности, выраженная через функцию  $F(u)$ , принимает вид

$$P(k, \omega) = \frac{Ne^2 F(\omega/k)}{|k|^3 \epsilon_0^2 |K_L(k, \omega)|^2}, \quad (4.119)$$

а мнимая часть  $K_L$  определяется формулой

$$\operatorname{Im} K_L = \frac{\pi \omega^2}{k^2} F' \left( \frac{\omega}{k} \right), \quad (4.120)$$

где

$$F'(u) = \frac{dF(u)}{du}.$$

**Коэффициент испускания для продольных волн.** В § 4 настоящей главы был вычислен коэффициент испускания для продольных волн в термически равновесной плазме. Используя тот же метод и соотношения (4.119) и (4.120), получаем ту же величину для неравновесной плазмы

$$j_L(k, \omega) = -\frac{Ne^2\omega}{\epsilon_0} \frac{1}{2\pi^2} k^2 dk \frac{F(\omega/k)}{|k^3| |K_L(k, \omega)|^2} \text{Im} K_L(k, \omega). \quad (4.121)$$

### § 7. Обмен энергией между пробным зарядом и плазмой

В конце § 5 настоящей главы мы показали, что быстрый электрон, пронизывающий плазму, теряет кинетическую энергию; последняя идет на возбуждение продольных плазменных волн. В данном параграфе эта проблема исследуется более детально.

Частица теряет энергию, так как она поляризует плазменную среду, т. е. совершает над ней работу. Поскольку этот пробный заряд не находится в центре индуцированной им поляризации, он испытывает со стороны среды тормозящую силу. Из полной потери энергии можно выделить ту часть, которая обусловлена резонансным взаимодействием пробного заряда и частиц; скорость потерь, связанных с этим механизмом, должна соответствовать скорости набора энергии коллективными колебаниями, т. е. скорости спонтанного испускания плазменных волн. Остальную часть потерь энергии лучше представлять себе как возникающую из-за столкновений пробного электрона с отдельными частицами среды. В первом разделе данного параграфа мы приступим к расчету этих потерь энергии, обычно называемых поляризационными потерями. Однако помимо поляризационных потерь, пробный заряд и, в частности, медленно движущийся заряд, может *отбирать* энергию у плазмы при стохастическом взаимодействии с окружающими флуктуирующими полями. Эта проблема рассматривается во втором разделе данного параграфа.

**Поляризационные потери.** Получим теперь выражение для поляризационных потерь энергии пробным зарядом  $e_t$  с массой  $m_t$ , движущимся со скоростью  $v$  через изотропную плазму, которая описывается продольным диэлектрическим коэффициентом  $K_L(k, \omega)$ . Индуцированное поляризационное поле можно найти, вычитая из полного поля (4.103а) поле, возникающее при движении пробного заряда через вакуум:

$$\mathbf{E}_{\text{инд}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, t) = \frac{je_t}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathbf{k} d^3k}{|k|^2} e^{-j\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0-vt)} \left[ \frac{1}{\epsilon_0 K_L(k, \mathbf{k}\cdot\mathbf{v})} - \frac{1}{\epsilon_0} \right]. \quad (4.122)$$

Скорость, с которой пробный заряд передает свою энергию плазме, определяется формулой

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{\text{пол}} = e_t [\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_{\text{инд}}]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}t}; \quad (4.123)$$

заметим, что поле  $\mathbf{E}_{\text{инд}}$  нужно вычислять в точке  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$ , где находится заряд. Подставляя (4.122) в (4.123) и используя условие «действительности» для электрического поля, а именно

$$\mathbf{E}_{\text{инд}}(\mathbf{k}, \omega) = E_{\text{инд}}^*(-\mathbf{k}, -\omega),$$

получаем

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{\text{пол}} = -\frac{e_t^2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{\epsilon_0 |k|^2} \text{Im} \left[ \frac{1}{K_L(k, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})} \right] \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega); \quad (4.124)$$

это и есть искомый результат. Видно, что поляризационные потери энергии не зависят от массы пробного заряда и поэтому отличны от нуля даже для частицы с бесконечной массой. Задавая диэлектрический коэффициент среды, можно в принципе точно вычислить скорость потерь энергии пробным зарядом, обусловленных взаимодействием с отдельной частицей и коллективными взаимодействиями. При таких вычислениях обычно возникает потребность в числовых расчетах. Взаимодействие с коллективными модами можно легко выделить из вышеприведенного результата и именно к этому мы сейчас перейдем.

Для вычисления вышеприведенного интеграла запишем

$$d^3k = 2\pi k_{\perp} dk_{\perp} dk_{\parallel},$$

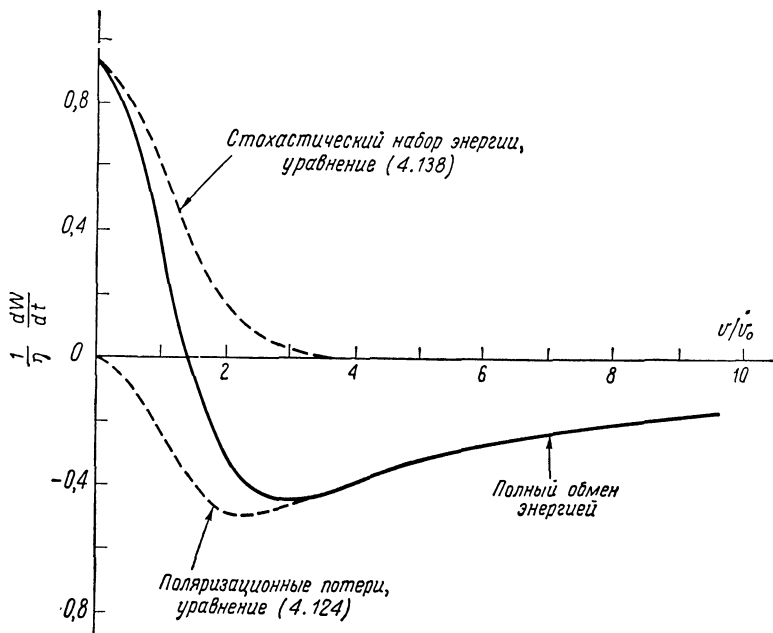
где  $k_{\parallel}$  и  $k_{\perp}$  — компоненты вектора  $\mathbf{k}$  вдоль и перпендикулярно скорости  $\mathbf{v}$ . Замечая также, что  $k_{\parallel} v = \omega$ , получаем

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{\text{пол}} = -\frac{e_t^2 v}{4\pi^2 \epsilon_0} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_{\perp} dk_{\perp} \omega d\omega}{\omega^2 + k_{\perp}^2 v^2} \text{Im} \frac{1}{K_L(k, \omega)}. \quad (4.125)$$

Для случая резонансных взаимодействий с плазмой, в которой практически отсутствуют потери, можно заменить  $\text{Im}(1/K_L)$  на  $\delta$ -функцию [см. выражение (4.75)]. Проведя интегрирование, находим

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{\text{пол}} = -\frac{e_t^2 \omega_p^2}{8\pi \epsilon_0 v} \ln \left[ 1 + \frac{k_{\perp \text{ макс}}^2 v^2}{\omega_p^2} \right]. \quad (4.126)$$

Этот результат получили Бом и Пайнс [154]. Параметр  $k_{\perp \text{ макс}}$  связан с обрезанием интеграла по  $k_{\perp}$ , так как интеграл расходится



Фиг. 39. Зависимость скорости обмена энергией пробного электрона ( $m_t = m$ ) от его скорости  $v$  при прохождении электронной плазмы, имеющей плотность  $10^{16} \text{ см}^{-3}$  и температуру  $T = 4 \times 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$  (из работ Джука, Зигмара и Хайнса [166] и Ситенко [165]).

Сплошная кривая — полная сумма скоростей обмена энергией, обусловленная поляризационными потерями и стохастическим набором энергии. (Движение ионов не учитывается.) Параметр  $\eta$  определен в (4.128) и  $v_0 = \sqrt{\kappa T/m}$ .

логарифмически при  $k_{\perp} \rightarrow \infty$ . Коллективные моды не возбуждаются, пока  $kL_D \geq 1$ , и в работе [154] положено  $k_{\perp \text{ макс}}^2 = \frac{2}{3}L_D^2$ , что приводит к следующему результату:

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{\text{пол}} = - \frac{e_t^2 \omega_p^2}{8\pi \epsilon_0 v} \ln \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{v^2}{v_0^2} \right], \quad (4.127)$$

где  $v_0 = \sqrt{\kappa T/m}$  — тепловая скорость электронов плазмы.

Ясно, что выражения (4.126) и (4.127) применимы только в том случае, когда скорость пробной частицы существенно больше средней тепловой скорости электронов плазмы, так как только тогда пробный электрон может потерять энергию на коллективные моды (фазовая скорость которых  $\omega/k_{\perp} \gg v_0$ ). Для определения полных потерь энергии для медленных частиц необходимо полностью вычислить интеграл в (4.124). В таком расчете для  $K_L$  использовались выражения (4.86) и (4.87); результат приведен на фиг. 39



в виде пунктирной кривой (нижней). Скорость потерь энергии  $dW/dt$ , определяемая выражением (4.124), была нормирована на величину

$$\eta \equiv \frac{e_t^2 \omega_p^2}{(2\pi)^{3/2} \epsilon_0 v_0} \left( \frac{m}{m_t} \right) \ln(k_{\text{макс}} L_D). \quad (4.128)$$

Достоинство такой нормировки заключается в том, что величина  $dW/\eta dt$  совершенно нечувствительна к частному выбору параметров плазмы  $\omega_p$  и  $v_0$ . Необходимо отметить, что интеграл в (4.124) должен быть обрезан при некотором значении  $k = k_{\text{макс}}$  для исключения обычной расходимости; последняя связана с тем обстоятельством, что близкие столкновения с отклонениями на большие углы должным образом не учитываются при расчете  $K_L(k, \omega)$  по бесстолкновительному уравнению Власова (§ 5 настоящей главы). Выбранное значение  $k_{\text{макс}}$  является обратной величиной наименьшего классического расстояния, на которое могут сблизиться пробная частица и средняя плазменная частица [ср. (5.11)]:

$$k_{\text{макс}} = \frac{4\pi\epsilon_0 (kT + 1/2 m_t v^2)}{e_t e}. \quad (4.129)$$

Теоретические исследования, аналогичные вышеприведенным, были выполнены рядом авторов, как, например, в работах [5, 68, 160—162]. В работе [163] эта проблема рассмотрена применительно к флуктуациям в плазме твердого тела, а в работе [164] учтены релятивистские эффекты. Некоторые авторы рассчитали скорость потерь энергии на единицу длины проходимого пути, так называемую «тормозную способность» среды. Эта величина связана со скоростью потерь энергии в единицу времени следующим образом:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{1}{v} \frac{dW}{dt}.$$

**Стохастическое ускорение** [165]. Поляризационные потери не являются единственным механизмом обмена энергией между пробным зарядом и плазменной средой. Можно представить себе механизм набора энергии, при котором пробный заряд отбирает энергию у окружающих флуктуирующих электрических полей. Ясно, что такой «противодействующий» механизм должен существовать, так как пробный заряд с энергией, равной средней тепловой энергии плазмы, находится в равновесии и не теряет, и не увеличивает энергию. В то время как поляризационные потери не зависят от массы пробной частицы, скорость набора энергии обратно пропорциональна массе. Поэтому стохастический набор энергии играет существенную роль при движении через плазму легкой частицы (электрона), но им можно пренебречь для ионов.

Уравнение движения пробного заряда  $(e_t, m_t)$ , находящегося в некоторой точке  $\mathbf{r}(t)$  в момент времени  $t$ , есть

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{e_t}{m_t} \mathbf{E}[\mathbf{r}(t), t], \quad (4.130)$$

где  $\mathbf{E}$  — полное самосогласованное электрическое поле в точке нахождения частицы. Интегрируя уравнение движения, получаем

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{e_t}{m_t} \int_0^t dt' \mathbf{E}[\mathbf{r}(t'), t'] \approx \mathbf{v}_0 + \frac{e_t}{m_t} \int_0^t dt' \mathbf{E}[\mathbf{R}(t'), t'], \quad (4.131)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{e_t}{m_t} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \mathbf{E}[\mathbf{r}(t''), t''] \approx \\ &\approx \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{e_t}{m_t} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \mathbf{E}[\mathbf{R}(t''), t''], \end{aligned} \quad (4.132)$$

где  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{v}_0$  — положение и скорость в начальный момент времени  $t = 0$  соответственно. Вторая форма уравнений (4.131) и (4.132) является приближенной, основанной на предположении, что в течение выбранного короткого интервала времени траектория частицы мало отличается от прямой линии:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t. \quad (4.133)$$

В этом же приближении электрическое поле можно разложить в ряд Тейлора:

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}(t), t] \approx \mathbf{E}[\mathbf{R}(t), t] + \frac{e_t}{m_t} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \sum_j E_j[\mathbf{R}(t''), t''] \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{E}[\mathbf{R}(t), t], \quad (4.134)$$

где суммирование проводится по всем трем ортогональным координатам.

В уравнение для скорости изменения энергии пробного заряда

$$\frac{dW}{dt} = \langle e_t \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{E}[\mathbf{r}(t), t] \rangle$$

подставим (4.131) и (4.134) для  $\mathbf{v}(t)$  и  $\mathbf{E}[\mathbf{r}(t), t]$  соответственно и удержим члены вплоть до второго порядка по  $e_t$ , тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= e_t \langle \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{E}[\mathbf{R}(t), t] \rangle + \\ &+ \frac{e_t^2}{m_t} \left\langle \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \sum_j E_j[\mathbf{R}(t''), t''] \frac{\partial}{\partial x_j} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{E}[\mathbf{R}(t), t] \right\rangle + \\ &+ \frac{e_t^2}{m_t} \left\langle \int_0^t dt' \mathbf{E}[\mathbf{R}(t'), t'] \cdot \mathbf{E}[\mathbf{R}(t), t] \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Угловые скобки означают усреднение по ансамблю.

Так как усредненное по времени значение флуктуирующей части  $E$  равно нулю, то, следовательно, электрическое поле, входящее в первый член уравнения (4.135), обусловлено самим движущимся пробным зарядом. Действительно, этот первый член в точности равен поляризационным потерям, которые обсуждались в предыдущем разделе, и вычисляя его, мы приходим к выражению (4.124). В уравнении (4.135) интересными для нас будут второй и третий члены; они представляют скорость обмена энергией, обусловленного пространственно-временными корреляциями между флуктуирующими полями плазмы. После довольно длинных преобразований Фурье второй и третий члены можно записать через спектральную плотность мощности  $P(k, \omega)$  флуктуаций электрического поля. Оказалось, что эти два члена можно объединить; в результате получим

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{\text{стох}} = \frac{e_i^2}{8\pi^2 m_i} \int d^3k \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega P(k, \omega)] \quad (\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}), \quad (4.136)$$

где  $P(k, \omega)$  для термически равновесной плазмы определяется выражением (4.52), а для неравновесной плазмы — выражением (4.110). Так как рассматривается изотропная плазма, то спектральная плотность мощности  $P(k, \omega)$  не зависит от направления волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Поэтому в (4.136) можно провести интегрирование по углам; это приведет к следующему результату:

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{\text{стох}} = \frac{e_i^2}{2\pi m_i} \int dk k^2 P(k, \omega) \Big|_{k=\omega/v}. \quad (4.137)$$

В частном случае, когда пробный заряд движется через термически равновесную плазму, выражение для скорости стохастического набора энергии частицей имеет вид

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{\text{стох}} = \frac{e_i^2 \kappa T}{2\pi^2 \epsilon_0 m_i v} \int_0^{k_{\text{макс}}} dk k \operatorname{Im} \frac{1}{K_L(k, kv)}. \quad (4.138)$$

Заметим, что интеграл обрезается при некотором значении  $k = k_{\text{макс}}$ , определяемом формулой (4.129).

На фиг. 39 результат числового расчета (4.138) для случая движения пробного электрона через электронную плазму представлен верхней пунктирной кривой [движением ионов при расчете пренебрегали и считали, что коэффициент  $K_L$  определяется вкладом только электронной компоненты, согласно (4.86) и (4.87)]. Сплошная кривая на фиг. 39 представляет полную скорость обмена энергией. Видно, что поляризационные потери преобладают при высоких скоростях электрона ( $v \gg v_0$ ), а стохастическое ускорение преобладает при малых скоростях. Когда энергия пробного электрона равна средней тепловой энергии электронов плазмы,

$$\frac{1}{2} m_i v^2 = \kappa T,$$

пробный электрон находится в тепловом равновесии с частицами среды и поэтому в среднем не приобретает и не теряет энергии.

Поучительно установить связь между результатами, полученными на основе «строгой» коллективной модели обмена энергией, рассмотренной в предыдущих разделах, и результатами, полученными в пренебрежении коллективными эффектами (см. также работу [166]).

Интегралы в (4.124) и (4.138) содержат множитель  $\text{Im}(1/K_L(k, \omega))$ , который можно представить в виде

$$\text{Im} \frac{1}{K_L(k, \omega)} = - \frac{\text{Im} K_L(k, \omega)}{|K_L(k, \omega)|^2}. \quad (4.139)$$

Положим теперь модуль  $|K_L(k, \omega)|^2$  равным единице, что эквивалентно пренебрежению коллективными эффектами в плазме, и проведем интегрирование, используя значение  $\text{Im} K_L(k, \omega)$ , определяемое формулой (4.120). Интегралы расходятся на нижнем пределе и мы обрежем интеграл при  $k_{\text{мин}} = L_D^{-1}$ . Тогда получим

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{\substack{\text{пол} \\ \text{стох}}} = - \frac{e_i^2 \omega_p^2}{(2\pi)^{3/2} \epsilon_0 v_0} \ln(k_{\text{макс}} L_D) \left\{ \frac{1}{x} \int_0^x dt e^{-t^2} - \left( 1 + \frac{m}{m_i} \right) e^{-x^2} \right\}, \quad (4.140)$$

где  $x = v/(\sqrt{2} v_0)$  и  $v_0^2 = \kappa T/m$ . Это уравнение в точности соответствует уравнению, полученному в работе [167], где оно было выведено на основе парных кулоновских столкновений между пробным зарядом и электронами плазмы. Если сравнить (4.140) с результатами, приведенными на фиг. 39, то мы найдем, что при малых энергиях ( $v \lesssim 2v_0$ ) расхождение не превышает 10%; однако при более высоких энергиях, когда коллективные эффекты проявляются сильнее, формула (4.140) занижает оценку потерь энергии почти на 50%.

## Коллективное испускание

Большинство коллективных эффектов, связанных с испусканием электромагнитных волн изотропной плазмой, имеет место на частотах вблизи электронной плазменной частоты или на определенных дискретных частотах, тесно связанных с плазменной частотой. В первой части этой главы рассматриваются различные проявления коллективных эффектов в практически бесконечной однородной плазме. Во второй части описывается довольно много эффектов, обусловленных влиянием границ и неоднородностей на характеристики спектра испускания.

### § 1. Тормозное излучение при коллективных кулоновских взаимодействиях

Тормозное излучение возникает при ускорении электронов в электростатическом кулоновском поле ионов. В § 4 гл. 3 даны расчеты, основанные на простейшей модели — один электрон в данный момент времени взаимодействует только с одним ионом. Здесь проблема будет рассмотрена с точки зрения коллективных явлений. Будем руководствоваться изящным методом, предложенным Мерсье [128]<sup>1)</sup>. Вычислим дипольный момент  $d$  системы зарядов. Согласно формуле Лармора (3.13), излучение пропорционально квадрату второй производной по времени от  $d$ .

Вторая производная по времени от дипольного момента  $d$  системы из  $N$  зарядов с массой  $m_p$  и зарядом  $q_p$  имеет вид

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{d}} &= \sum_{p=1}^N q_p \dot{\mathbf{v}}_p = \\ &= \sum_{p=1}^N \frac{q_p^2}{m_p} \mathbf{E}_p, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{E}_p$  — электрическое поле, действующее на частицу  $p$  и вызывающее ее ускорение  $\dot{\mathbf{v}}_p$ . Предполагается, что все внешние поля

<sup>1)</sup> Вывод, основанный на формальном разложении кинетических уравнений, дан в работе [170]. В § 2 гл. 4 описан еще один подход, в котором используются «пробные» токи [129].

равны нулю и поле  $\mathbf{E}_p$  обусловлено соседними зарядами. Можно написать

$$\mathbf{E}_p = \sum_{p'} \mathbf{E}_{pp'}, \quad (5.2)$$

где  $\mathbf{E}_{pp'}$  — электростатическое поле частицы  $p'$ , действующее на частицу  $p$ . Подставив это выражение в (5.1), получим

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{a}} &= \sum_{pp'} q_p \mathbf{E}_{pp'} \left( \frac{q_p}{m_p} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{pp'} q_p \mathbf{E}_{pp'} \left( \frac{q_p}{m_p} - \frac{q_{p'}}{m_{p'}} \right), \end{aligned} \quad (5.3)$$

где вторая запись уравнения следует из соотношения

$$q_p \mathbf{E}_{pp'} = -q_{p'} \mathbf{E}_{p'p}.$$

Из (5.3) видно, как уже указывалось в конце § 1 гл. 3, что взаимодействия между одинаковыми частицами не дают вклада в  $\ddot{\mathbf{a}}$ .

Рассмотрим теперь плазму, состоящую из электронов (заряд  $-e$ , масса  $m$ ) и ионов одного сорта с зарядом  $Ze$  и массой  $M$ . Тогда из (5.3) следует

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{a}} &= \sum_{pp'} Ze \mathbf{E}_{ie} \left( \frac{Ze}{M} + \frac{e}{m} \right) \approx \\ &\approx \frac{Ze^2}{m} \sum_{pp'} \mathbf{E}_{ie}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где сумма по  $p$  и  $p'$  означает суммирование по электронам и ионам, а  $\mathbf{E}_{ie}$  — электрическое поле  $e$ -го электрона, действующее на  $i$ -й ион.

Предполагается, что ионы покоятся, и поэтому оказывается удобным вначале найти полное электрическое поле, действующее на один ион, а затем просуммировать по всем ионам. Пусть  $\mathbf{E}(\mathbf{r}_i, t)$  — такое поле в точке, где находится  $i$ -й ион. Тогда (5.4) приобретает вид

$$\ddot{\mathbf{a}} = \frac{Ze^2}{m} \sum_i \mathbf{E}(\mathbf{r}_i, t). \quad (5.5)$$

Подставим этот результат в уравнение Лармора (3.13) и проведем усреднение по ансамблю. Усредненная по времени скорость испускания энергии, отнесенная к единице объема плазмы  $V$ , тогда равна

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{Z^2 e^4 n}{6\pi \epsilon_0 m^2 c^3 V} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_i, t) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_i, t) \rangle. \quad (5.6)$$

Показатель преломления  $n$  для поперечных электромагнитных волн включает в себя дисперсионные характеристики плазмы. Он вводится в формулу в соответствии с обсуждением в § 2 гл. 2 и § 1 гл. 3. Используя временные и пространственные преобразования Фурье, усредним по времени правую часть (5.6), как это было описано в § 1 и 2 гл. 4. В результате получим

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{Z^2 e^4 n}{6\pi \epsilon_0 m^2 c^3 V} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty d^3k d\omega P(\mathbf{k}, \omega) \left\langle \sum_{i i'} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i'})} \right\rangle, \quad (5.7)$$

где  $P(\mathbf{k}, \omega)$  — спектральная плотность мощности, определяемая формулой (4.52) для плазмы, находящейся в тепловом равновесии, и формулой (4.109) для плазмы, не находящейся в тепловом равновесии<sup>1)</sup>. При суммировании экспоненциальных множителей проявляется корреляция между (стационарными) ионами.

Предположим временно, что ионы не коррелируют, т. е.

$$\left\langle \sum_{i i'} \right\rangle = N_i V, \quad (5.8)$$

и распределение электронов по скоростям является максвелловским. Тогда коэффициент испускания  $j_\omega$  (определяемый как мощность излучения с одной поляризацией на единичный объем на  $d\omega$ , на 1 стер) имеет вид

$$j_\omega = \frac{Z^2 e^4 N_i n(\kappa T)}{24\pi^3 \epsilon_0^2 m^2 c^3 \omega} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{K_L(k, \omega)} \right]. \quad (5.9)$$

При получении этого результата уравнение (5.7) было разделено на  $8\pi$  ( $4\pi$  рад и 2 поляризации) и умножено на 2, поскольку обычно коэффициент  $j_\omega$  определен только для положительных частот. Уравнение (5.9) дает искомый коэффициент испускания для торсионного излучения и играет роль, эквивалентную выражению (3.61), полученному на основе парных столкновений.

Остается вычислить интеграл

$$I = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{\max}} 4\pi k^2 dk \operatorname{Im} \frac{1}{K_L(k, \omega)}. \quad (5.10)$$

<sup>1)</sup> При использовании формулы (4.52) или (4.109) предполагается, что электрические поля, входящие в правую часть (5.6), являются квазиэлектростатическими или продольными полями. Можно показать, что поперечные электромагнитные взаимодействия при нерелятивистских скоростях, когда энергия электрона мала по сравнению с  $m_0 c^2$ , являются малыми и ими можно пренебречь. Дипольное приближение (3.13) во всяком случае справедливо только в этом пределе. Вклад в излучение от квадрупольного момента обсуждается в работе [72].

Зависимость подинтегрального выражения от  $1/k$  схематически представлена на фиг. 37. Интеграл расходится при больших значениях  $k$  и необходимо проводить обрезание. Эта расходимость характерна при описании плазмы как непрерывной среды и возникает из-за того, что при расчете  $K_L$  по уравнению Власова должным образом не учитываются близкие столкновения. Мы выберем, как обычно, величину  $1/k_{\text{макс}}$ , равной параметру удара  $b_0$  для отклонения на  $90^\circ$ ; при низкой электронной температуре будем иметь

$$\frac{1}{k_{\text{макс}}} = \frac{Ze^2}{4\pi e_0 \kappa T}, \quad (5.11)$$

а при высокой температуре [см. (3.60) и (3.76)] получим

$$\frac{1}{k_{\text{макс}}} = \frac{\hbar}{(m\kappa T)^{1/2}}. \quad (5.12)$$

Однако выбор этих параметров является произвольным с точностью до числового множителя порядка единицы.

Подставляя (4.86) и (4.87) в интеграл (5.10) и заменяя переменную интегрирования  $k$  на  $x = (\omega/\sqrt{2}kv_0)$ , находим

$$I = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^2} \left(\frac{\omega}{v_0}\right)^3 \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^4} \frac{\Omega^2 \text{Im} \phi(x)}{[1 - \Omega^2 \text{Re} \phi(x)]^2 + [\Omega^2 \text{Im} \phi(x)]^2}, \quad (5.13)$$

где  $\Omega = \omega_p/\omega$ , а нижний предел интегрирования  $x_0 = \omega/(\sqrt{2}v_0k_{\text{макс}})$ . Интеграл можно вычислить аналитически в пределах высоких и низких частот, а именно для  $\Omega \ll 1$  и  $\Omega \gg 1$ . Например, когда  $\Omega \ll 1$ ,

$$I \approx \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} \frac{\omega_p^2 \omega}{v_0^3} \int_{\omega^2/2v_0^2k_{\text{макс}}^2}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy, \quad (5.14)$$

но

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy = -\ln(\gamma\alpha) + \alpha - \frac{\alpha^2}{4} \dots, \quad (5.15)$$

где  $\gamma = 1,781 \dots$ , так что

$$I \approx \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}} \frac{\omega\omega_p^2}{v_0^3} \ln \left[ \left( \frac{2}{\gamma} \right)^{1/2} \frac{v_0 k_{\text{макс}}}{\omega} \right], \quad \frac{\omega_p}{\omega} \ll 1. \quad (5.16)$$

Аналогичный расчет можно провести для  $\Omega \gg 1$ . Эти два случая можно описать следующим одним выражением для  $j_\omega$ :

$$j_\omega = NN_l \left( \frac{Z^2 e^6 n}{48\pi^4 \epsilon_0^3 c^3 m^2} \right) \left( \frac{m}{2\pi\kappa T} \right)^{1/2} \ln \left( \frac{A}{\omega^*} v_0 k_{\text{макс}} \right), \quad (5.17)$$



где  $\omega^* = \omega$  для  $\omega_p/\omega \ll 1$  и  $\omega^* = \omega_p$  для  $\omega_p/\omega \gg 1$ ,  $A$  — числовой коэффициент порядка единицы.

Сравнивая (5.17) для  $\omega_p/\omega \ll 1$  с (3.61), где использовалась модель парных столкновений, видим, что выражение (3.61) отличается от (5.17) множителем  $(2/\gamma)^2$  в аргументе логарифма. Поскольку  $k_{\text{макс}}$  было определено довольно грубо, это отличие несущественно.

Используя для обрезания величину (5.12), получим необходимые выражения для  $j_\omega$ , справедливые при высокой температуре. В табл. 3 приведены четыре различных асимптотических результата; величина под знаком логарифма  $\Lambda$  здесь представлена как отношение эффективных наибольшего и наименьшего параметров удара  $b$  (см. § 4 и 5 гл. 3). Числовые коэффициенты в табл. 3 подобраны так, чтобы получить согласие с результатами расчетов

Таблица 3

Множитель Гаунта  $\bar{G} = (\sqrt{3}/\pi) \ln \Lambda$

	Низкая электронная температура $T < 8,9 \times 10^5 Z^2 \text{ }^\circ\text{K}$	Высокая электронная температура $T > 8,9 \times 10^5 Z^2 \text{ }^\circ\text{K}$
Высокая частота $\omega > \omega_p$	$\Lambda = \left(\frac{2}{\gamma}\right)^{5/2} \frac{b_{\text{макс}}^{(1)}}{b_{\text{мин}}^{(1)}}$	$\Lambda = \frac{4}{\gamma} \frac{b_{\text{макс}}^{(1)}}{b_{\text{мин}}^{(2)}}$
Низкая частота $\omega < \omega_p$	$\Lambda = \left(\frac{2}{\gamma}\right)^2 \frac{1}{e^{1/2}} \frac{b_{\text{макс}}^{(2)}}{b_{\text{мин}}^{(1)}}$	$\Lambda = \left(\frac{8}{e\gamma}\right)^{1/2} \frac{b_{\text{макс}}^{(2)}}{b_{\text{мин}}^{(2)}}$
$\gamma = 1,781$	$b_{\text{макс}}^{(1)} = \left(\frac{\kappa T}{m}\right)^{1/2} \frac{1}{\omega}$	$b_{\text{мин}}^{(1)} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \kappa T}$
$e = 2,718$	$b_{\text{макс}}^{(2)} = \left(\frac{\kappa T}{m}\right)^{1/2} \frac{1}{\omega_p}$	$b_{\text{мин}}^{(2)} = \frac{\hbar}{(m\kappa T)^{1/2}}$

для области высоких частот, проведенными на основании модели парных столкновений, т. е. с формулами (3.61) и (3.77). (Более подробное рассмотрение этих числовых коэффициентов проведено в работах [98, 171].)

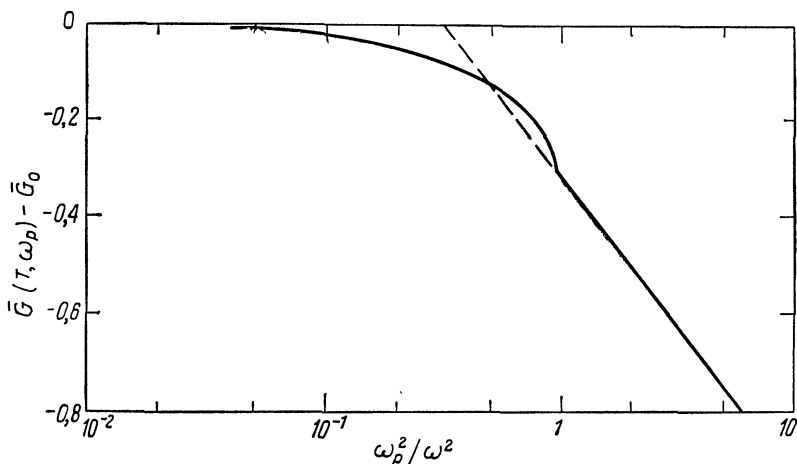
Как видно из таблицы, наибольшие значения  $b_{\text{макс}}$  равны дебаевскому радиусу. Это подтверждает тот факт, что в результате экранировки соседними ионами и электронами столкновения с параметрами удара, большими, чем  $L_D$ , не приводят к увеличению излучения. Однако область  $\omega < \omega_p$  не очень существенна для тормозного излучения, так как в ней испускание резко уменьшается

[дело в том, что в формулу (5.17) в качестве сомножителя входит показатель преломления  $n$ ]. Область  $\omega < \omega_p$  важна при изучении высокочастотной проводимости  $\sigma$ : в выражение для  $\sigma$  входит тот же самый множитель Гаунта, что и в выражение для коэффициента испускания. Это ясно следует из тесной связи между  $j\omega$ ,  $\alpha\omega$  и  $\text{Re } \sigma$ , например из (3.48) и соотношения

$$\text{Im } K_T = -\text{Re } \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}.$$

Числовой расчет интеграла  $I$ , проведенный в работе [169], показал, что асимптотические выражения из табл. 3 являются удивительно хорошими приближениями, даже когда они экстраполируются до частот  $\omega \approx \omega_p$ . Это видно из фиг. 40. Небольшой пик на частоте, несколько большей  $\omega_p$ , обусловлен усилением испускания из-за генерации плазменной волны. В термически равновесной плазме, рассматриваемой здесь, этому пику соответствует такая малая энергия, что ее трудно заметить при измерениях. Однако в термически неравновесной плазме, как будет видно из § 3 настоящей главы, положение совсем иное.

**Ионные корреляции.** При выводе полученных выше результатов предполагалось, что ионы не коррелируют. Для более точной оценки следует предположить, как сделали Даусон и Оберман [172], что ионы занимают положения  $\mathbf{r}_i$  и  $\mathbf{r}'_i$  [см. сумму (5.7)] согласно



Фиг. 40. Переход от высокочастотной ( $\omega \gg \omega_p$ ) спектральной характеристики к низкочастотной ( $\omega \ll \omega_p$ ) (из работы Хилда и Уортона [98]).

Виден пик при  $\omega \approx \omega_p$ , обусловленный возбуждением продольной волны.  $\bar{G}_0$  — высокочастотный множитель Гаунта (см. табл. 3); его можно аппроксимировать горизонтальной асимптотой, проходящей через начало координат. Пунктирная линия — аппроксимация множителя Гаунта в низкочастотном приближении. Рассматривается случай  $\omega = \text{const}$ .

закону распределения, соответствующему дебаевской экранировке (хотя ионы по-прежнему рассматриваются как покоящиеся).

Пусть  $p(\mathbf{r}_{ii'})$  — вероятность нахождения иона на расстоянии  $\mathbf{r}_{ii'}$  от данного иона. Тогда, заменяя в (5.7) среднюю по ансамблю сумму на сумму средних по ансамблю и замечая, что имеется  $N_i V$  членов с  $i = i'$  и  $(N_i V)(N_i V - 1) \approx (N_i V)^2$  членов с  $i \neq i'$ , получаем

$$\begin{aligned} \langle \Sigma \rangle &= \sum_{ii'} \langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{ii'}} \rangle = \\ &= N_i V \left[ 1 + N_i V \int_{i \neq i'} d^3 r_{ii'} p(\mathbf{r}_{ii'}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{ii'}} \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

При термическом равновесии вероятность нахождения иона в элементе объема  $d^3 r_{ii'}$  на расстоянии  $\mathbf{r}_{ii'}$  от другого иона можно найти по формуле

$$p(\mathbf{r}_{ii'}) = e^{-Z\epsilon\phi/\kappa T} V^{-1} \approx \left( 1 - \frac{Z\epsilon\phi}{\kappa T} \right) V^{-1}. \quad (5.19)$$

Здесь  $\phi$  — экранированный потенциал иона, определяемый известным выражением

$$\phi = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r_{ii'}} e^{-r_{ii'}/L_{DT}}, \quad (5.20)$$

где  $L_{DT}$  — дебаевский радиус для ионов и электронов (см. § 6 гл. 4):

$$L_{DT}^2 = \frac{\kappa T \epsilon_0}{(Z+1) N e^2} = \frac{1}{Z+1} \left( \frac{v_0}{\omega_p} \right)^2. \quad (5.21)$$

Подставляя (5.19) и (5.20) в (5.18) и проводя интегрирование, находим

$$\langle \Sigma \rangle = N_i V \left[ 1 - \left( \frac{Z}{Z+1} \right) \frac{1}{1 + (kL_{DT})^2} \right]. \quad (5.22)$$

Этот результат можно записать через дебаевский радиус для одних электронов:

$$L_D^2 = \frac{\kappa T \epsilon_0}{N e^2} = (Z+1) L_{DT}^2, \quad (5.23)$$

что дает

$$\langle \Sigma \rangle = N_i V \left[ 1 - \frac{Z}{(Z+1) + (kL_D)^2} \right]. \quad (5.24)$$

Таким образом, вместо интеграла  $I$ , определяемого (5.10), теперь имеем

$$I = \frac{1}{(2\pi)^3} \int 4\pi k^2 dk \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{K_L(k, \omega)} \right] \left[ 1 - \frac{Z}{(Z+1) + (kL_D)^2} \right]. \quad (5.25)$$

Вычисляя этот интеграл, находим, что асимптотический высокочастотный предел [см. (5.17)] остается неизменным. Изменение низкочастотного предела сводится к тому, что параметр  $A$  в (5.17) умножается на величину

$$[(1+Z)^{(1+Z)/Z}]^{-1/2} \quad \text{для} \quad \frac{\omega_p}{\omega} \gg 1. \quad (5.26)$$

При учете эффекта корреляции ионов уменьшается также величина пика вблизи  $\omega = \omega_p$ , показанного на фиг. 37. Поскольку пик появляется при  $kL_D \ll 1$ , то, как следует из (5.25), он уменьшается в отношении

$$1 - \frac{Z}{Z+1} = \frac{1}{Z+1}. \quad (5.27)$$

В общем тепловые корреляции ионов мало влияют на спектр тормозного излучения. Однако нетепловые корреляции ионов, например ионные волны большой амплитуды, могут существенно влиять на испускание, как показано в работе [172].

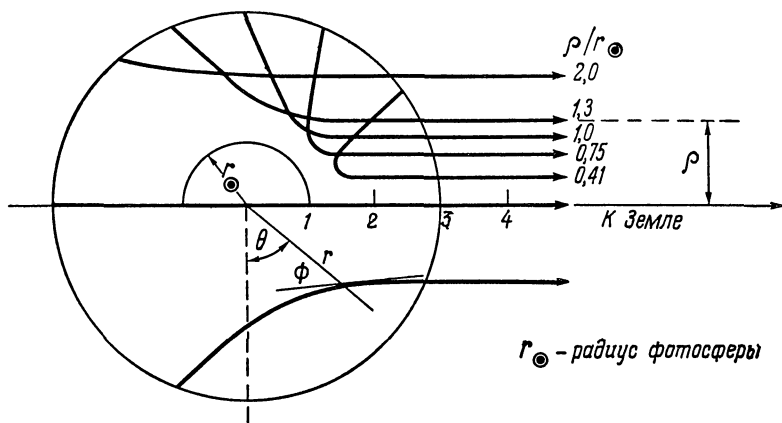
## § 2. Излучение «спокойного» Солнца

В § 4 гл. 3 приводились два примера испускания тормозного излучения: на радиочастотах и в субмиллиметровом диапазоне. Излучение Солнца на радиочастотах является интересным примером излучения, так как в этом случае дисперсионная природа плазмы выдвигается на первый план.

Излучением «спокойного» Солнца называют такую компоненту излучения, которая остается в отсутствие солнечных пятен и других возмущений солнечного диска. Предположение о том, что это излучение представляет собой тормозное излучение из сильно ионизованной плазмы, содержащейся в хромосфере и короне, было впервые выдвинуто в работах Мартина [106, 173] и Гинзбурга [174]; это предположение впоследствии подтвердилось многочисленными наблюдениями.

Плотность электронов в хромосфере и короне меняется в широких пределах и если представить себе, что радиоволны падают на Солнце, то можно ожидать, что длинные волны отразятся от внешних областей короны, а короткие волны проникнут более глубоко в более плотную хромосферу. Поэтому при испускании излучение на длинных волнах происходит главным образом от верхних уровней короны, в то время как излучение на коротких волнах происходит от более глубоко расположенной хромосферы.

Данные спектроскопических измерений позволяют оценить как плотность электронов, так и электронную температуру на различных глубинах короны и хромосферы (температура  $T$  в короне примерно равна  $10^6$ °К, а в хромосфере примерно равна  $3 \times 10^4$ °К).



Фиг. 41. Характерные траектории луча в солнечной короне для излучения на длине волны 5 м (из работы Гинзбурга [10]).

Используя эти результаты и предполагая, что распределение электронов вокруг Солнца сферически симметрично, а также пренебрегая магнитными полями, Смерд [107] провел детальные расчеты интенсивности излучения  $I_{\omega}$  в зависимости от частоты и расстояния от центра Солнца.

При расчете  $I_{\omega}$  необходимо знать оптическую толщину  $\tau_0$ , а для этого, в свою очередь, требуется знать траекторию луча. Если  $\phi$  — угол между радиус-вектором  $r$  и направлением луча (фиг. 41), то, применив закон Снелля, найдем, что вдоль данного луча

$$nr \sin \phi = \text{const.}$$

Пусть точка отражения ( $\phi = 90^\circ$ ) находится на расстоянии  $r = r_0$ , где показатель преломления  $n = n_0$ ; тогда

$$nr \sin \phi = n_0 r_0.$$

Рассмотрим теперь луч, который покидает корону и движется по направлению к Земле на расстоянии  $\rho$  от параллельного луча, выходящего из центра Солнца. Как видно из геометрии, если измерить  $\rho$  на большом расстоянии  $r$  от Солнца, где  $n = 1$ , то  $\rho = n_0 r_0$ , т. е. можно записать

$$nr \sin \phi = n_0 r_0 = \rho. \tag{5.28}$$

Это соотношение совместно с уравнением

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \text{ctg } \phi \tag{5.29}$$

определяет траекторию луча:

$$\frac{dr}{d\theta} = r \left[ \left( \frac{nr}{\rho} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (5.30)$$

На фиг. 41 приведено несколько таких траекторий на различных расстояниях  $\rho$  от центра солнечного диска. Точная их форма и глубина, на которой происходит отражение, зависит от радиального распределения плотности электронов и наблюдаемой частоты излучения. По мере увеличения  $\rho$  точка отражения перемещается в более высокие области короны и одновременно с этим возрастает физическая длина луча. Легко вывести формулу для оптической толщины короны, а именно:

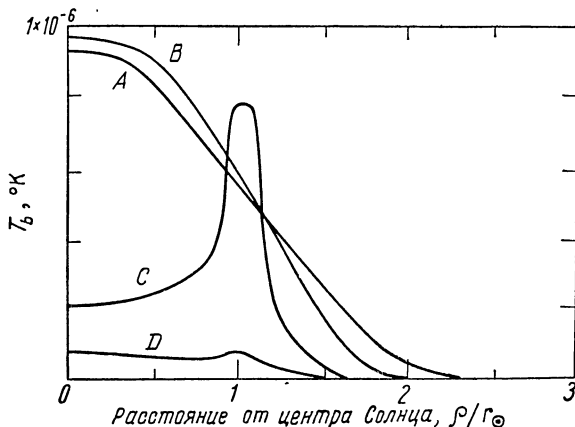
$$\tau_0 = 2 \int_{\rho/n_0}^{\infty} \frac{\alpha_{\omega}(n, r) dr}{V 1 - [\rho/rn(r)]^2}, \quad (5.31)$$

где  $\alpha_{\omega}$  — коэффициент поглощения, который можно найти, зная  $j_{\omega}$  и используя закон Кирхгофа и табл. 3.

На фиг. 42 приведены результаты расчетов интенсивности  $I_{\omega}(\rho)$  поперек солнечного диска для четырех различных длин волн, причем интенсивность выражена через яркостную температуру, определяемую формулой

$$T_b(\rho) \equiv \frac{8\pi^3 c^2}{\chi \omega^2} I_{\omega}(\rho). \quad (5.32)$$

(Смысл температуры  $T_b$  ясен: это есть температура эквивалентного идеально черного тела, интенсивность излучения которого такая же, как и наблюдаемого источника.) Согласно расчетам интенсивность излучения на длинных волнах равномерно уменьшается по мере удаления от центра Солнца по направлению к лимбу. Однако интенсивность излучения на длинах волн между 10 и 100 см заметно возрастает около солнечного лимба. Такое просветление лимба противоположно случаю оптических длин волн, когда имеет место потемнение лимба. На радиочастотах просветление обусловлено, в частности, косыми траекториями лучей вблизи лимба, пересекающими горячую, но частично прозрачную корону. Из формулы (5.31) видна тенденция увеличения  $\tau$ , и соответственно интенсивности: по мере возрастания  $\rho$  увеличивается  $\tau$ , поскольку подынтегральное выражение растет; эта тенденция частично уменьшается из-за увеличения нижнего предела интегрирования. Аналогичное увеличение интенсивности происходит также на оптических длинах волн от более высоких уровней фотосферы; однако температура фотосферы (из которой принимается свет) быстро падает с увеличением высоты, в результате чего лимб оказывается более темным, чем центр.



Фиг. 42. Расчетное распределение яркостной температуры поперек солнечного диска в предположении, что температура короны равна  $10^6$  °К, а температура хромосферы составляет  $3 \times 10^4$  °К (из работы Смерда [107]).

Кривая А —  $\lambda = 5$  м; кривая В —  $\lambda = 3$  м; кривая С —  $\lambda = 0,5$  м; кривая D —  $\lambda = 0,1$  м.

Тот факт, что просветление лимба наблюдается на опыте, является важным подтверждением описанного здесь механизма излучения в верхних слоях Солнца. Однако количественное согласие между теорией и наблюдениями не очень хорошее, по-видимому, из-за использования чрезмерно упрощенной модели [175].

### § 3. Нетепловое излучение вблизи плазменной частоты (излучение «возмущенного» Солнца)

Рассмотрим плазму с немаквелловским распределением электронов по скоростям. Предположим, что покоящиеся ионы не коррелируют. Тогда, как следует из (5.7), (5.8) и (4.109), коэффициент испускания определяется формулой

$$j_{\omega} = NN_i \frac{Z^2 e^6 n}{24\pi^2 \epsilon_0^3 m^2 c^3} \frac{1}{(2\pi)^3} \iint d^3k d^3v f(\mathbf{v}) \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{|k|^2 |K_L(k, \omega)|^2}. \quad (5.33)$$

Этот результат был получен иным путем также в работах [129, 170]. В случае изотропной функции распределения формулу (5.33) можно записать в виде

$$j_{\omega} = NN_i \frac{Z^2 e^6 n}{24\pi^2 \epsilon_0^3 m^2 c^3} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{\max}} dk \frac{F(\omega/k)}{|k| |K_L(k, \omega)|^2}, \quad (5.34)$$

где  $F(u)$  — функция одномерного распределения, определяемая выражением (4.118).

Детальный расчет  $j_\omega$  по формулам (5.33) или (5.34) в широком диапазоне частот и для различных функций  $f$  не проводился. Однако в большей части частотного диапазона коэффициент  $j_\omega$  не сильно отличается от значения, полученного для случая максвелловской функции распределения (см. § 1 настоящей главы), если  $^{3/2}kT$  заменить средней энергией электрона. Различие в числовых значениях  $j_\omega$  будет порядка единицы. (В высокочастотном пределе,  $\omega_p/\omega \ll 1$ , вычисления легко можно провести с помощью формул (2.45) и (3.64); см. также работу [57].) Но как указали Тидман и Дюпре [176], очень серьезные изменения имеют место на частоте  $\omega_0$  и вблизи нее, где появляется пик, см. фиг. 37 и 40. Напомним, что этот пик возникает вблизи нулей действительной и мнимой частей  $K_L$ , т. е. при таких частотах и волновых векторах, при которых возможно свободное распространение продольных волн (см. § 4 гл. 4). В этом случае испускание поперечных волн можно представить как рассеяние продольных волн на ионах с последующим превращением продольных волн в поперечное электромагнитное излучение. Вдали от частоты  $\omega_0$  (т. е. при  $kL_D \gg 1$ ) испускание электромагнитных волн лучше представлять как результат столкновений.

Чтобы найти энергию излучения, соответствующую резонансному пику, проинтегрируем (5.34) по частоте. Используем для величины  $|K_L|^2$ , входящей в знаменатель, приближение (4.75) и с помощью (4.120) получим

$$\int_{\text{Пик при } \omega_p} j_\omega d\omega = - \frac{\sqrt{3} e^2 Z \omega_p^2 v_0}{96\pi^4 \epsilon_0 c^3} \int_0^{k_D} k^2 dk \frac{F(\omega_p/k)}{F'(\omega_p/k)}. \quad (5.35)$$

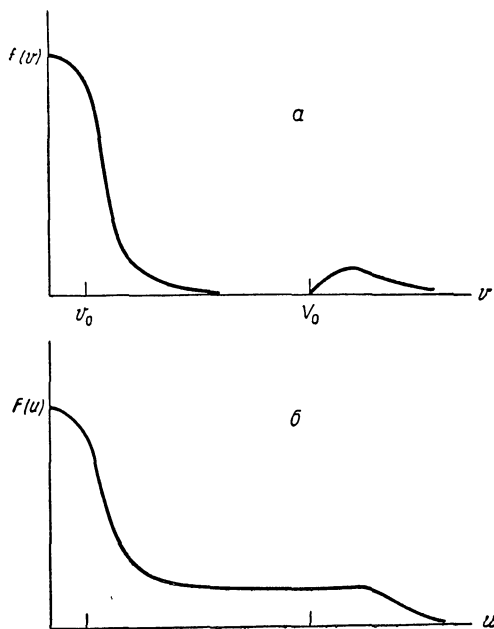
При выводе этого уравнения показатель преломления аппроксимировался следующим выражением:

$$n \approx \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{3k^2 v_0^2}{\omega_p^2}\right)^{1/2}; \quad (5.36)$$

здесь вторая форма записи является просто утверждением того факта, что испускание происходит на частоте, которая приближенно определяется дисперсионным уравнением Бома и Гросса (1.35). Верхний предел интегрирования в (5.35) равен обратной величине дебаевского радиуса  $L_D$ . Такой выбор является до некоторой степени произвольным — с точностью до числового множителя порядка единицы. Вычисляя интеграл в (5.35) для случая максвелловской функции распределения, находим

$$\int_{\text{Пик при } \omega_p} j_\omega d\omega = \frac{\sqrt{3} e^2 Z}{384\pi^4 \epsilon_0 c^3} \frac{\omega_p^5}{v_0}. \quad (5.37)$$





Фиг. 43. *a* — изотропная функция распределения по скоростям при наличии группы быстрых электронов и *б* — соответствующая одномерная функция распределения  $F(u) = \int f(v) d^2v_{\perp}$  (из работы Тидмана и Дюпре [176]).

Заметим, что даже если функция  $f(v)$  является двухгорбой, функция  $F(u)$  монотонно уменьшается и неустойчивость не развивается (см. § 1 гл. 9).

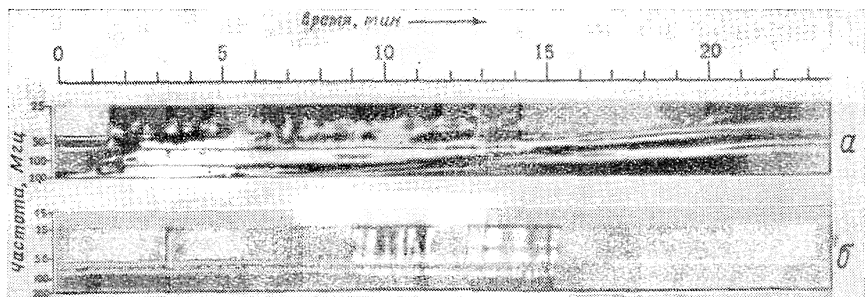
Уравнение (5.35) исследовалось в работе [176] для нескольких различных функций распределения. Наличие производной от  $F$  в знаменателе уравнения показывает, что излучение чувствительно даже к малым изменениям наклона кривой, отвечающей функции распределения. Поэтому, хотя при максвелловской функции распределения энергия, соответствующая пику, пренебрежимо мала, функции распределения с более плоским хвостом в области высоких энергий могут привести к такому огромному увеличению излучения, что оно превысит все остальное тормозное излучение. Это заметно для изотропной функции распределения скоростей, форма которой показана на фиг. 43 [где также изображена одномерная функция распределения  $F(u)$ ]. Функция распределения является максвелловской с «горбом» при высоких энергиях. Можно показать, что большое увеличение излучения в данном случае обусловлено наличием в пространстве скоростей щели

$$v_0 \leq v < V_0, \quad v_0^2 = \frac{\kappa T}{m};$$

в нее попадает очень мало электронов из хвоста максвелловского распределения. Продольные черенковские волны в основном испускаются быстрыми электронами из «горба». Фазовые скорости черенковских волн лежат в диапазоне  $v_0 < \omega/k < V_0$ , и поэтому волны испытывают слабое затухание Ландау на малочисленных тепловых электронах из хвоста максвелловского распределения.

Следует обратить внимание на то, что выбор функции распределения диктуется следующим фактом: она не должна приводить к неустойчивости (т. е. мнимая часть  $\omega$  в решении дисперсионного уравнения должна быть положительной), так как иначе весь анализ становится неприменимым. Теория показывает, что система устойчива, если функция  $F(u)$  имеет только один пик, например когда она является монотонно убывающей функцией скорости  $u$  (см. § 1 гл. 9). Из нижней части фиг. 43, где изображена функция  $F(u)$ , видно, что хотя эта функция всюду убывает, ее плоский участок — почти горизонтальный, и поэтому при такой функции распределения система находится в опасной близости от неустойчивого состояния.

**Излучение «возмущенного» Солнца.** Сильное электромагнитное излучение на плазменной частоте и вблизи нее легко наблюдается в лабораторной плазме, такой как пучково-плазменный разряд, тлеющий разряд низкого давления и дуговой разряд. Однако в большинстве случаев излучение в такой плазме возникает при развитии неустойчивости, в частности двухпоточковой неустойчивости, при которой имеется относительный дрейф между двумя или более сортами заряженных частиц (см. § 2 гл. 9, а также работы [138, 177, 178]). Такие ситуации лежат вне рамок данной теории. Однако интересным примером сильного излучения вблизи



Фиг. 44. Пример вспышки типа II (а) и группы вспышек типа III (б), зарегистрированных в метровом диапазоне длин волн (из работы Вайлда, Смерда и Вайса [179]).

Спектры представляют собой запись интенсивности следов как непрерывной функции времени и частоты.

$\omega_p$  являются солнечные вспышки типа II и типа III (см. работы [179, 180]). Они имеют отношение к нашей дискуссии из-за наличия некоторых фактов, указывающих на то, что двухпоточковая неустойчивость отсутствует, а наблюдаемое испускание может быть связано с усиленным (но устойчивым) тормозным излучением, рассмотренным ранее в этом параграфе.

Вспышки типа II и типа III представляют собой нерегулярные вспышки излучения, которые возникают в локализованных местах солнечного диска. По-видимому, они связаны с солнечной активностью. Интенсивность этих радиоволн может быть на много порядков выше интенсивности радиоизлучения «спокойного» Солнца, рассмотренного в § 2 настоящей главы. (Яркостная температура во время вспышек может достигать таких больших значений, как  $10^{11}$  °К, в то время как температура короны спокойного Солнца равна примерно  $10^6$  °К.)

Длительность вспышки типа III обычно около 10 сек, а типа II около 10 мин. В обоих случаях проявляется замечательное разрешение спектра частот во времени: а) радиоизлучение происходит неодновременно на различных частотах: вспышка на высоких частотах опережает вспышку на низких частотах; б) частотный спектр состоит из двух резко выраженных пиков (при  $\omega \approx \omega_p$  и  $\omega \approx 2\omega_p$ ), но сильное излучение на второй гармонике чаще возникает при вспышках типа II, чем при вспышках типа III. На фиг. 44 показаны типичные спектры с разрешением во времени.

При вспышках типа III наблюдаемый диапазон частот лежит от  $\sim 600$  до  $\sim 5$  Мгц и максимум интенсивности быстро дрейфует со скоростью примерно от 10 до 100 Мгц в 1 сек. Вспышки типа II характеризуются меньшей скоростью дрейфа максимума интенсивности:  $\leq 1$  Мгц в 1 сек.

Вспышка типа II следует через несколько минут после вспышки типа III (когда последняя уже убывает) и таким образом оказывается второй фазой явления.

Вспышки типа II и типа III интерпретируются как плазменные колебания или волны, возбужденные движущимся наружу агентом. Из данных по дрейфовой скорости максимума интенсивности по спектру можно определить скорость агента, вызывающего вспышку типа II (она составляет  $\sim 1000$  км/сек), и агента, ответственного за вспышку типа III [она составляет  $(0,2 \div 0,7)$  с]. Общепринято интерпретировать это следующим образом: извержение из хромосферы или нижней части короны состоит из одного или более «пакетов» электронов с энергией в интервале от 20 до 200 кэв, причем в каждом пакете содержится от  $10^{23}$  до  $10^{35}$  электронов. Часть электронов, движущихся вверх, в корону, дает вспышку типа III. Это извержение инициирует также ударные волны, распространяющиеся в различных направлениях. При их движении вверх, сквозь корону, рождаются быстрые электроны, которые, в свою

очередь, возбуждают плазменные колебания, интерпретируемые как вспышки типа II.

На первый взгляд кажется, что подходящим механизмом для объяснения вспышек является двухпотоковая неустойчивость (см. работы [158, 181]). Однако, как указал Старрок [182], скорость развития неустойчивости так велика, что, если она разовьется, первичный пучок вопреки наблюдениям сильно затормозится на расстоянии нескольких метров. К несчастью, нельзя объяснить затухание неустойчивости и столкновениями, так как частота столкновений порядка  $10^2 \text{ сек}^{-1}$ , что далеко не достаточно для погашения неустойчивости. Неясно, как подавляется неустойчивость; высказано предположение о рассеянии продольных плазменных волн на неоднородностях распределения плотности плазмы короны.

Двухпотоковая неустойчивость не может, по-видимому, объяснить наблюдаемое излучение электромагнитных волн при  $\omega \approx \omega_p$ , происхождение которого хорошо объясняет теория усиления излучения, приведенная ранее в этом параграфе. Однако теория не объясняет сильного излучения на второй гармонике. Перейдем теперь к решению этой проблемы.

**Излучение на частотах вблизи  $2\omega_p$ .** Усиление испускания при  $\omega \approx 2\omega_p$  может происходить вследствие взаимодействия высшего порядка (квадрупольного). Этот процесс можно представить как «столкновение» двух продольных электронных плазменных волн с волновыми векторами  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}''$ , приводящее к появлению электромагнитной волны с волновым вектором  $\mathbf{k}_T$ . В случае «упругого» столкновения должны сохраняться импульс и энергия:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_T &= \mathbf{k}' + \mathbf{k}'', \\ \omega(\mathbf{k}_T) &= \omega(\mathbf{k}'_L) + \omega(\mathbf{k}''_L). \end{aligned}$$

Чтобы продольные волны испытывали только слабое затухание Ландау, частота каждой из них должна лежать в диапазоне  $\omega_p < \omega \leq 1,5\omega_p$ . Следовательно, частота поперечной волны должна быть по крайней мере не меньше  $2\omega_p$ . Отметим также, что поскольку  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}''$  значительно больше по величине, чем  $\mathbf{k}_T$ , две продольные волны должны испытывать почти «лобовое» столкновение.

Теория генерации поперечных волн при взаимодействии двух продольных волн рассматривалась в работах [129, 176, 183—185]. Приближенное значение коэффициента испускания (для  $\omega$  вблизи  $2\omega_p$ ) определяется формулой

$$j_{\omega T} = \frac{e^2 \omega_T k_T^3 \omega_p^2}{960 \pi^4 c^2 \epsilon_0} \delta(\omega_T - 2\omega) \int_0^{k_D} \frac{dk}{\omega^2} \left( \frac{F(\omega/k)}{F'(\omega/k)} \right)^2, \quad (5.38)$$

где  $\omega_T$  и  $k_T$  — соответственно частота и волновое число для поперечной волны,  $\omega$  и  $k$  — аналогичные величины для продольной

волны. Отметим, что параметр  $F/F'$  входит здесь в подинтегральное выражение в квадрате, в то время как в подинтегральное выражение уравнения (5.35) он входит в первой степени.

Принтегрировав (5.38) по частоте и используя дисперсионную формулу

$$k_T^2 c^2 = \omega_T^2 - \omega_p^2 \approx 3\omega_p^2,$$

получим

$$\int_{\text{Пик при } \sim 2\omega_p} j_{\omega_T} d\omega_T \approx \frac{\sqrt{3} e^2 \omega_p^4}{160\pi^4 \epsilon_0 c^5} \int_0^{k_D} dk \left( \frac{F(\omega_p/k)}{F'(\omega_p/k)} \right)^2. \quad (5.39)$$

Уравнение (5.39) следует сравнить с уравнением (5.35) для случая испускания при  $\omega \approx \omega_p$ . Применимость обоих уравнений к солнечным вспышкам обсуждается в работе Тидмана [186], в которой проведены числовые расчеты.

#### § 4. Высокочастотная проводимость и коэффициент поглощения полностью ионизованной плазмы

Другой подход к расчету испускания является менее прямым, чем приведенный в предыдущем параграфе: в нем используется кинетическое уравнение для плазмы. Здесь мы вычислим высокочастотную проводимость и найдем коэффициент поглощения  $\alpha_\omega$  из получившегося дисперсионного уравнения. Если плазма находится в термическом равновесии, то закон Кирхгофа дает  $j_\omega$ . В отсутствие термического равновесия необходимо провести во всяком случае независимый расчет коэффициента  $\alpha_\omega$  для полного описания излучательных свойств среды. Цель данного параграфа — подытожить основные результаты таких расчетов, не приводя детальных выводов.

Даусон и Оберман [169], впервые предложившие подход на основе кинетического уравнения, исходили из уточненной трактовки уравнения Власова. В этом уравнении электрическое поле  $\mathbf{E}$  в ускорительном члене —  $(e/m)\mathbf{E} \cdot (\partial f/\partial \mathbf{v})$  состоит из двух частей: обычного самосогласованного синусоидального электрического поля, приводящего в движение электроны, и электрического поля пространственного заряда электронов и ионов, определяемого уравнением

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{Ze}{\epsilon_0} \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \frac{e}{\epsilon_0} \int f d^3v.$$

При линеаризации уравнения Власова (см. § 5 гл. 4) авторы учитывают дискретную природу ионов, что приводит к малому дополнительному возмущению распределения электронов по

скоростям. Эта особенность до сих пор не учитывалась [см., например, (3.45)]: ионы рассматривались, по существу, как фон — жидкость, служащая для нейтрализации среды. Таким образом, дискретная природа ионов обеспечивает центры рассеяния для электронов.

Когда электрическое поле, приводящее в движение электроны, носит характер поперечного колебания ( $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ ), дисперсионное уравнение принимает вид

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \psi(\omega), \quad (5.40)$$

где  $\sigma$  — высокочастотная проводимость и

$$\psi(\omega) = \frac{Ze^2}{3m\epsilon_0\omega^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{\max}} d^3k \left[ \frac{1}{K_L(k, \omega)} - \frac{1}{K_L(k, 0)} \right]. \quad (5.41)$$

Этот результат применим к любому изотропному распределению электронов по скоростям. Предполагается, что ионы неподвижны и не коррелируют в пространстве. Для плазмы, находящейся в термическом равновесии, корреляцию ионов можно учесть, умножая подынтегральное выражение (5.41) на величину в квадратных скобках из (5.24).

Величина  $|\psi|$  мала по сравнению с единицей, и если положить ее равной нулю, то мы возвратимся к известному дисперсионному уравнению для поперечных волн

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2;$$

величина  $\omega \operatorname{Im} \psi$  равна  $v_{\phi} \psi(ei)$  из формулы (3.94).

Коэффициент поглощения  $\alpha_{\omega}$ , определенный [см. (1.129)] как

$$\alpha_{\omega} = -2 \operatorname{Im} k,$$

можно также записать в виде

$$\alpha_{\omega} = \frac{1}{\epsilon_0 n c} \operatorname{Re} \sigma,$$

где показатель преломления  $n$  задается формулой

$$n = \frac{c}{\omega} \operatorname{Re} k.$$

Тогда из (5.40) и (5.41) следует

$$\alpha_{\omega} = \frac{Z^2 e^4 N_i}{3\epsilon_0^2 m^2 c \omega^3 n} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{k_{\max}} d^3k \operatorname{Im} \frac{1}{K_L(k, \omega)}, \quad (5.42)$$

где использовался тот факт, что  $\operatorname{Im} K_L(k, 0) = 0$  [см. (4.86)]. Уравнение (5.42) также непосредственно получается из (5.9) и закона

Кирхгофа для термически равновесной плазмы:

$$\frac{j_\omega}{\alpha_\omega} = \frac{n^2 \omega^2 \kappa T}{8\pi^3 c^2}.$$

Из (4.74) и (4.86) следует другая форма записи (5.42):

$$\alpha_\omega = -NN_i \frac{\pi Z^2 e^6}{3\epsilon_0^3 m^3 c \omega^3 n} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int d^3 k d^3 v \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f(v)}{\partial v} \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{|k|^2 |K_L(k, \omega)|^2}. \quad (5.43)$$

**Закон Кирхгофа для термически неравновесной плазмы.** Уравнения (5.33) для  $j_\omega$  и (5.43) для  $\alpha_\omega$  полностью определяют интенсивность испускания  $I_\omega$  для полностью ионизованной, термически неравновесной плазмы (см. § 7 гл. 1). Закон Кирхгофа, выраженный через функцию источника  $S_\omega$  (или через температуру излучения  $T_r$ ), можно записать [см. (1.140)] следующим образом:

$$S_\omega = \frac{1}{n^2} \frac{j_\omega}{\alpha_\omega} = \frac{\omega^2}{8\pi^3 c^2} \kappa T_r, \quad (5.44)$$

где теперь

$$\frac{\kappa T_r}{m} = - \frac{\int \int d^3 k d^3 v \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{|k|^2 |K_L(k, \omega)|^2} f(v)}{\int \int d^3 k d^3 v \frac{\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{|k|^2 |K_L(k, \omega)|^2} \cdot \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f(v)}{\partial v}}{\omega}}. \quad (5.45)$$

Общий вид этого выражения такой же, как и выражения (2.47), полученного на основании принципа детального баланса. Уравнение можно упростить, проводя интегрирование по скоростям, перпендикулярным волновому вектору  $\mathbf{k}$ , и выражая результат через одномерную функцию распределения  $F(u)$ :

$$\frac{\kappa T_r}{m} = - \frac{\int dk \frac{F(\omega/k)}{|k| |K_L(k, \omega)|^2}}{\int dk \frac{F'(\omega/k)}{\omega |K_L(k, \omega)|^2}}. \quad (5.46)$$

Если  $F$  — максвелловская функция распределения, то правая часть сводится точно к величине  $\kappa T/m$ .

Когда функция распределения не максвелловская, температура излучения  $T_r$  может сильно превышать истинную температуру электронов  $T$  (она также может быть меньше  $T$ ). Это заметно вблизи резонанса,  $\omega \approx \omega_p$ , когда коллективные моды слабо затухают. В окрестности резонанса величину  $|K_L(k, \omega)|^2$  можно аппроксимировать выражением (4.75). Используя (4.120), найдем, что выражение (5.46) принимает вид

$$\frac{\kappa T_r}{m} \Big|_{\omega \approx \omega_p} \approx - \frac{\omega_p}{k_0} \frac{F(\omega_p/k_0)}{F'(\omega_p/k_0)},$$

где  $k_0$  определяется из соотношения

$$\omega^2 \approx \omega_p^2 + 3k_0^2 v_0^2.$$

Мы видим, что точно так же, как и в случае усиленного тормозного излучения, рассмотренного в § 3 настоящей главы, температура излучения сильно зависит от производной функции распределения  $F'$  и наличие плоского хвоста может привести к большим значениям  $T_r$ . Поскольку  $T_r$  является непосредственно измеряемой величиной (см. § 3 гл. 2 и § 3 гл. 10), представляется возможным сделать некоторые заключения относительно  $F$ , измеряя величину и форму пика вблизи плазменной частоты у кривой зависимости  $T_r$  от частоты.

**Плотность энергии излучения.** Плотность энергии поперечных волн  $u_\omega$  можно найти следующим образом. Решим дисперсионное уравнение (5.40) для действительного значения  $k$  и комплексного значения  $\omega$ . Тогда величина  $2\text{Im } \omega$  характеризует скорость затухания волн и постоянная времени затухания определяется формулой

$$\tau = \frac{1}{2 \text{Im } \omega}. \quad (5.47)$$

В этом случае средняя скорость поглощения равна  $u_\omega/\tau$  и в равновесном состоянии точно совпадает со скоростью испускания. Поэтому, согласно (5.34),

$$\frac{u_\omega}{\tau} = 4\pi j_\omega, \quad (5.48)$$

где  $u_\omega$  — плотность энергии для излучения с одной поляризацией.

Постоянную времени затухания  $\tau$  легко найти из (5.40) и (5.41); для слабого затухания ( $\text{Im } \omega \ll \text{Re } \omega$ ) имеем

$$\tau = - \frac{6\pi m \epsilon_0 \omega^2}{Ze^2 \omega_p^4} \left[ \int dk \frac{F'(\omega/k)}{\omega |K_L(k, \omega)|^2} \right]^{-1}, \quad (5.49)$$

и тогда плотность энергии электромагнитных волн определяется уравнением

$$u_\omega = - \frac{m \omega^2 n}{2\pi^2 c^3} \frac{\int dk \frac{F(\omega/k)}{|k| |K_L(k, \omega)|^2}}{\int dk \frac{F'(\omega/k)}{\omega |K_L(k, \omega)|^2}}. \quad (5.50)$$

Это уравнение получено в работе [129]. Для случая термически равновесной плазмы оно сводится к выражению

$$u_\omega \text{ (Максвелловское распределение)} = \frac{n\omega^2}{2\pi^2 c^3} (\kappa T),$$

что согласуется с (2.16).



**Испускание продольных волн при движении электрона с ускорением.** Испускание продольных волн, рассмотренное в § 4—6 гл. 4, происходило при движении надтепловых электронов с практически равномерной скоростью сквозь плазменную среду. Механизм испускания объяснялся эффектом Черенкова. Обратным процессом было затухание Ландау. Дополнительно к эффекту Черенкова продольные волны могут генерироваться вследствие ускоренного движения электронов, рассеянных на ионах, по аналогии с тормозным излучением поперечных электромагнитных волн.

Коэффициент испускания продольных волн  $\mathcal{F}_{\omega L}$  можно получить из соотношения, аналогичного (5.48), а именно:

$$4\pi\mathcal{F}_{\omega L} = \frac{u_{\omega L}}{\tau_L},$$

где  $u_{\omega L}$  — плотность энергии продольных волн и  $\tau_L = \frac{1}{2} \text{Im } \omega$  — постоянная времени затухания. Плотность энергии для термически равновесной плазмы определяется формулой (2.17), а  $\tau_L$  можно найти из дисперсионного соотношения для продольных волн [ср. (5.40)]:

$$0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \psi(\omega). \quad (5.51)$$

Величина  $\psi(\omega)$  определяется по формуле (5.41). Соотношение (5.51) не включает затухания Ландау, и его не нужно смешивать с дисперсионным уравнением из § 5 гл. 4. Затухание, учтенное в (5.51), практически обусловлено процессами столкновений электронов с ионами. Итак, мы находим

$$\mathcal{F}_{\omega L} = \frac{Ze^2\omega_p^3(\omega^2 - \omega_p^2)^{1/2}}{144\sqrt{3}\pi^4\epsilon_0v_0^3} \int dk \frac{F(\omega/k)}{k|K_L(k, \omega)|^2}, \quad (5.52)$$

где, как видно, подынтегральное выражение то же самое, что и в (5.34) для случая тормозного излучения.

Уравнение (5.52) применимо только к плазме с максвелловским распределением электронов, поскольку использованное при его выводе значение  $u_{\omega L}$  относится именно к такой среде.

Целесообразно сравнить уравнение (5.52) для продольного испускания с (5.34) для тормозного излучения. Уравнение (5.52) справедливо в узком диапазоне частот вблизи плазменной частоты, и в этой области продольное испускание превышает тормозное излучение:

$$\frac{\mathcal{F}_{\omega L}}{j_{\omega}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left( \frac{c}{v_0} \right)^3,$$

где  $v_0^2 = \kappa T/m$  [ср. с дискуссией ниже (2.17)].

Подобным образом сравним черенковский коэффициент испускания  $j_{\omega L}$ , определяемый формулой (4.78), с коэффициентом испускания продольных волн  $\mathcal{F}_{\omega L}$ , определяемым уравнением (5.52). Проинтегрировав (4.78) и (5.52) по волновым числам от  $k = 0$  до  $k = k_D$  и по частоте в области резонансного пика при  $\omega \approx \omega_p$ , найдем

$$\frac{\int_{\omega \sim \omega_p} \mathcal{F}_{\omega L} d\omega}{\int_{\omega \sim \omega_p} j_{\omega L} d\omega} \approx \frac{\sqrt{2\pi} Z}{72 \times (0,56) \pi^2 NL_D^3}.$$

Откуда видно, что черенковское испускание, грубо говоря, в  $NL_D^3$  раз больше испускания продольных волн. Величина  $4\pi NL_D^3/\sqrt{3}$  равна числу частиц в дебаевской сфере. Тот факт, что отношение двух коэффициентов испускания равно  $\sim 1/NL_D^3$ , не является случайным. В кинетической теории плазмы величина  $1/NL_D^3$  служит параметром разложения при решении уравнений и различные процессы испускания могут тогда рассматриваться как члены различного порядка в таком разложении. При этой схеме упорядочивания эффектов два коэффициента испускания  $j_{\omega}$  и  $\mathcal{F}_{\omega L}$ , обусловленные движениями электрона с ускорением, оказываются членами более высоких порядков по параметру разложения, чем коэффициент черенковского испускания  $j_{\omega L}$  (см., например, работы [170, 187]).

### § 5. Связь продольных и поперечных электромагнитных волн на границах

В бесконечной однородной плазме обмен энергией между продольными и поперечными волнами происходит на микроскопическом уровне и является, по существу, результатом «зернистости» среды. Это проявляется как рассеяние продольных волн ионами (§ 1 настоящей главы) или как взаимное рассеяние двух (или более) продольных волн (§ 3 настоящей главы). Другой механизм связи обусловлен макроскопическими неоднородностями среды, резкими границами и т. д.

Эффективность, с которой две волны связаны на границе, т. е. доля энергии, трансформированная из одной моды в другую, очень сильно зависит буквально от каждого параметра плазмы. Поэтому едва ли существует теоретическая модель (а в литературе их имеется несколько), которую можно было бы легко применить к каждой данной экспериментальной ситуации. По этой причине мы не будем пытаться вычислить эффективность связи, а лучше обсудим некоторые общие свойства генерации поперечных волн на границе плазма — вакуум.

В бесконечной изотропной плазме не происходит черенковского испускания *поперечных* электромагнитных волн, так как фазовая скорость  $\omega/k$  всегда больше скорости света  $c$ . Волновое уравнение для поперечных волн имеет вид

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}_s, \quad (5.53)^1$$

где  $\mathbf{A}$  — вектор-потенциал и  $\mathbf{J}_s$  — плотность тока, обусловленного движением пробного заряда через среду. Если электрон движется вдоль оси  $z$  с постоянной скоростью  $u$ , то

$$\begin{aligned} J_s(z) &= -eu \delta(x) \delta(y) \delta(z - ut), \\ J_s(x) &= J_s(y) = 0. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Решая (5.53) и (5.54), находим

$$A_z(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} (eu) \frac{e^{-r_0 \omega_p/c}}{r_0} \frac{1}{[1 - (u/c)^2]^{1/2}}, \quad (5.55)$$

где

$$r_0^2 = x^2 + y^2 + \frac{(z - ut)^2}{1 - (u/c)^2}.$$

Видно, что электрон, хотя и окружен электромагнитным полем, не излучает. Заметим, что поле спадает экспоненциально с расстоянием  $r_0$  и эффективный радиус экранирования равен  $c/\omega_p$ . Это напоминает дебаевскую экранировку электростатического поля (5.20), при которой, однако, радиус экранирования  $L_D = v_0/\omega_p$  много меньше (в  $c/v_0$  раз) радиуса экранирования электромагнитного поля.

Излучение возможно, если вместо стационарного тока  $J_s(z)$  будет переменный ток. Возьмем простой случай [188]:

$$\begin{aligned} \omega_p &= 0, \\ J_s(z) &= J_0 e^{i(\omega t + kz)} \delta(x) \delta(y), \\ J_s(x) &= J_s(y) = 0. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Тогда находим

$$A_z(x, y, z) = \frac{\mu_0}{2\pi} J_0 e^{i(\omega t + kz)} K_0 \left[ \left( k^2 - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right)^{1/2} r_0 \right], \quad (5.57)$$

где

$$r_0^2 = x^2 + y^2$$

<sup>1)</sup> Уравнение (5.53) можно получить из (4.44) и следующих соотношений:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Условие калибровки имеет вид

$$c^2 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \omega_p^2 \phi = 0.$$

и  $K_0(x)$  — модифицированная функция Ханкеля. Для больших  $x$

$$K_0(x) \rightarrow \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}.$$

Следовательно, когда  $k > \omega/c$ , что соответствует случаю, при котором фазовая скорость возмущения меньше  $c$ , поля спадают экспоненциально с расстоянием  $r_0$  от оси  $z$  (для больших  $r_0$ ) и источник тока не излучает. Однако, когда  $k < \omega/c$ , т. е. фазовая скорость превышает  $c$ , член  $K_0(x)$  является осцилляторным и затухает как  $r^{-1/2}$ . В данном случае источник теряет энергию на излучение; мощность, испускаемая на единицу длины  $z$ , равна

$$\frac{\mu_0 J_0^2 \omega}{8} \left[ 1 - \left(\frac{c}{v_p}\right)^2 \right],$$

где  $v_p = \omega/k$  — фазовая скорость. Направление распространения волны является характеристикой черенковской волны.

Этот пример имеет следующее отношение к колебательным процессам в плазме. В неограниченной изотропной плазме продольные колебания таковы, что ток смещения точно компенсирует ток проводимости; магнитное поле отсутствует, и поэтому нет электромагнитного излучения. Однако в ограниченной плазме эта компенсация не является полной, и при определенных условиях внутри и вне среды возможно излучение, подобное черенковскому. Вскоре мы вернемся к этой проблеме; обсудим сперва кратко свойства волн на границе раздела между средой и свободным пространством.

**Поверхностные волны.** Рассмотрим границу раздела между средой (плазмой) и вакуумом. Граница может быть гладкой или нерегулярной. В результате возбуждения среды вдоль этой границы могут распространяться волны. Будем игнорировать вначале свойства среды и интересоваться только пространством над границей. Если  $\alpha$  — волновой вектор, перпендикулярный поверхности (фиг. 45), а  $\beta$  — волновой вектор, параллельный поверхности, то в результате разделения переменных в волновом уравнении имеем

$$k_0^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad (5.58)$$

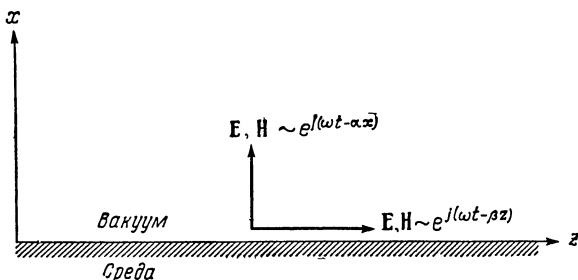
где  $k_0 = \omega/c$  — волновой вектор в вакууме. Оба вектора  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть комплексными:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_r + j\alpha_i, \\ \beta &= \beta_r + j\beta_i. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Подставив (5.59) в (5.58) и выделив действительную и мнимую части, получим

$$k_0^2 = (\alpha_r^2 + \beta_r^2) - (\alpha_i^2 + \beta_i^2), \quad (5.60)$$

$$0 = \alpha_r \alpha_i + \beta_r \beta_i. \quad (5.61)$$



Фиг. 45. Волны на границе раздела двух сред.

Поверхностная волна с фазовой скоростью  $v_s = \omega/\beta_r$ , меньшей скорости света  $c$ , не излучается. Следовательно,  $\beta$  — чисто действительная величина и из (5.60) и (5.61) вытекает, что  $\alpha$  должна быть величиной чисто мнимой. Поэтому фазовые фронты нормальны к границе раздела и амплитуда волны уменьшается экспоненциально с расстоянием  $x$  от поверхности. Основную часть своей энергии волна переносит на небольшое расстояние от границы раздела (фиг. 46).

Поверхностная волна с фазовой скоростью  $v_s$ , большей скорости света  $c$ , излучается непрерывно при движении вдоль поверхности. Теперь  $\beta_i \neq 0$  и обе величины,  $\alpha$  и  $\beta$ , являются комплексными. Такая волна называется «волной с утечкой».

Компоненты  $\alpha_r$  и  $\beta_r$  (постоянные распространения) считаются положительными для поверхностной волны, распространяющейся вдоль оси  $+z$ , причем компонента  $\alpha_r$  соответствует волне, выходящей из поверхности; компонента  $\beta_i$  — отрицательная величина, поскольку волна затухает по мере распространения. Тогда, как следует из (5.61), компонента  $\alpha_i$  — положительная величина и амплитуда волны вверх от границы экспоненциально возрастает. Результирующий волновой вектор (его действительную часть) можно записать в виде

$$\mathbf{k}_r = \hat{\mathbf{i}}_x \alpha_r + \hat{\mathbf{i}}_z \beta_r,$$

где  $\hat{\mathbf{i}}$  — единичный вектор. Следовательно, как показано на фиг. 46, волна удаляется от поверхности под углом  $\theta$ , таким, что

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\alpha_r}{\beta_r}. \quad (5.62)$$

Далее, если записать мнимую часть  $\mathbf{k}$  в виде

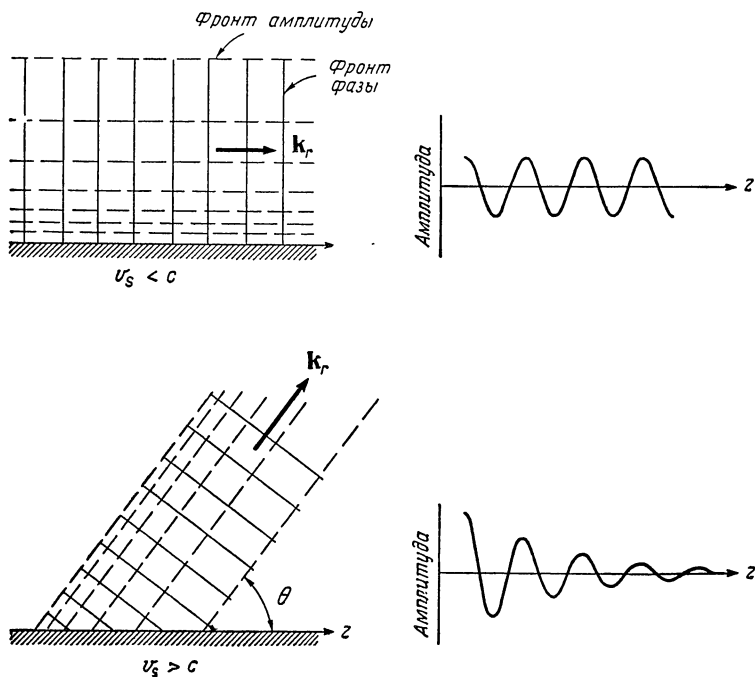
$$\mathbf{k}_i = \hat{\mathbf{i}}_x \alpha_i + \hat{\mathbf{i}}_z \beta_i,$$

то (5.61) примет вид

$$0 = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{k}_i, \quad (5.63)$$

откуда следует, что фазовые фронты перпендикулярны амплитудным фронтам. Быстрая волна ( $v_s > c$ ) с утечкой оказывается повернутой медленной волной ( $v_s < c$ ), которая «оторвалась» от поверхности. Она обладает многими характерными чертами черенковского излучения.

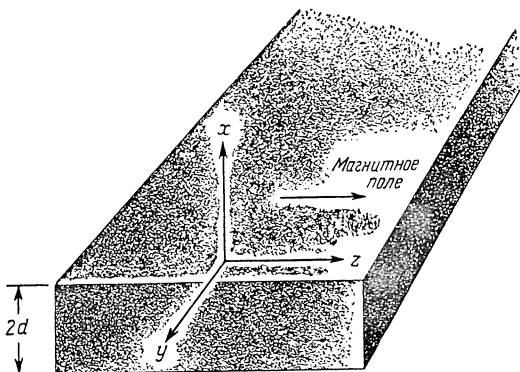
Так как амплитуда волны с утечкой неограниченно возрастает в направлении от границы (см. верхнюю левую часть фиг. 46),



Фиг. 46. Неизлучающая поверхностная волна (вверху) и излучающая волна с утечкой (внизу) (из работы Цукера [189]).

условие излучения на бесконечности нарушается. Эта трудность связана с тем, что поверхность рассматривалась как бесконечно протяженная. Для конечной поверхности пучок имеет конечную ширину и амплитуда быстро спадает после пересечения границы раздела.

Чтобы определить, возбуждаются ли в данной ситуации волны с утечкой, нужно решить дисперсионное уравнение для волн, которые могут распространяться в среде ниже границы раздела. Одна (или более) из таких мод может быть модой с утечкой ( $v_s = \omega/\beta_r > c$ ); скорость затухания волны с расстоянием  $z$  является мерой эффективности, с которой данная мода излучает. (Особенно



Фиг. 47. Бесконечный плазменный слой толщиной  $2d$ .  
Граница раздела плазма — вакуум проходит при  $x = \pm d$ .

ясное обсуждение поверхностных волн и волн с утечкой содержится в работах Цукера [189, 190].)

**Излучение плазменного слоя (Даусон и Оберман [191]).** Рассмотрим в качестве примера возможность излучения из слоя холодной плазмы (тепловым движением пренебрегаем).

Рассмотрим слой толщиной  $2d$ , но неограниченный в направлениях  $z$  и  $y$  (фиг. 47). Для упрощения проблемы приложим сильное магнитное поле в направлении  $z$ , так что движением электрона перпендикулярно силовым линиям можно пренебречь и  $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{1}}_z v_z$ . Решения для электромагнитных полей, удовлетворяющие уравнениям Максвелла, имеют тогда экспоненциальную зависимость от  $z$  вида  $\exp(-j\beta z)$ , где  $\beta$  — пока некоторая произвольная функция от  $\omega$ . Метод получения решения подобен методу, который используется в волноводных задачах: поля и векторные операторы представляются в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \mathbf{E}_T + \hat{\mathbf{1}}_z E_z, \\
 \mathbf{H} &= \mathbf{H}_T + \hat{\mathbf{1}}_z H_z, \\
 \nabla &= \nabla_T + \hat{\mathbf{1}}_z \frac{\partial}{\partial z}, \\
 &= \nabla_T - j\beta \hat{\mathbf{1}}_z, \\
 \nabla_T &= \hat{\mathbf{1}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{1}}_y \frac{\partial}{\partial y};
 \end{aligned}
 \tag{5.64}$$

здесь индекс  $T$  относится к поперечным компонентам, а  $z$  — к продольным (вдоль оси  $z$ ). Подставляя (5.64) в уравнение Максвелла,

получим волновое уравнение<sup>1)</sup> для  $E_z$ :

$$\nabla_T^2 E_z + p^2 K E_z = 0, \quad (5.65)$$

где

$$p^2 = k_0^2 - \beta^2, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad (5.66)$$

$$K = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Если  $E_z$  определено, то остальные компоненты поля известны:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T &= \frac{-j\beta}{p^2} \nabla_T E_z, \\ \mathbf{H}_T &= \frac{-j\omega\epsilon_0}{p^2} \hat{\mathbf{i}}_z \times (\nabla_T E_z). \end{aligned} \quad (5.67)$$

Те же самые уравнения применимы вне плазменной среды, если положить  $K$  равным единице:

$$\nabla_T^2 E_z + p^2 E_z = 0. \quad (5.68)$$

Уравнения (5.65) и (5.68) теперь нужно решить при соответствующих граничных условиях. Поскольку предполагается большое магнитное поле, слои заряда или тока на границах не образуются. Следовательно, все компоненты  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  непрерывны на границе раздела.

Нормальные моды слоя делятся на два класса: симметричные моды, для которых  $E_z$  меняется как  $\cos(\alpha x)$ , и антисимметричные

<sup>1)</sup> Электроны вынуждены двигаться вдоль оси  $z$ , так что высокочастотный ток имеет единственную компоненту

$$\mathbf{i}_z J_z = \mathbf{i}_z \left( \frac{Ne^2}{j\omega m} \right) E_z.$$

Поэтому вместо второго уравнения Максвелла (1.17) теперь имеем

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_T + (j\omega\epsilon_0) \mathbf{i}_z K E_z.$$

Это приводит к (5.65) — (5.67). Если снять ограничение, которое налагается на движение электрона, то уравнения (5.65) — (5.67) нужно заменить на следующие:

$$\begin{aligned} \nabla_T^2 E_z + q^2 E_z &= 0, \\ q^2 &= K k_0^2 - \beta^2, \\ \mathbf{E}_T &= - \frac{j\beta}{q^2} \nabla_T E_z, \\ \mathbf{H}_T &= - \frac{j\omega\epsilon_0 K}{q^2} \mathbf{i}_z \times (\nabla_T E_z). \end{aligned}$$

Интересно отметить, что последние четыре уравнения являются как раз уравнениями  $E$ -волны, распространяющейся в диэлектрическом волноводе.



моды, для которых  $E_z \sim \sin(\alpha x)$ . Тогда для поля внутри плазмы можно записать

$$E_z^i = E_{z0}^i \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha^i x \\ \sin \alpha^i x \end{array} \right\} e^{-i(\gamma y + \beta z)}, \quad (5.69)$$

для поля вне плазмы —

$$E_z^0 = E_{z0}^0 e^{-i(\alpha^0 x + \gamma y + \beta z)}. \quad (5.70)$$

Отметим, что волновые числа  $\beta$  и  $\gamma$  одни и те же как над, так и под границей раздела. Такое равенство фаз необходимо для того, чтобы граничным условиям можно было удовлетворить в каждой точке поверхности.

Подставляя (5.69) и (5.70) в (5.65) и (5.68), получаем

$$(\alpha^i)^2 + \gamma^2 = K p^2 \quad \text{внутри плазмы,} \quad (5.71)$$

$$(\alpha^0)^2 + \gamma^2 = p^2 \quad \text{вне плазмы.} \quad (5.72)$$

Уравнение (5.72) адекватно (5.58) при  $\gamma = 0$ .

В заключение используем краевые условия на границе раздела  $x = \pm d$ , в результате чего получим

$$\operatorname{tg} \alpha^i d = \frac{j\alpha^0}{\alpha^i} \quad \text{для четных мод,} \quad (5.73)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha^i d = -\frac{j\alpha^0}{\alpha^i} \quad \text{для нечетных мод.}$$

Уравнения (5.71) — (5.73) приводят к дисперсионным соотношениям для мод в системе. При  $\gamma = 0$  имеем

$$\operatorname{tg}(\sqrt{K} p d) = \frac{j}{\sqrt{K}} \quad \text{для четных мод,} \quad (5.74)$$

$$\operatorname{ctg}(\sqrt{K} p d) = \frac{j}{\sqrt{K}} \quad \text{для нечетных мод,}$$

где  $p$  может быть комплексной величиной, а  $\sqrt{K}$  — действительной величиной (для  $\omega > \omega_p$ ) или чисто мнимой (для  $\omega < \omega_p$ ).

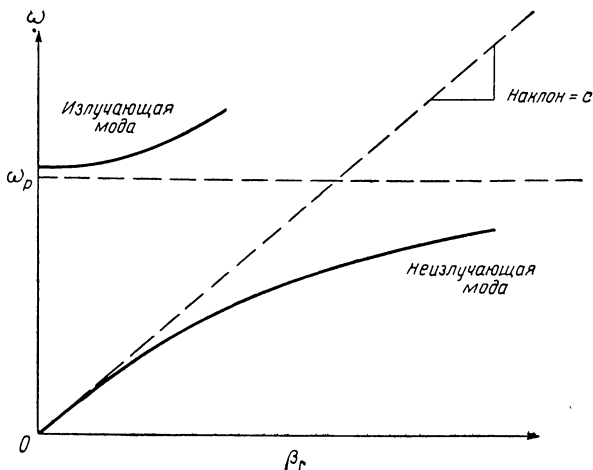
Неизлучающие моды ( $v_s < c$ ) возникают на частотах  $\omega < \omega_p$ , а излучающие моды ( $v_s > c$ ) в диапазоне частот выше  $\omega_p$ . На фиг. 48 схематически показаны дисперсионные характеристики для одной излучающей моды и одной неизлучающей моды.

Рассмотрим, например, четные моды в области излучения. Решение (5.74) дает следующий результат для перпендикулярного волнового вектора  $\alpha^0$ :

$$\alpha^0 d = \frac{1}{\sqrt{K}} \left[ (2n + 1) \frac{\pi}{2} + j \operatorname{Arth} \sqrt{K} \right], \quad (5.75)$$

причем

$$K = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



Фиг. 48. Схематическое изображение дисперсионных характеристик одной излучающей моды и одной неизлучающей моды от холодного слоя плазмы (из работы Шмидта и Халперна [188]).

Мнимая часть  $\alpha^0$  указывает на экспоненциальный рост мод и, следовательно, на возможность излучения. Заметим, что чем дальше  $\omega$  отклоняется от  $\omega_p$ , тем больше скорость пространственного роста  $\alpha^0$ . Результирующее направление распространения и скорость испускания в зависимости от проходимого расстояния  $z$  находятся из решения (5.66) и (5.75) для комплексного значения  $\beta$ . Тогда  $\exp(\beta_i z)$  является мерой скорости потерь, а  $\operatorname{tg} \theta = \alpha_r^0 / \beta_r$  определяет угол распространения.

Интересно также исследовать дисперсионные характеристики волн в неизлучающей области  $\omega < \omega_p$ . В частности, результат выглядит просто в асимптотическом пределе  $\omega \ll \omega_p$ . В этом случае из первого уравнения (5.74) находим

$$\frac{\omega}{\beta_r} \approx \frac{d}{[(n\pi/\omega_p)^2 + (d/c)^2]^{1/2}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

При таких низких частотах волны не обладают дисперсией (фазовая скорость  $\omega/\beta_r$  не зависит от частоты). Низшая мода,  $n = 0$ , распространяется со скоростью, примерно равной скорости света в вакууме. Дисперсионные характеристики для этой моды приведены на фиг. 48. Высшие моды распространяются с меньшими скоростями.

Расчеты для однородного цилиндрического плазменного столба проведены в работе [191] (см. также [192]). В этих работах использовался подход, несколько отличный от принятого здесь. Излуче-

ние магнитоактивного плазменного слоя обсуждалось в работе [193].

Излучение возможно также при падении продольной волны под углом на границу, отделяющую полубесконечную плазму от свободного пространства. Расчеты для резкой и размытой границ в отсутствие и при наличии магнитного поля проведены в работах [194—197]. Излучение при колебаниях с большой амплитудой обсуждалось в работе [198].

## § 6. Испускание и рассеяние плазменным цилиндром

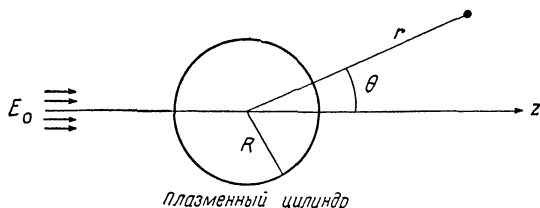
В § 3 гл. 4 рассчитывалось излучение от однородной плазмы в форме цилиндра, радиус которого мал по сравнению с длиной волны испускаемого излучения. Мы видели, что в случае излучения поляризованного перпендикулярно оси цилиндра резонанс обнаруживается на частоте  $\omega = \omega_p / \sqrt{2}$ . Это соответствует ситуации, когда действительная часть диэлектрического коэффициента среды равна  $-1$ .

Резонанс появляется не только при испускании или (согласно закону Кирхгофа) поглощении излучения. Он появляется также в рассеянном сигнале от плазменного цилиндра, на который падает плоская волна; это показал Херлофсон [199] в своих детальных расчетах, проведенных в связи с изучением рассеяния от ионизованных следов метеоритов. В предположении, что длина электромагнитной волны велика по сравнению с радиусом цилиндра, расчеты Херлофсона [199] математически эквивалентны электростатической задаче об однородном цилиндре в постоянном электрическом поле, которое вызывает поляризацию диэлектрической среды. Эта задача хорошо известна (см., например, [134]). Потенциалы внутри и вне цилиндра радиуса  $R$  в цилиндрических координатах  $r, \theta$  (фиг. 49) имеют вид

$$\begin{aligned} \phi_{\text{внутр}} &= -\frac{2}{1+K} E_0 r \cos \theta, \\ \phi_{\text{внешн}} &= -E_0 r \cos \theta - \frac{(1-K)}{(1+K)} \frac{R^2}{r} E_0 \cos \theta, \end{aligned} \quad (5.76)$$

где  $E_0$  — внешнее электрическое высокочастотное (ВЧ) поле при  $|r| \rightarrow \infty$ , а  $K = 1 - (\omega_p^2 / \omega^2)$  — диэлектрический коэффициент холодной плазмы без потерь. Мы видим, что резонанс для  $\phi_{\text{внутр}}$  и  $\phi_{\text{внешн}}$  обнаруживается при  $\omega = \omega_p / \sqrt{2}$ . Подобный расчет, проведенный для плазменной сферы, показывает, что резонанс имеет место при  $\omega = \omega_p / \sqrt{3}$ .

Было проведено много измерений рассеяния, поглощения и испускания в случае цилиндрических разрядных трубок [200—209].



Ф и г. 49.

Все измерения показали, что имеется не только один, а серия слабых резонансов на частотах около  $\omega_p/\sqrt{2}$ . Цель данного параграфа — объяснить их происхождение.

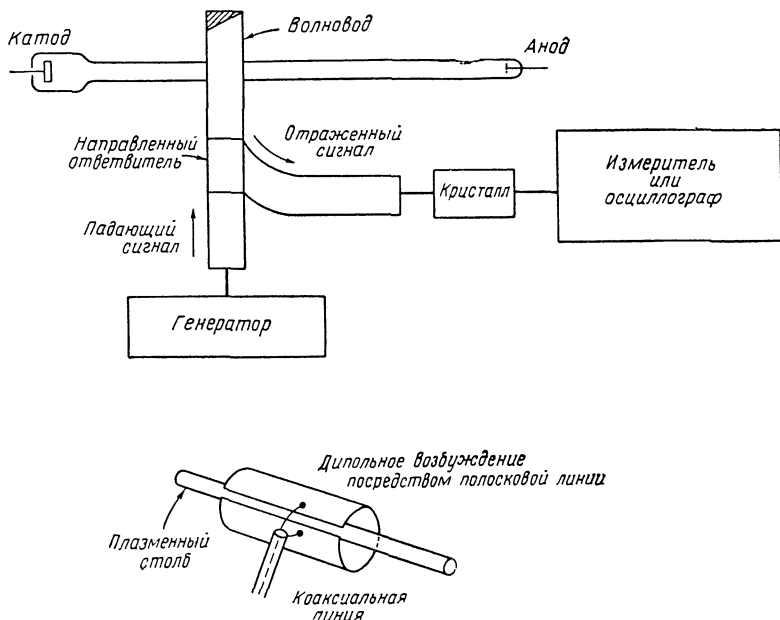
На фиг. 50 приведены две типичные экспериментальные схемы. Положительный столб разряда низкого давления пересекает под прямым углом секцию волновода; электрический вектор падающей волны перпендикулярен оси столба. Направленный ответвитель позволяет измерять интенсивность сигнала, рассеянного назад. Можно измерять также проходящий сигнал, который уменьшается при резонансе из-за отражения от плазмы и усиленного поглощения. Для возбуждения колебаний на частотах ниже 1500 Мгц вместо волновода можно использовать полосковую линию.

Наблюдать резонанс наиболее удобно, если значение  $\omega$  зафиксировать, а плотность электронов менять. Последнее осуществляется или путем изменения тока в стационарном разряде или путем повторного зажигания импульсного разряда и наблюдения сигнала при послесвечении в зависимости от времени. На фиг. 51 показаны резонансы при послесвечении в неоновом разряде. Ясно видно около десяти резонансов.

Если излучаются резонансы при испускании, то источник возбуждения удаляется и волновод или полосковая линия соединяются с чувствительным приемником (см. гл. 10).

Как впервые указал Гоулд [210], появление резонансов в дополнение к главному резонансу можно объяснить, вводя конечную электронную температуру в дисперсионное соотношение для волн и тем самым позволяя продольным волнам распространяться в среде. Прежде чем переходить к деталям, целесообразно дать простую физическую картину явления. Рассмотрим однородный плазменный слой толщиной  $2L$ . Продольные волны отражаются от одной стенки к другой и обратно. Собственные моды колебаний определяются следующим соотношением:

$$kL = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (5.77)$$



Фиг. 50. Две типичные схемы возбуждения и детектирования продольных колебаний в плазменном столбе.

где  $k$  — постоянная распространения волны, задаваемая формулой Бома и Гросса:

$$\omega^2 \approx \omega_p^2 + 3k^2 v_0^2. \quad (5.78)$$

В этом случае резонансными становятся частоты

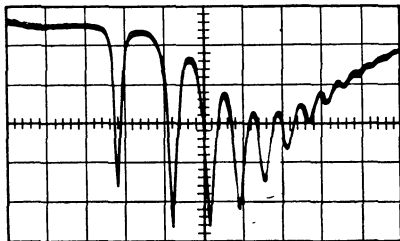
$$\omega_m^2 = \omega_p^2 + 3v_0^2 \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{L^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.79)$$

Можно представить себе следующую картину. Однородная плазма возмущается внешним источником возбуждения. На смещенные электроны действуют две восстанавливающие силы: кулоновская сила притяжения, соответствующая члену  $\omega_p^2$  в (5.78), и возникающий градиент давления, соответствующий последнему члену в (5.78). Резонансы при излучении обусловлены тем, что электроны возбуждают эти волны посредством черенковского механизма, рассмотренного в конце § 5 гл. 4.

Уравнение (5.79) предсказывает интервал между резонансами

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_p} \approx 3(m+1)\pi^2 \left(\frac{L_D}{L}\right)^2. \quad (5.80)$$

Однако этот интервал более чем на порядок величины меньше экспериментально наблюдаемого. Главная модификация предсказания, вытекающего из (5.79), заключается в учете градиентов плотности, которые всегда имеются в лабораторной плазме. Естественно, величина  $\omega_p^2(x)$  максимальна в центре плазмы, где  $x=L$ , и уменьшается монотонно почти до нуля у стенок, где  $x=0$  и  $x=2L$ . Как видно из (5.78), в результате этого волны не могут проникать в центр столба; они могут существовать только в области пространства от стенок контейнера при  $x=0$  до некоторого



Фиг. 51. Резонансы Тонкса — Даттнера, наблюдаемые при отражении от плазмы послесвечения неоновового разряда (из работы Шмитта [205] и Шмитта, Мелтца и Фрайхайта [216]).

Давление газа 0,3 торр. Частота возбуждения 250 Мгц. Время растёт слева направо и масштаб времени: 1 деление — 250 мксек. В этом эксперименте не наблюдался «основной» резонанс для холодной плазмы.

критического расстояния  $|x| = x_c$ , где  $\omega_p(x = x_c) = \omega$ . При  $x = x_c$   $k \rightarrow 0$  и волны отражаются; при  $x > x_c$   $k^2$  — отрицательная величина, а  $k$  — чисто мнимая величина и волны быстро исчезают. Поэтому можно ожидать, основываясь на (5.80), что интервал  $\Delta\omega$  между резонансами теперь возрастет из-за наличия малой области  $x = x_c$ , в которой волны могут распространяться.

Положения резонансов можно определить более строго с помощью уравнения Больцмана и уравнения Пуассона. Однако первые два уравнения переноса (они представляют законы сохранения числа частиц и импульсов в разложении уравнения Больцмана по моментам) могут использоваться как удовлетворительная аппроксимация для рассматриваемой задачи<sup>1)</sup>. Пренебрегая затуханием, имеем тогда следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (N\mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{e}{m} \mathbf{E} + \frac{1}{mN} \nabla p &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{e(N_i - N)}{\epsilon_0}, \end{aligned} \quad (5.81)$$

где  $\mathbf{E}$  — электрическое поле,  $\rho$  — плотность заряда,  $p$  — электронное давление,  $N$  — плотность электронов,  $N_i$  — плотность ионов. Так как мы использовали только уравнение Пуассона и пренебре-

<sup>1)</sup> В работе [211] даны расчеты положения резонансов на основе уравнения Власова, а в работе [212] обсуждается родственная задача.

гли остальными уравнениями Максвелла, это означает, что рассматриваются только продольные поля и не учитывается связь этих полей с внешними электромагнитными полями. Задача, которая была основной для § 5 настоящей главы, таким образом, не включена в данный параграф (обсуждение резонансного рассеяния с учетом связи полей можно найти в работах [208, 213]).

Теперь величины  $N$ ,  $p$  и  $\mathbf{E}$  расщепляются на свои стационарные значения и малые возмущения, вызванные ВЧ полем  $E_1 \exp(j\omega t)$ :

$$\begin{aligned} N &= N_0 + N_1 e^{j\omega t}, & p &= p_0 + p_1 e^{j\omega t}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 e^{j\omega t}, & v &= 0 + \mathbf{v}_1 e^{j\omega t}; \end{aligned} \quad (5.82)$$

здесь все величины в правой части,  $N_0$ ,  $N_1$ ,  $p_0$ ,  $p_1$  и т. д., — функции  $x$  в плазменном слое. Подставляя (5.82) в (5.81) и пренебрегая произведениями величин второго порядка малости, получаем два уравнения нулевого порядка по возмущению:

$$\begin{aligned} \nabla p_0 &= -N_0 e \mathbf{E}_0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_0 &= \frac{e(N_1 - N_0)}{\epsilon_0}, \end{aligned} \quad (5.83)$$

и три уравнения первого порядка по возмущению

$$\begin{aligned} j\omega N_1 + \nabla \cdot (N_0 \mathbf{v}_1) &= 0, \\ j\omega m N_0 \mathbf{v}_1 + e(\mathbf{E}_0 N_1 + \mathbf{E}_1 N_0) + \nabla p_1 &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_1 &= -\frac{e N_1}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Чтобы сделать эту систему уравнений полной, необходимо теперь высказать предположения относительно  $p_1$  и  $p_0$ . Если считать, что прохождение волн вызывает одномерные адиабатические изменения в плазме<sup>1)</sup>, то

$$p_1 = 3\kappa T N_1 = 3m v_0^2 N_1. \quad (5.85)$$

Если также предположить, что электроны имеют максвелловское распределение по скоростям, то статическое электрическое поле будет связано с градиентом плотности уравнением:

$$E_0 = -\frac{\kappa T}{e} \frac{\nabla N_0}{N_0}. \quad (5.86)$$

Этот результат следует из (5.83) и из формулы  $p_0 = N_0 \kappa T$ .

<sup>1)</sup> Мы полагаем, что  $p$  изменяется по адиабатическому закону:  $p \sim N^\gamma$ . Так как  $\gamma = (n+2)/n$ , где  $n$  — число степеней свободы, то в нашем случае  $\gamma = 3$ . Это предположение имеет удачное следствие: дисперсионное соотношение для бесконечной однородной плазмы, полученное данным методом, совпадает с дисперсионным соотношением, полученным из уравнения Больцмана для случая больших длин волн (см. § 5 гл. 4).

Теперь комбинируя уравнения (5.84) и (5.85), получаем

$$\nabla^2 N_1 + k^2 N_1 = -\frac{e}{m} \frac{1}{3v_0^2} [\nabla \cdot (N_1 \mathbf{E}_0) + \mathbf{E}_1 \cdot \nabla N_0], \quad (5.87)$$

где

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{3v_0^2}.$$

Исследуя члены правой части уравнения (5.87), находим (см. работу [214]), что они отличаются по величине от членов левой части в  $1/kl$  раз, где  $l$  — размер неоднородности электронной плотности  $N_0$  и  $k = 2\pi/\lambda$  — эффективная постоянная распространения колебаний. Следовательно, в случае мод с короткой длиной волны левая часть может сильно превышать правую часть, и последнюю можно положить равной нулю<sup>1)</sup>, т. е.

$$\nabla^2 N_1 + k^2 N_1 \approx 0.$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d^2 N_1}{dx^2} + \frac{1}{3L_{D_0}^2} [E - V(x)] N_1 = 0, \quad (5.88)$$

где

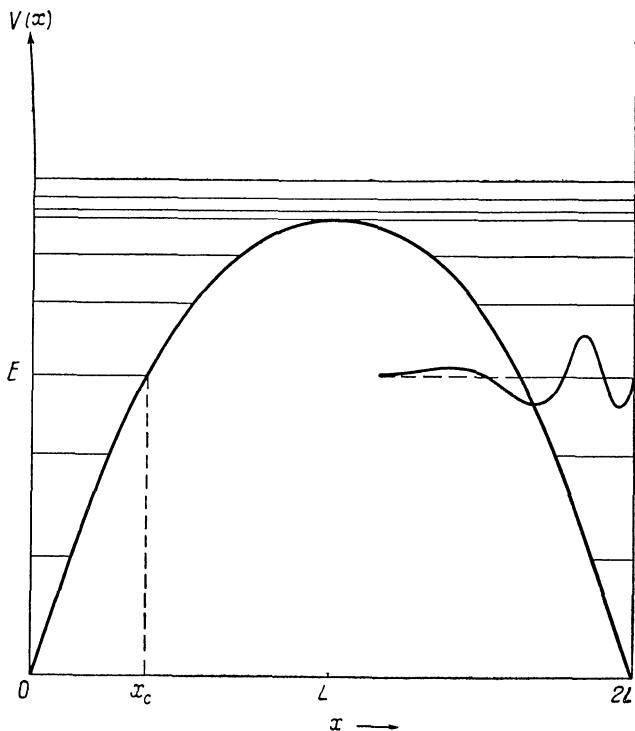
$$L_{D_0} = \frac{v_0}{\omega_{p_0}}, \quad E = \left( \frac{\omega}{\omega_{p_0}} \right)^2, \quad V(x) = \left( \frac{\omega_p(x)}{\omega_{p_0}} \right)^2,$$

$\omega_{p_0}$  — плазменная частота в центре слоя  $x = L$ . Уравнение (5.88) — типа уравнения Шредингера; оно описывает уровни энергии  $E$  квантовомеханической частицы, захваченной в потенциальную яму между стенками и профилем  $V(x)$  электронной плотности. Таким образом, это — модель (см. работу [231]) стоячих плазменных колебаний, заключенных между плазменными границами и профилем  $V(x)$ , что проиллюстрировано на фиг. 52. Когда  $E > V(x)$  [т. е.  $\omega > \omega_p(x)$ ], уравнение (5.88) имеет осциллирующее решение, когда  $E < V(x)$  — затухающее решение. Вне потенциальной ямы  $V(x)$  волны затухают на расстоянии, примерно равном длине волны. Это показано схематически в правой части фиг. 52, где приведена зависимость амплитуды  $N_1(x)$  от  $x$ . Отметим, что при  $\omega > \omega_{p_0}$  весь столб от стенки до стенки может участвовать в колебаниях и профиль плотности не ведет себя как потенциальная яма для волн. Такие колебания, однако, сильно затухают.

В случаях, когда можно предположить, что длина волны колебаний мала по сравнению с характерным размером неоднородности электронной плотности ( $N_0/\nabla N_0$ ), собственные значения урав-

<sup>1)</sup> В некоторых экспериментальных ситуациях это приближение не очень хорошо, и тогда необходимо поступать в соответствии с работой [204].





Фиг. 52. «Диаграмма энергетических уровней» для резонансов Тонкса — Датнера, возбуждаемых поперек плазменного слоя толщиной  $2L$  с примерно параболическим профилем электронной плотности (из работы Хо [231]).

нения (5.88) можно найти, используя квазиклассическое приближение Вентцеля — Крамерса — Брюллюэна (ВКБ). Затухающее и осциллирующее решения уравнения (5.88) сливаются в точке поворота  $x = x_c$ , где  $E = V(x)$  (см. работу [215]); в результате имеем

$$\frac{1}{\sqrt{3} L D_0} \int_0^{x_c} [E - V(x)]^{1/2} dx = \left(m + \frac{3}{4}\right) \pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.89)$$

или, выражая  $E$  и  $V(x)$  через  $k(x)$  из (5.87), находим

$$\int_0^{x_c} k(x) dx = \left(m + \frac{3}{4}\right) \pi. \quad (5.90)$$

Это и есть формулировка резонансного условия для плазмы в виде плоскопараллельного слоя. Для цилиндрического столба находим

$$\int_{r=r_c}^{r=R} \left\{ k^2(r) - \frac{(s + 1/2)^2}{r^2} \right\}^{1/2} dr = \left( m + \frac{3}{4} \right) \pi, \quad (5.91)$$

где  $R$  — радиус столба, а параметр  $s$  характеризует тип рассматриваемого возбуждения:  $s = 1/2$  для дипольного возбуждения,  $s = 3/2$  для квадрупольного и т. д. Следует отметить, что главный резонанс при  $\omega = \omega_p / \sqrt{2}$  не принадлежит к ряду резонансов (5.91) с  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Фазовый сдвиг  $3/4\pi$ , появляющийся в правых частях (5.89) — (5.91), обусловлен суммой двух эффектов: сдвигом фазы на  $1/4\pi$  в точке поворота  $x = x_c$  (или  $r = r_c$ ) и сдвигом фазы на  $1/2\pi$ , который испытывает волна при отражении от границы плазма — вакуум.

Спектр резонансов для заданного распределения электронной плотности  $\omega_p^2(r)$  полностью характеризуется двумя величинами:  $\omega_{p0}/\omega$  и  $L_{D0}/R$ , где  $\omega_{p0}$  и  $L_{D0}$  — плазменная частота и дебаевский радиус в центре цилиндрического столба соответственно. В работах [205, 216] найдено вполне удовлетворительное согласие между наблюдаемыми и рассчитанными по (5.91) положениями резонансов. Измерения проводились в позднем послесвечении повторяющегося импульсного разряда (см. фиг. 51), в котором электроны могли приходиться в равновесие с атомами при комнатной температуре. Тогда функция распределения электронов по скоростям максвелловская, а пространственное распределение их определяется величиной  $J_0(2,405r/R)$ , где  $J_0$  — функция Бесселя нулевого порядка.

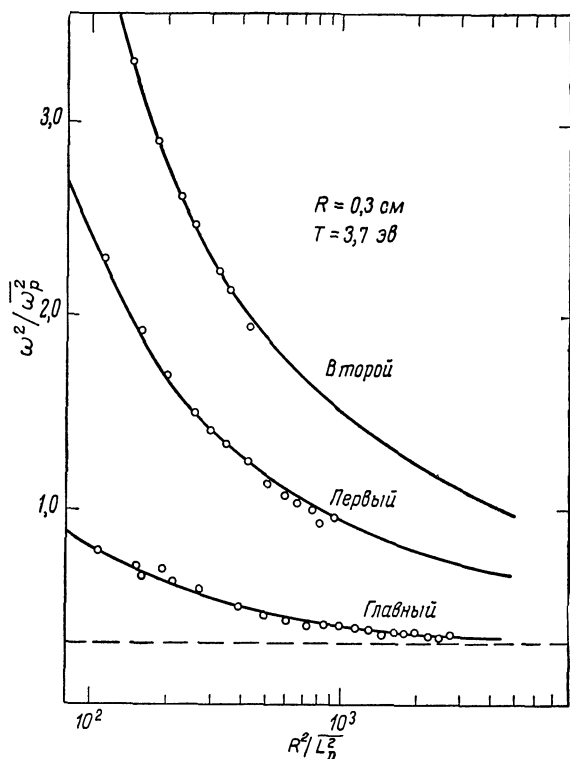
Более детальное сравнение наблюдаемых и рассчитанных положений резонансов было проведено в работе [204]. Приближение ВКБ не использовалось, а вместо этого уравнения (5.84) — (5.86) были решены численно. Эти уравнения можно объединить в одно уравнение для ВЧ потенциала  $\phi_1$  (последний связан с  $E_1$  формулой  $E_1 = -\nabla\phi_1$ ); в результате получим

$$3\nabla^2\nabla^2\phi_1 - \left( \frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla \right) \nabla^2\phi_1 - \frac{\nabla g \cdot \nabla\phi_1}{L_{D0}^2} + \left[ \frac{1}{L_{D0}^2} \left( \frac{\omega^2}{\omega_{p0}^2} - g \right) - \nabla \cdot \frac{\nabla g}{g} \right] \nabla^2\phi_1 = 0. \quad (5.92)$$

Здесь  $L_{D0}$  и  $\omega_{p0}$  — дебаевский радиус и плазменная частота в центре плазменного столба  $r = 0$ ,  $g(r)$  характеризует неоднородность плотности и определяется выражением

$$g(r) = \frac{N(r)}{N(r=0)}.$$

Уравнение (5.92) решалось численно при физически правдоподобном граничном условии: радиальная компонента ВЧ тока на стенке  $r = R$  равна нулю. Общая форма уравнения (5.92) слишком



Фиг. 53. Измеренные и рассчитанные положения трех первых резонансов в стационарном разряде на постоянном токе в парах ртути (из работы Паркера, Никеля и Гоулда [204]). Столб возбуждался дипольной модой.

сложна, чтобы прояснить физическую природу явления. Поэтому целесообразно исследовать простую задачу об однородной плазме,  $g(r) = 1$ . В этом случае

$$(\nabla^2 + k^2) \nabla^2 \phi_1 = 0, \quad (5.93)$$

где

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{p_0}^2}{3L_{D_0}^2 \omega_{p_0}^2}.$$

Уравнение (5.93) имеет два независимых решения:

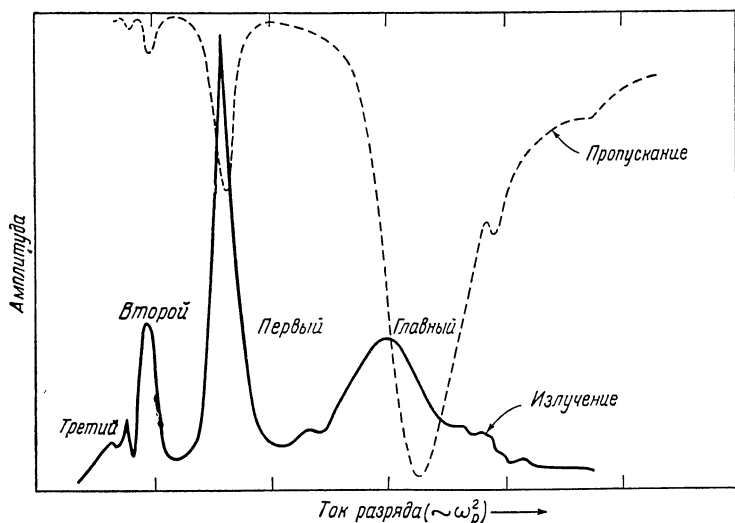
$$\nabla^2 \phi_1^I = 0 \quad \text{и} \quad (\nabla^2 + k^2) \phi_1^{II} = 0.$$

Первое решение  $\phi_1^I$  представляет квазистатическую аппроксимацию практически бесконечно длинной поперечной электромагнитной

волны; оно приводит к «главному» резонансу. Второе решение  $\phi_1^{II}$  представляет продольную волну и приводит к резонансам Тонкса — Даттнера в однородной плазме. Обе эти волны при наличии градиента плотности оказываются связанными.

Полученные результаты сравнивались с измеренными на стационарном разряде на постоянном токе. На фиг. 53 показано положение первых трех резонансов при дипольном возбуждении плазменного цилиндра. Черта над  $\omega_p$  и  $L_D$  означает усредненное значение по радиусу столба. Видно очень хорошее согласие между измеренными и расчетными значениями. Пунктирная линия на фигуре показывает положение резонанса Тонкса — Херлофсона (для холодной плазмы), который несколько сдвинут относительно величины  $\omega = \omega_p / \sqrt{2}$  из-за наличия стеклянной оболочки, окружающей плазму.

**Излучение.** Положения резонансов, наблюдаемых при испускании, точно такие же, как положения резонансов, возбужденных внешним ВЧ источником и наблюдаемых при отражении или пропускании [206, 208]. Это иллюстрируется измерениями, результаты которых представлены на фиг. 54. Заслуживают внимания относительные амплитуды резонансов в двух экспериментах. При пропускании вторичные линии всегда слабее главного резонанса, но при испускании вторая и третья линии могут превышать первичный резонанс. Эта особенность эксперимента была предсказана



Фиг. 54. Сравнение резонансов при испускании и пропускании (из работы Агдура [206]).

расчетами Гоулда [208], который для вывода спектра излучения использовал теорему Найквиста (4.2). В этих расчетах по аналогии с электрическими цепями получено значение удельной проводимости  $S$  неоднородного плазменного столба. Предполагалось, что источником затухания являются электронные столкновения.

**Аксиальное распространение.** Молчаливо предполагалось, что электростатические волны распространяются исключительно поперек оси плазменного столба. Волны могут также возбуждаться в других направлениях из-за полей рассеяния приложенного ВЧ сигнала. Этот факт можно учесть в теории, если позволить величинам  $E$ ,  $v_{\parallel}$  и  $N_{\parallel}$ , входящим в (5.81), изменяться вдоль оси столба. Аксиальное распространение можно также понять, если записать волновой вектор  $\mathbf{k}$  как сумму компонент вдоль ( $k_{\parallel}$ ) и перпендикулярно ( $k_{\perp}$ ) оси столба; тогда

$$\omega^2 = \omega_p^2 + 3(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2)v_0^2, \quad (5.94)$$

где собственные значения  $k_{\perp}$  удовлетворяют соотношению (5.91). Поскольку  $k_{\perp}$  имеет дискретные значения, то эта задача аналогична задаче о распространении высших мод в волноводах.

Распространение продольных волн вдоль оси столба наблюдалось в работе [217].

## § 7. Импеданс антенны, возбуждающей плазменные колебания

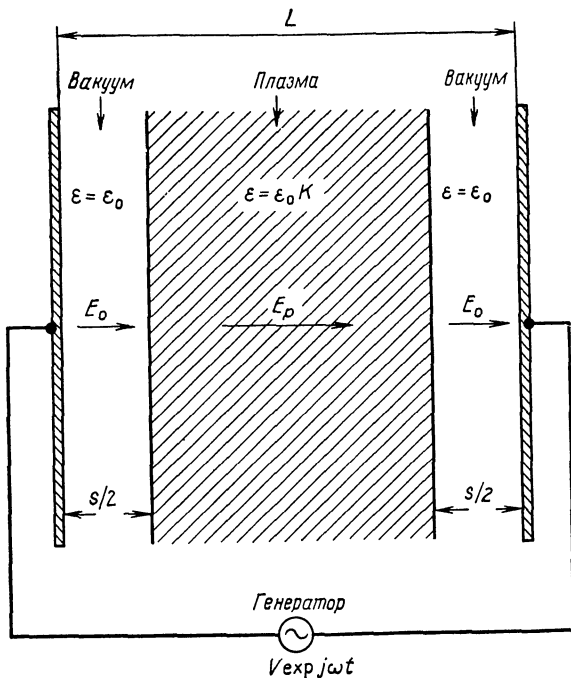
В данном параграфе исследуются характеристики цепи такой системы плазма — антенна, как, например, показанная на второй диаграмме фиг. 50. Измерение зависимости импеданса антенны этой системы от частоты является удобным методом изучения возбуждаемых плазменных колебаний.

Сделаем два упрощающих предположения.

а. Плазму можно описывать диэлектрическим коэффициентом для «холодной» плазмы. Следовательно, явления типа резонансов Тонкса — Датгнера, рассмотренные в предыдущем параграфе, не учитываются.

б. Длина волны возбуждаемого поля в свободном пространстве велика по сравнению с характерным размером антенны, так что можно применять квазиэлектростатические приближения.

Рассмотрим вначале плазменный резонатор, образованный двумя бесконечными пластинами конденсатора, находящимися на расстоянии  $L$  друг от друга (фиг. 55). Однородный слой плазмы толщиной  $L - s$  расположен симметрично между пластинами. На пластины подано ВЧ напряжение  $V \exp(j\omega t)$  от генератора с постоянной амплитудой напряжения.



Фиг. 55. Плазменный резонатор с параллельными пластинами.

Если  $E_0$  — электрическое поле в вакуумных областях, а  $E_p$  — поле в плазме, то в силу непрерывности нормальной компоненты индукции  $\mathbf{D}$  требуется, чтобы выполнялось соотношение

$$\epsilon_0 E_0 = \epsilon_0 K E_p, \quad (5.95)$$

где  $K$  — диэлектрический коэффициент плазмы. В квазистатическом приближении  $V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ , так что

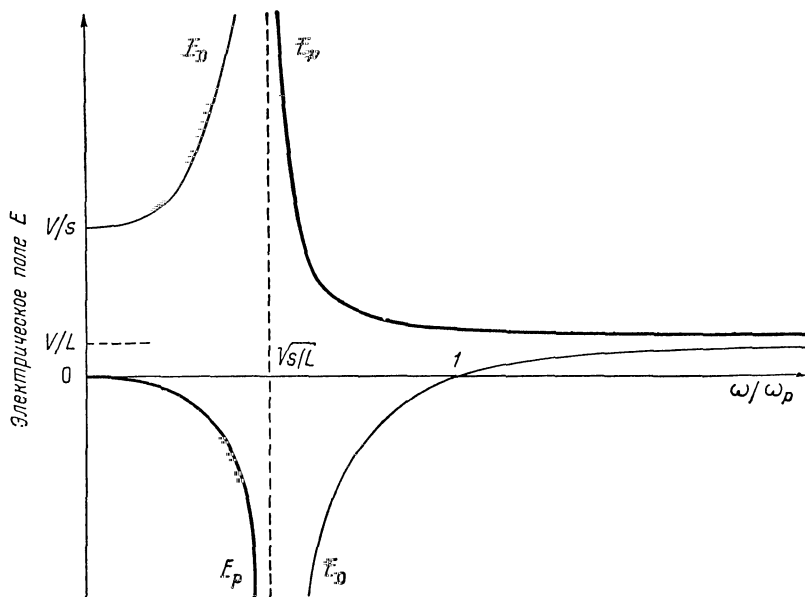
$$V = sE_0 + (L - s) E_p. \quad (5.96)$$

Из (5.95) и (5.96) найдем  $E_0$  и  $E_p$ :

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{V}{L} \frac{1 - (\omega_p/\omega)^2}{1 - (s/L)(\omega_p/\omega)^2}, \\ E_p &= \frac{V}{L} \frac{1}{1 - (s/L)(\omega_p/\omega)^2}, \end{aligned} \quad (5.97)$$

при этом предполагалось, что

$$K = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2.$$



Фиг. 56. Зависимость электрического поля  $E_0$  в вакуумных областях и поля  $E_p$  в плазме от частоты.

На фиг. 56 схематически показана зависимость  $E_0$  и  $E_p$  от частоты. Поля становятся бесконечными (в данном приближении незатухающих колебаний) при резонансе, когда

$$\frac{\omega_R}{\omega_p} = \left(\frac{s}{L}\right)^{1/2}; \quad (5.98)$$

здесь проявляются типичные дисперсионные свойства. Кроме того, поле в вакууме  $E_0$  обращается в нуль при антирезонансе, когда

$$\frac{\omega_A}{\omega_p} = 1. \quad (5.99)$$

При резонансе импеданс резонатора стремится к нулю и ВЧ ток  $I$  на пластины конденсатора стремится к очень большим значениям. При антирезонансе ситуация обратная. Характеристики цепи удобно выразить через реактивную проводимость  $B$ , определяемую формулой

$$I = jBV. \quad (5.100)$$

В силу непрерывности тока поперек пластин требуется, чтобы

$$I = j\omega\epsilon_0 E_0 A,$$

где  $A$  — площадь пластины; отсюда для  $B$  имеем

$$B = \frac{A}{L} \omega \epsilon_0 \frac{1 - (\omega_p/\omega)^2}{1 - (s/L) (\omega_p/\omega)^2}. \quad (5.101)$$

При наличии затухания  $B$  является комплексной величиной (мнимая часть  $B$  — проводимость). Если преобладающим является затухание из-за столкновений, то можно обычным способом ввести это затухание в диэлектрический коэффициент через частоту столкновений  $\nu$ :

$$K = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\nu)}. \quad (5.102)$$

При таком значении  $K$  действительная часть  $B$  всегда является конечной. Вблизи резонансной частоты, определяемой (5.98), кривая зависимости  $\text{Re } B$  от частоты имеет форму дисперсионной кривой. В зависимости мнимой части  $B$  от частоты обнаруживается резонансный пик, ширина которого на полувысоте примерно равна  $\nu$ .

Мимоходом мы хотим указать, что для резонатора более сложной формы, чем рассмотренный выше, удобно вычислять  $B$  из следующего выражения [3]:

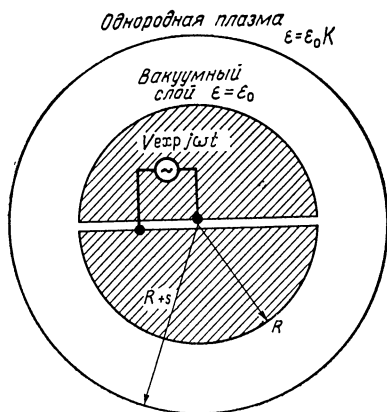
$$B |V|^2 = \omega \epsilon_0 \int (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}) dv - \omega \mu_0 \int |\mathbf{H}|^2 dv. \quad (5.103)$$

Здесь  $V$  — ВЧ напряжение на передающей линии, питающей резонатор; оно измеряется в некоторой плоскости отсчета поперек передающей линии,  $B$  — реактивная проводимость в плоскости отсчета по направлению к резонатору. Интегрирование распространяется на весь внутренний объем резонатора и ту часть передающей линии, которая простирается от резонатора до плоскости отсчета. Это уравнение является, по существу, уравнением сохранения потока энергии в предположении, что стенки резонатора идеально проводящие и отсутствуют потери энергии из всей системы. Заметим, что диэлектрический коэффициент может иметь свойства тензора, но он не должен обладать пространственной дисперсией (т. е. он не должен быть функцией волнового вектора  $\mathbf{k}$ ). В рассматриваемом здесь квазистатическом приближении второй член (5.103) равен нулю, так как  $H = 0$ .

Резонанс на частоте (5.98) имеет простую интерпретацию на языке эквивалентных цепей. Вакуумное пространство между металлическими пластинами является емкостью, а плазма — индуктивностью на частотах  $\omega < \omega_p$ . Поэтому возникает последовательный резонанс, когда емкостная проводимость вакуумных областей равна индуктивной проводимости плазмы.

Эти представления можно использовать в различных интересных приложениях к диагностике плазмы. Рассмотрим еще раз си-





Фиг. 57. Приближенная модель сферического дипольного зонда в плазме.

стему на фиг. 55, но допустим, что плазма полностью заполняет внутреннее пространство между пластинами. Из-за образования слоев на обеих пластинах плазма не остается повсюду однородной. Плотность электронов в слоях низка и можно предположить в первом приближении, что слои являются областями пустого пространства. Тогда следует ожидать возникновения резонанса на частоте, определяемой (5.98), при толщине слоя, равной  $s/2$  (экспериментальную проверку см. в работах [218, 219]). Если известно  $s$ , то можно сделать заключение относительно  $\omega_p$  и электронной плотности.

Параллельные пластины часто неудобны для эксперимента и поэтому обычно пользуются маленькими антеннами различной формы, помещая их в плазму. О таких экспериментах сообщается в большом числе работ [220—225, 494].

На фиг. 57 показана антенна удобной формы; она состоит из двух половин металлической сферы (радиусом  $R$ ), которые запитываются от генератора ВЧ напряжения. Все поля, кроме дипольного, можно эффективно подавить, если закруглить острые края полусфер. Реактивную проводимость такой системы плазма — диполь легко рассчитать, используя выражение (5.103) и предполагая при этом, что антенна окружена вакуумным слоем и однородной плазмой. В квазистатическом приближении было найдено, что дипольный резонанс имеет место при частоте

$$\left(\frac{\omega_R}{\omega_p}\right)^2 = \frac{2}{3} \frac{g^3 - 1}{g^3}, \quad (5.104)$$

а дипольный антирезонанс при частоте

$$\left(\frac{\omega_A}{\omega_p}\right)^2 = \frac{2g^3 + 1}{3g^3}, \quad (5.105)$$

где  $g = 1 + (s/R)$ . Подобный расчет для монополюного возбуждения [226] (т. е. для случая, когда электрическое поле имеет только радиальную компоненту и уменьшается как  $r^{-2}$  от центра сферы) показывает, что монополюный резонанс имеет место при частоте

$$\left(\frac{\omega_R}{\omega_p}\right)^2 = \frac{g-1}{g}, \quad (5.106a)$$

а монополюный антирезонанс при частоте

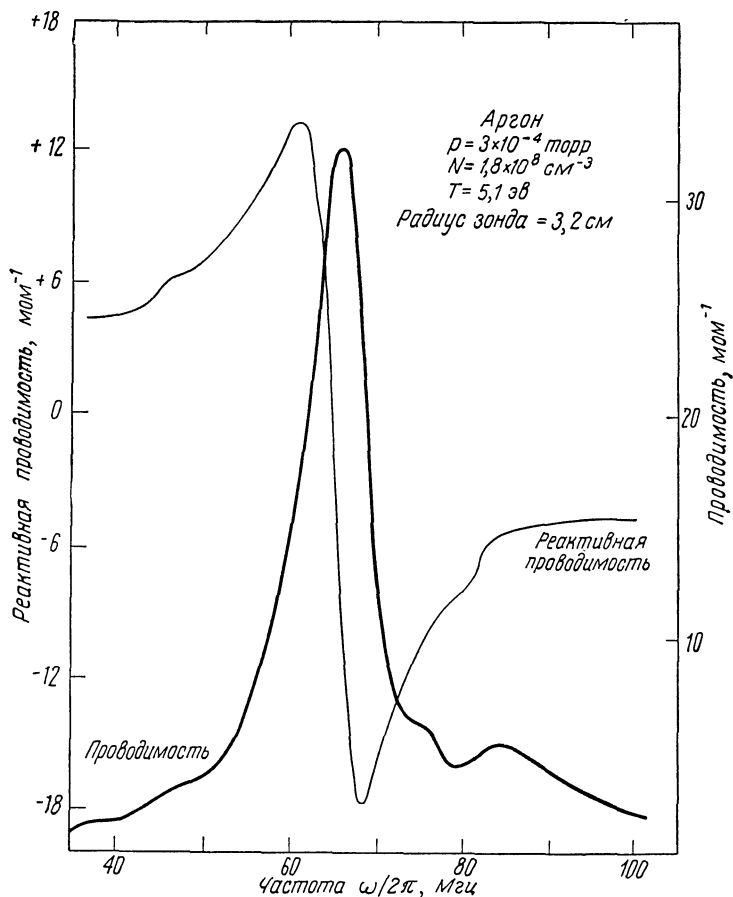
$$\left(\frac{\omega_A}{\omega_p}\right) = 1. \quad (5.106b)$$

Монополюное возбуждение можно создать, налагая ВЧ напряжение между металлической сферой, расположенной в плазме, и концентрическим металлическим экраном, расположенным вдали на большом расстоянии. На практике, однако, обычно прикладывают ВЧ напряжение между этой сферой (или даже маленькой металлической пластинкой) и любым подходящим внешним электродом, например анодом или катодом разряда.

Валетцко [225] провел детальные измерения реактивной проводимости и проводимости зондов при дипольном возбуждении (были использованы зонды различных размеров в диапазоне от  $R = 0,8$  см до  $R = 3,2$  см). На фиг. 58 показаны результаты измерений, полученные с помощью наибольшего зонда, помещенного в полностью однородную аргоновую плазму с низким давлением газа ( $v/\omega_p \ll 1$ ). Металлическая сфера была изолирована от плазмы по постоянному напряжению, так что постоянный ток из разряда на нее не попадал.

Для сравнения экспериментальных данных с теоретическими, полученными на основании (5.104), нужно знать толщину слоя  $s$ . Ее нельзя найти из простой теоретической модели, которой пользовались ранее. В работе [227] проведены расчеты, основанные на уравнении Власова, для случая полубесконечной плазмы, контактирующей с бесконечным плоским металлическим электродом. На основании этих расчетов в работе [226] было сделано заключение о том, что для плавающего зонда  $s \approx 5L_D$ , где  $L_D$  — дебаевский радиус; там же высказано предположение, что данное значение толщины слоя справедливо для зондов конечных размеров при условии, что их характерный размер не очень мал по сравнению с  $L_D$ . Более поздние расчеты [228] для случая монополюного возбуждения подтвердили это.

Если  $s$  по величине, действительно, равно фиксированному числу дебаевских радиусов, то положение резонанса, определяемое величиной  $\omega_R/\omega_p$ , зависит только от отношения  $R/L_D$ . На фиг. 59 представлены теоретические и экспериментальные данные; между ними видно очень хорошее согласие при  $R/L_D \gtrsim 12$ . Для опреде-



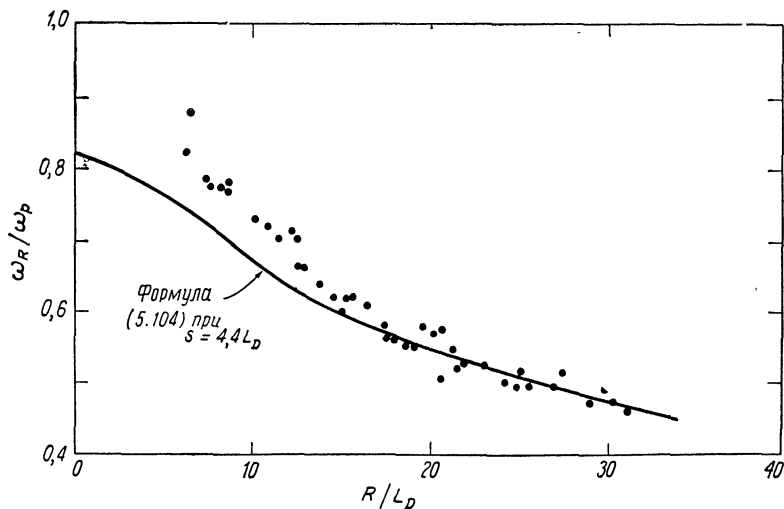
Фиг. 58. Измеренные значения реактивной проводимости и проводимости сферического дипольного зонда в аргонной плазме (из работы Валетцко [225]). Зонд находился под плавающим потенциалом плазмы. Фактически измеряемая полная проводимость определяется значениями полных проводимостей зонда и коаксиального кабеля длиной около 1 м. На фигуре показана полная проводимость самого зонда, полученная посредством диаграммы преобразования Смита с помощью машины IBM-7094. Наблюдался также антирезонанс [см. выражение (5.105)], но он находится за пределами диапазона частот, представленного на фигуре. Отметим, что одновременные измерения  $\omega_R$  и  $\omega_A$  дают независимое определение  $\omega_p$ , при котором не нужно знать толщину оболочки. К сожалению, антирезонанс часто плохо выражен.

ления  $L_D$  использовался стандартный ленгмюровский зонд, с помощью которого измерялись  $N$  и  $T$ . Большой разброс точек вызван ошибками измерений.

Ширина линии резонанса (см. фиг. 58) зависит от давления газа, при котором создается плазма. При высоком давлении газа

( $\nu/\omega_p \geq 0,1$ ) преобладает уширение из-за столкновений. При этих условиях расчетная ширина линии  $\Delta$  при  $K$ , определяемом по формуле (5.102), хорошо согласуется с экспериментальной; было найдено, что  $\Delta$  порядка  $\nu$ . При очень низких давлениях газа ситуация совершенно другая. Например, в описанных выше экспериментах ширина максимума на кривой проводимости может более чем в 100 раз превышать предсказанную с учетом частоты электронных столкновений  $\nu$ . Одним из механизмов, который может приводить к уширению линии, является затухание Ландау, обусловленное тепловыми эффектами, что обсуждалось в работе Бакли [228]. Однако недавно Балдвин и Игнат [229] указали, что даже в пределе нулевой температуры в *неоднородной* плазме имеет место довольно существенное уширение. Это связано с тем, что уравнение для реактивной проводимости является сингулярным в тех точках  $\mathbf{r}$  внутри плазмы, где  $\omega = \omega_p(\mathbf{r})$ . Существование сингулярных точек означает наличие поглощения. Этот факт мы теперь продемонстрируем для случая конденсатора, заполненного плазмой.

Рассмотрим конденсатор на фиг. 55; пусть он полностью заполнен неоднородной плазмой, диэлектрический коэффициент которой  $K(x)$  зависит от координаты  $x$  (ось  $x$  расположена перпендикулярно плоскости пластин конденсатора). Предположим, как делалось ранее в этом параграфе, что справедливо квазистатическое приближение. Тогда из того факта, что нормальная компонента индукции  $\mathbf{D}$  [см. (5.95)] и ток поперек пластин непрерывны, непо-



Фиг. 59. Сравнение измеренных и рассчитанных положений дипольного резонанса (из работы Валетцо [225]).

средственно следует, что реактивная проводимость  $B$  определяется уравнением

$$B = \omega \varepsilon_0 A \left[ \int_0^L \frac{dx}{K(x)} \right]^{-1},$$

где  $A$  — площадь пластин. Возьмем теперь холодную плазму, практически без потерь, диэлектрический коэффициент которой выражается формулой

$$\left. \begin{aligned} K(x) &= K_r(x) + jK_i(x), \\ &= \left( 1 - \frac{\omega_p^2(x)}{\omega^2} \right) + jK_i(x), \end{aligned} \right\} K_i(x) \rightarrow 0,$$

где  $K_r$  — действительная часть, а  $K_i$  — малая мнимая часть диэлектрического коэффициента  $K$ .

Видно, что интеграл в уравнении для  $B$  становится сингулярным во всех таких точках  $x = x_s$ , в которых  $\omega_p^2(x) = \omega^2$ . В этих точках интеграл вносит вклад в мнимую часть. Интеграл можно записать в следующем виде:

$$I = \lim_{K_i \rightarrow 0} \int_0^L \frac{dx}{K(x)} = P \int_0^L \frac{dx}{K(x)} + j \int_0^L dx \operatorname{Im} \frac{1}{K(x)},$$

где  $P$  — главное значение интеграла. Функцию  $K(x)$  можно разложить в ряд Тейлора [ср. (4.75)] в окрестности сингулярных точек, в результате чего получим

$$\operatorname{Im} \frac{1}{K(x)} = \pi \sum_s \left\{ \left. \frac{\partial K_r}{\partial x} \right|_{x=x_s} \right\}^{-1} \delta(x - x_s),$$

здесь суммирование проводится по всем сингулярным точкам. Тогда комплексная реактивная проводимость определяется выражением

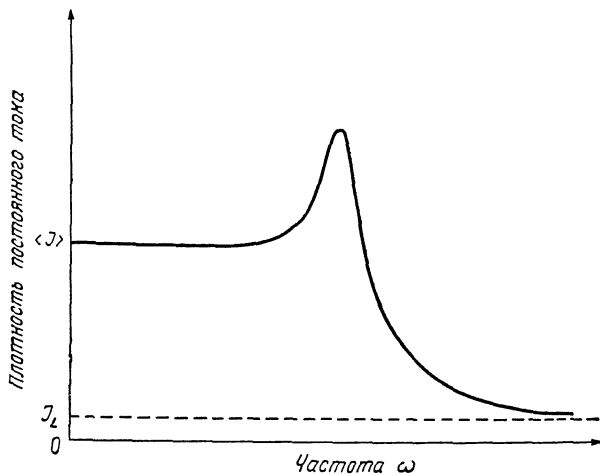
$$B = \omega \varepsilon_0 A \left[ \frac{I_r}{I_r^2 + I_i^2} - j \frac{I_i}{I_r^2 + I_i^2} \right],$$

где

$$I_r = P \int_0^L \frac{dx}{K(x)},$$

$$I_i = \pi \sum_s \left\{ \left. \frac{\partial K_r}{\partial x} \right|_{x=x_s} \right\}^{-1}.$$

Так как величина  $B$  имеет мнимую часть, то это означает, что система поглощает энергию. Вышеприведенные математические манипуляции не показывают, куда уходит поглощенная энергия,



Фиг. 60. Схематическое изображение зависимости полного постоянного тока «вытянутых» на зонд электронов от частоты наложенного высокочастотного напряжения.

В работе Балдвина<sup>1)</sup>, где учитывались температурные эффекты первого порядка, было найдено, что поле излучения связано при резонансах с электронными плазменными волнами, которые выносят энергию из резонансных точек в остальную часть плазмы. Плазменные волны затем затухают из-за столкновений или по Ландау.

**Характеристики резонансных зондов на постоянном токе.** Если на антенну подано смещение, так что через зонд протекает небольшой постоянный ток, то у последнего обнаруживается резонанс при резонансе ВЧ тока или вблизи него. Этот эффект впервые наблюдался в работе [220]. На фиг. 60 схематически показана зависимость постоянного тока от частоты приложенного ВЧ напряжения. Механизм этого эффекта качественно заключается в следующем. При резонансе ВЧ электрическое поле  $E_0$  в оболочке становится очень большим (фиг. 56) и электроны, приближающиеся к зонду в «правильной» фазе, ускоряются по направлению к нему, создавая выпрямленный ток. На частотах выше резонансной электрическое поле  $E_0$  становится небольшим и выпрямленный ток почти равен нулю.

Важно отметить, что выпрямление нельзя обсуждать без детального анализа пролетного времени  $\tau$  электрона, пересекающего оболочку [230]. Эффективное выпрямление имеет место только в том случае, если  $\tau$  меньше периода  $2\pi/\omega$  приложенного ВЧ поля.

<sup>1)</sup> D. E. Baldwin, не опубликовано.

При частотах  $\omega$ , больших по сравнению с  $\omega_p$ , пролетное время  $\tau \gg 2\pi/\omega$ . В этом случае электроны пересекают оболочку в течение многих периодов ВЧ поля и влияние ВЧ поля, усредненного по многим электронам, стремится к нулю. Постоянный ток достигает классического значения, полученного Ленгмюром (см. фиг. 60):

$$J_L = eN \left( \frac{\kappa T}{2\pi m} \right)^{1/2} e^{eV_0/\kappa T}, \quad \omega \gg \omega_p, \quad (5.107)$$

где  $V_0$  — постоянный потенциал относительно потенциала плазмы. При  $\omega \ll \omega_p$  и  $\tau \ll 2\pi/\omega$  ВЧ вольт-амперные характеристики можно найти с хорошей точностью из (5.107). Используя это выражение (заменяв предварительно  $V_0$  на  $V_0 + V \cos \omega t$  и усреднив по одному периоду ВЧ поля), для полного постоянного тока находим

$$\langle J \rangle = J_L I_0 \left( \frac{eV}{\kappa T} \right), \quad \omega \ll \omega_p, \quad (5.108)$$

где  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя первого рода и  $V$  — амплитуда ВЧ напряжения, приложенного к зонду.

В области резонанса ни одно из этих двух уравнений не применимо и требуется более тщательное рассмотрение проблемы [228].

## Циклотронное излучение

Плазма, находящаяся в магнитном поле, излучает в результате ускорения зарядов при их орбитальном движении вокруг магнитных силовых линий. Излучают главным образом свободные электроны. В достаточно разреженной плазме можно не учитывать эффекты, обусловленные дисперсионными свойствами среды и корреляциями при движении соседних зарядов. В расчетах, проводимых в данной главе, мы неявно пренебрегаем такими эффектами.

Частота и угловое распределение излучения претерпевают очень сильные изменения при возрастании энергии электрона от нерелятивистской до ультрарелятивистской. Практически будут найдены три вида спектров. Для описания излучения электронов с малой энергией используются следующие термины: «циклотронное излучение», «гиротропное излучение» и «магнитотормозное излучение», тогда как для описания излучения электронов с ультрарелятивистскими энергиями пользуются, по традиции, термином «синхротронное излучение», поскольку оно впервые наблюдалось в 1948 г. на электронных синхротронах. Здесь применяется термин «циклотронное излучение» независимо от величины энергии частицы.

### § 1. Циклотронное излучение электрона в статическом магнитном поле

Движение частицы с зарядом  $e$  и массой  $m$  в однородном статическом магнитном поле  $\mathbf{B}_0$  иллюстрируется на фиг. 61. Уравнение движения имеет вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0), \quad (6.1)$$

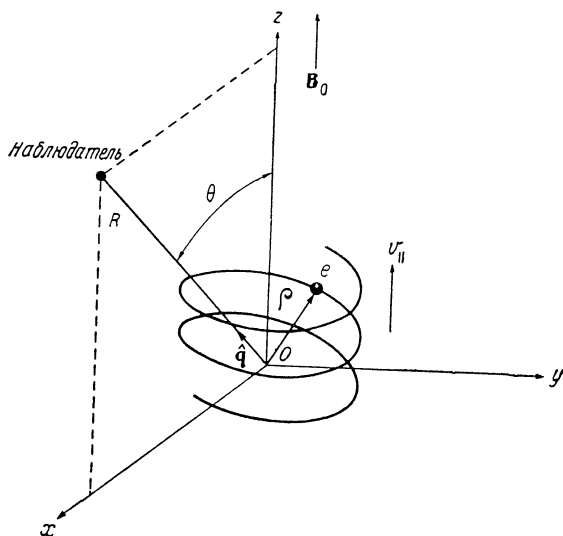
где

$$\mathbf{p} = \frac{\varepsilon}{c^2} \mathbf{v},$$

$$\varepsilon = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2} \equiv \gamma m_0 c^2, \quad (6.2)$$

$$\beta^2 = \left(\frac{v_{\parallel}}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_{\perp}}{c}\right)^2, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2},$$





Фиг. 61. Векторная диаграмма движения электрона по спиральной траектории в однородном магнитном поле.

$v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  — мгновенные значения скорости частицы вдоль и перпендикулярно  $\mathbf{B}_0$ .

Позднее будет показано, что хотя частица излучает, потери энергии за период так малы, что энергию  $\epsilon$  можно считать постоянной. Решая уравнение (6.1), для скорости частицы  $\mathbf{v}$  и смещения  $\rho$  получаем

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}}v_{\perp} \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{y}}v_{\perp} \sin \omega_0 t + \hat{\mathbf{z}}v_{\parallel}, \quad (6.3)$$

$$\rho = \hat{\mathbf{x}} \frac{v_{\perp}}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \hat{\mathbf{y}} \frac{v_{\perp}}{\omega_0} \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{z}}v_{\parallel} t,$$

где  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$ ,  $\hat{\mathbf{z}}$  — единичные векторы вдоль трех осей декартовой системы координат,  $\omega_0$  — циклотронная частота с учетом релятивистского изменения массы ( $\omega_b$  — ее предельное значение при нулевой скорости частицы),  $\omega_0$  и  $\omega_b$  определяются соответственно формулами

$$\omega_0 = - \frac{e\mathbf{B}_0}{m_0} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \omega_b = - \frac{e\mathbf{B}_0}{m_0}. \quad (6.4)$$

Траектория частицы представляет собой круговую спираль радиусом  $r = p_{\perp}/(eB_0)$  с углом наклона, равным  $\text{arctg}(2\pi v_{\parallel}/r\omega_0)$ . Электрон вращается против часовой стрелки, если смотреть в направлении, противоположном направлению  $\mathbf{B}_0$ . (Отметим, что, по определению,  $\omega_0$  и  $\omega_b$  — положительные величины для отрицательного заряда.)

**Излучение электрона, движущегося по круговой орбите** ( $\beta_{\parallel} = 0$ ). Начнем обсуждение с рассмотрения частного случая, а именно: движение электрона по круговой орбите ( $\beta_{\parallel} = 0$ ). В следующем разделе будет рассмотрен общий случай — движение электрона по спиральной траектории ( $\beta_{\parallel} \neq 0$ ).

Энергия  $W(\omega, \Omega)$ , излучаемая на единичный телесный угол на интервал частоты  $d\omega$ , определяется формулой (3.16). Чтобы вычислить экспоненциальный член, входящий в эту формулу, предположим без потери общности, что волновой вектор лежит в плоскости  $xz$ . Тогда

$$\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{x}} \sin \theta + \hat{\mathbf{y}}(0) + \hat{\mathbf{z}} \cos \theta,$$

и, используя (6.3), имеем

$$\begin{aligned} \exp \left[ -j\omega t + j \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\rho} \right] &= \exp j \left[ \frac{\omega}{\omega_0} \beta_{\perp} \sin \theta \sin \omega_0 t - \omega t \right] = \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} J_m \left( \frac{\omega}{\omega_0} \beta_{\perp} \sin \theta \right) \exp jt (m\omega_0 - \omega), \end{aligned} \quad (6.5)$$

вторая форма записи (6.5) получена с помощью следующего соотношения для функции Бесселя:

$$e^{jx \sin \theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{jm\theta} J_m(x). \quad (6.6)$$

Вычислим теперь векторное произведение  $[\hat{\mathbf{q}} \times (\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{v})]$  и подставим его в (3.16). Это приведет к интегралам вида

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \exp [j(x \sin \omega_0 t - \omega t)] dt, \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega_0 t \exp [j(x \sin \omega_0 t - \omega t)] dt, \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega_0 t \exp [j(x \sin \omega_0 t - \omega t)] dt, \end{aligned}$$

вычисляя их, соответственно получаем

$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} J_m(x) \delta(y), \quad 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} -j \frac{dJ_m(x)}{dx} \delta(y), \\ 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta_{\perp} \sin \theta} J_m(x) \delta(y). \end{aligned} \quad (6.7)$$

В выражениях (6.7) аргумент бесселевых функций имеет вид

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \beta_{\perp} \sin \theta,$$

а аргумент  $\delta$ -функции —

$$y = m\omega_0 - \omega;$$

последний показывает, что спектр излучения состоит из спектральных линий, соответствующих частотам

$$\omega = m\omega_0 = m\omega_b \sqrt{1 - \beta_{\perp}^2}.$$

Подставив в (3.16) все вышенаписанные выражения, получим излучаемую энергию  $W(\omega, \Omega)$ . Результат имеет вид

$$W(\omega, \Omega) = \sum |\dots|^2 \delta^2(y).$$

Мощность излучения можно найти, разделив  $W$  на полное время излучения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-jyt) dt = 2\pi \delta(y).$$

Другими словами,  $\delta^2(y)$  интерпретируется как  $\delta(y)T/2\pi$ , где  $T$  — период обращения. Полученная таким образом величина является как раз коэффициентом спонтанного испускания  $\eta_{\omega}$  (см. § 2 гл. 2):

$$\eta_{\omega}(\omega, \nu, \theta) = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \sum_1^{\infty} \left| \begin{array}{l} -\hat{\mathbf{x}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \theta J_m(x) \\ -\hat{\mathbf{y}} j \beta_{\perp} \frac{dJ_m(x)}{dx} \\ \hat{\mathbf{z}} \cos \theta J_m(x) \end{array} \right|^2 \delta(y). \quad (6.8)$$

Вектор под знаком модуля указывает направление результирующего электрического поля. Вычислим квадрат модуля, тогда получим

$$\eta_{\omega}(\omega, \nu, \theta) = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \left[ \sum_1^{\infty} \left( \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 J_m^2(x) + \beta_{\perp}^2 J_m'^2(x) \right] \delta(y), \quad (6.9)$$

где

$$J_m'(x) = \frac{dJ_m(x)}{dx}.$$

В выражениях (6.8) и (6.9) члены с  $m = 0, -1, -2, \dots$  были исключены из суммы как не имеющие смысла из-за аргумента  $\delta$ -функции.

Полную мощность излучения на данной гармонике  $m$  можно получить, интегрируя соответствующий член в правой части (6.9) по частоте  $\omega$  и телесному углу  $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ . Результат имеет вид

$$\eta_m^T = \frac{e^2 \omega_b^2}{2\pi \epsilon_0 c} \frac{1 - \beta_{\perp}^2}{\beta_{\perp}} \left[ m \beta_{\perp}^2 J'_{2m}(2m\beta_{\perp}) - m^2 (1 - \beta_{\perp}^2) \int_0^{\beta_{\perp}} J_{2m}(2mt) dt \right]. \quad (6.10)$$

Полную мощность излучения на всех гармониках можно найти, если просуммировать (6.10) по всем  $m$ :

$$\eta^T = \frac{e^2 \omega_b^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \frac{v_{\perp}^2}{1 - \beta_{\perp}^2} = \frac{e^2 \omega_b^2}{6\pi \epsilon_0 c} \left[ \left( \frac{\epsilon}{m_0 c^2} \right)^2 - 1 \right]. \quad (6.11)$$

В монографии Шотта [235] впервые были приведены некоторые из этих результатов, а также подробные расчеты излучения электронов с релятивистскими энергиями. В этой монографии предвосхищены многие результаты, которые затем были заново получены в 1940—1950 гг. (см., например, работы [33, 236]; обзор соответствующих расчетов и полную сводку результатов можно найти в работе [237], результаты, имеющие отношение к плазме — в работах [238, 239]).

Теперь можно использовать (6.11) для проверки первоначального предположения о том, что потери за период пренебрежимо малы по сравнению с интересующими нас энергиями электрона. Записав  $\eta^T$  в виде  $\Delta W/\Delta t$  и положив  $\Delta t = 2\pi/\omega_0$ , получим

$$\frac{\Delta W}{\epsilon} = \frac{e^2 \omega_b}{3\epsilon_0 c} \frac{1}{m_0 c^2} \left[ \left( \frac{\epsilon}{m_0 c^2} \right)^2 - 1 \right].$$

Пусть  $\epsilon = 1$  Бэв и  $B_0 = 2 \times 10^4$  гс; тогда относительные потери  $\Delta W/\epsilon$  за один оборот составят примерно  $10^{-4}$ . Проинтегрировав (6.11) по времени, найдем время  $\tau$ , за которое первоначальная кинетическая энергия электрона уменьшается в  $e$  раз:

$$\tau = \frac{3\pi \epsilon_0 m_0 c^3}{e^2 \omega_b^2} \ln \left[ \frac{\epsilon(0) - m_0 c^2 + 2 \times 2,718 m_0 c^2}{\epsilon(0) + m_0 c^2} \right], \quad (6.12)$$

где  $\epsilon(0)$  — полная первоначальная энергия частицы.

**Пример.** По формуле (6.12) можно вычислить время, в течение которого электрон излучает свою энергию. Это важная проблема для будущих термоядерных реакторов синтеза. Рассмотрим плазму, состоящую из нерелятивистских или умеренно релятивистских электронов. Тогда

$$\tau = \frac{2,58 \times 10^8}{B_0^2} \text{ сек} \quad \left( \frac{1}{2} m v^2 \ll m_0 c^2 \right),$$

где  $B_0$  — магнитное поле в гауссах. Если  $B_0 = 10^4$  гс, то  $\tau = 2,58$  сек. В самоподдерживающемся D—D-реакторе, работающем при температуре 36 кэв, которая является температурой поджига, в отсутствие циклотронного излучения (см. § 5 гл. 3) полная энергия, излучаемая электроном за 2,6 сек, примерно равна 0,14 Мэв. Эту энергию нужно сравнить с энергией, выделяющейся при термоядерной реакции и равной приблизительно 0,45 Мэв на дейтрон. Вопрос теперь заключается в том, какое время необходимо для генерации этого количества энергии? Допустим, что плазма находится в таких условиях, когда магнитное давление  $B_0^2/2\mu_0$  равно полному давлению частиц  $(N + N_i)kT$ . Возьмем  $B_0 = 10^4$  гс и  $T = 36$  кэв, тогда найдем, что  $N \approx 3,5 \times 10^{13}$  см<sup>-3</sup>. Время реакции определяется выражением

$$\tau_{DD} \approx \frac{1}{NQ_{DD}v},$$

где  $Q_{DD}$  — эффективное сечение и  $v$  — скорость частицы. В работе [100] показано, что для средней частицы в максвелловском распределении по скоростям  $\overline{Q_{DD}v} \approx 9 \times 10^{-18}$  см<sup>3</sup>/сек при температуре 36 кэв. Отсюда следует, что  $\tau_{DD} \approx 3000$  сек, а значит, скорость энерговыделения не может превысить скорость потерь энергии при циклотронном излучении электронов. D — D-реактор был бы невозможен, если бы вся эта энергия уходила из плазмы. К счастью, большая часть этой энергии реабсорбируется плазмой, если ее размеры достаточно велики. Эта проблема исследуется в § 4 настоящей главы.

Укажем, что постоянная времени для потери энергии ультрарелятивистскими электронами ( $\varepsilon \gg m_0c^2$ ) при циклотронном излучении зависит от их первоначальной энергии. По формуле (6.12) находим

$$\tau = \frac{8,86 \times 10^8}{B_0^2} \left( \frac{m_0c^2}{\varepsilon(0)} \right) \text{ сек},$$

где  $B_0$  по-прежнему выражено в гауссах. Если взять для примера космические электроны с энергией 5 Бэв, излучающие в магнитном поле  $10^{-6}$  гс, то  $\tau \approx 10^{17}$  сек, или 3 миллиарда лет.

**Излучение электрона, движущегося по спиральной траектории** ( $\beta_{\parallel} \neq 0$ ). Основное выражение (6.9) выведено для спектральной мощности излучения, измеряемой наблюдателем в такой системе координат, где  $\beta_{\parallel} = 0$ . Аналогичное выражение для спектральной мощности излучения, измеряемой в системе отсчета, где  $\beta_{\parallel} \neq 0$ , можно получить, выполнив соответствующие преобразования Ло-

ренца для частот, углов и скоростей (см. работу [240]). Пусть система координат, где  $\beta_{\parallel} = 0$ , будет «штрихованной» системой, а где  $\beta_{\parallel} \neq 0$  — «нештрихованной». Тогда

$$\begin{aligned}\omega' &= \omega \gamma_{\parallel} (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta), & \gamma_{\parallel} &= (1 - \beta_{\parallel}^2)^{-1/2}, \\ \cos \theta' &= \frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}, & (6.13) \\ \sin \theta' &= \frac{\sin \theta}{\gamma_{\parallel} (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)}, \\ \beta'_{\perp} &= \gamma_{\parallel} \beta_{\perp}.\end{aligned}$$

При выполнении преобразования важно ясно понимать, что мощность не является инвариантной величиной; инвариантной остается энергия, деленная на частоту, или, более точно, полное число фотонов на данной гармонике  $m$  частоты  $\omega$ , испускаемых в элементарный телесный угол  $d\Omega$ . Тогда, если  $P_m$  — мощность на единичный телесный угол, преобразование от штрихованной к нештрихованной системе координат производится в соответствии с соотношением

$$\frac{P'_m d\Omega'}{\omega'^2} = \frac{P_m d\Omega}{\omega^2}. \quad (6.14)$$

Величину  $P'_m d\Omega'$  легко получить из (6.9) путем интегрирования  $\delta$ -функции по частотам; в результате получим

$$P'_m d\Omega' = \frac{e^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \omega'^2 d\Omega' \left\{ \left( \frac{\cos \theta'}{\sin \theta'} \right)^2 J_m^2(m\beta'_{\perp} \sin \theta') + \beta'^2_{\perp} J_m'^2(m\beta'_{\perp} \sin \theta') \right\} \\ (\omega' = m\omega_0).$$

Из (6.13) и (6.14) следует, что мощность в системе отсчета, где  $\beta \neq 0$ , определяется формулой

$$P_m d\Omega = \frac{e^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{\omega^2 d\Omega}{(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)^2} \times \\ \times \left\{ \left( \frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{\sin \theta} \right)^2 J_m^2 \left( \frac{m\beta_{\perp} \sin \theta}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta} \right) + \beta_{\perp}^2 J_m'^2 \left( \frac{m\beta_{\perp} \sin \theta}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta} \right) \right\}.$$

Частота  $\omega$  данной гармоники наблюдается не при значении  $\omega = m\omega_0$ , а смещена за счет эффекта Доплера:

$$\omega = \frac{m\omega_0}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta} = \frac{m\omega_b \sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2 - \beta_{\perp}^2}}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}.$$

Испускательная способность  $\eta_{\omega}$ , по определению, есть мощность на единичный телесный угол на единичный интервал частот  $d\omega$ .

Используя вышеприведенную формулу для  $P_m$ , нетрудно показать, что

$$\eta_\omega(\omega, \beta, \theta) = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{1}{1 - \beta_\parallel \cos \theta} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{\cos \theta - \beta_\parallel}{\sin \theta} \right)^2 J_m^2(x) + \beta_\perp^2 J_m'^2(x) \right] \delta(y); \quad (6.15)$$

это — искомый результат. Аргумент бесселевых функций  $x$  и аргумент  $\delta$ -функции  $y$  имеют вид

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \beta_\perp \sin \theta = \frac{\omega}{\omega_b} \gamma \sin \theta, \\ y = m\omega_0 - \omega(1 - \beta_\parallel \cos \theta).$$

Выражение (6.15) отличается множителем  $1/(1 - \beta_\parallel \cos \theta)$  от соответствующих выражений, приведенных в большинстве работ по данному вопросу в течение последних двадцати лет (см., например, работы [48, 236, 241]). В этих более ранних результатах в знаменателе отсутствовал множитель  $(1 - \beta_\parallel \cos \theta)$ . Недавно в нескольких работах, например [242, 243], было указано, что ранние результаты являются неверными. Ошибка возникла из-за пренебрежения двумя тонкими эффектами: 1) при движении электрона по направлению к наблюдателю мощность не сохраняется; 2) наблюдаемые гармоники имеют доплеровский сдвиг относительно частоты  $\omega = m\omega_0$ .

В ультрарелятивистском пределе ( $\gamma \gg 1$ ) отсутствующий в знаменателе множитель  $(1 - \beta_\parallel \cos \theta)$  можно записать в несколько ином виде. Заметим, что  $\beta_\parallel = \beta \cos \Theta$ , где  $\Theta$  — угол наклона, определяемый по формуле  $\text{tg } \Theta = \beta_\perp / \beta_\parallel$ ; следовательно, когда  $\beta \rightarrow 1$ , то  $\beta_\parallel \rightarrow \cos \Theta$ . Более того, ультрарелятивистский электрон излучает (как будет показано ниже) почти исключительно в направлении своей мгновенной скорости, так что  $\Theta \approx \theta$  и

$$(1 - \beta_\parallel \cos \theta) \rightarrow \sin^2 \Theta, \quad \gamma \gg 1.$$

Именно множитель  $\sin^2 \Theta$  отсутствовал в знаменателях выражений многих (но не всех) теоретиков, которые впервые вычисляли излучение ультрарелятивистского электрона.

Следствием более точного выражения является несколько неожиданный результат: мощность, принимаемая удаленным неподвижным наблюдателем, превышает «излучаемую мощность» в  $1/\sin^2 \Theta$  раз. Другими словами, проинтегрировав выражение (6.15) по всем частотам и углам наблюдения  $\theta$  и просуммировав по всем

гармоникам  $m$ , в ультрарелятивистском пределе для принимаемой мощности получим

$$\Gamma_{\text{прин}} = \frac{e^2 \omega_b^2}{6\pi \epsilon_0 c} \left( \frac{\epsilon}{m_0 c^2} \right)^2, \quad \gamma \gg 1.$$

Это выражение следует сравнить с хорошо известным выражением для скорости потерь энергии частицей (см., например, работу [68]):

$$P_{\text{потерь}} = \frac{e^2 \omega_b^2}{6\pi \epsilon_0 c} \left( \frac{\epsilon}{m_0 c^2} \right)^2 \sin^2 \Theta, \quad \gamma \gg 1.$$

Различие между двумя мощностями возникает из-за того, что энергия, излучаемая в единицу времени, принимается за время  $\sin^2 \Theta$ ; это обусловлено движением частицы вперед в направлении собственного поля излучения. Поле излучения не является стационарным, и, как было указано Гинзбургом и др. [242], для полного потока энергии через фиксированную замкнутую поверхность имеем

$$P_{\text{прин}} = P_{\text{потерь}} - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\text{Объем}} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) dV,$$

так что поток через поверхность ( $P_{\text{прин}}$ ) определяется не только работой ( $P_{\text{потерь}}$ ), совершаемой частицей, но также скоростью изменения энергии поля в объеме  $V$ , ограниченном поверхностью. Это изменение энергии поля связано с поступательным движением электрона, которое вызывает непрерывное уменьшение во времени области пространства между электроном и наблюдателем, заполненной излучением.

**Излучение стационарного во времени ансамбля частиц.** Как скажется наличие множителя  $1/(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)$  в формуле (6.15) на весьма обширные результаты выполненных прежде теоретических работ? Замечания в конце предыдущего раздела наводят на мысль, что для *не зависящего от времени* статистического распределения частиц на спиральной траектории, центр масс которых является стационарным относительно наблюдателя, модификацию, состоящую в введении в знаменатель множителя  $(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)$ , не следует учитывать, поскольку теперь поле излучения тоже не зависит от времени. Это счастливое обстоятельство было разъяснено Шейером [244] и Гинзбургом и др. [242]. Конечно, старые формулы неприменимы к случаю электронного облака, выброшенного некоторым источником и движущегося с релятивистскими скоростями.

Короче говоря, общепринятые формулы для циклотронного излучения от *одного* электрона, движущегося по спиральной траектории, являются неправильными из-за отсутствия в знаменателе множи-



теля  $(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)$ ; правильным выражением будет (6.15). Однако в конечном итоге нас почти всегда интересует расчет излучения от частиц с функцией *распределения*  $f(v_{\parallel}, v_{\perp}, \mathbf{r}, t)$ ; если эта функция распределения не зависит от времени в системе отсчета наблюдателя, то множитель  $(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)$  не нужно включать в выражение для испускательной способности  $\eta$ . Другими словами, общепринятое выражение для  $\eta$  можно теперь интерпретировать как испускательную способность *средней* частицы в распределении, характеризуемом не зависящей от времени статистической функцией  $f$ . Именно такая интерпретация будет принята в остальной части этой главы. При этом условии  $\eta$  определяется обычной формулой:

$$\eta_{\omega}(\omega, \nu, \theta) = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \sum_1^{\infty} \left| \begin{array}{c} -\hat{\mathbf{x}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\cos \theta - \beta_{\parallel}) J_m(x) \\ -\hat{\mathbf{y}} j \beta_{\perp} \frac{dJ_m(x)}{dx} \\ \hat{\mathbf{z}} (\cos \theta - \beta_{\parallel}) J_m(x) \end{array} \right|^2 \delta(y). \quad (6.16)$$

Вектор под знаком модуля указывает направление результирующего электрического поля. Вычислив квадрат модуля, найдем [ср. (6.15)]

$$\eta_{\omega}(\omega, \nu, \theta) = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \left[ \sum_1^{\infty} \left( \frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{\sin \theta} \right)^2 J_m^2(x) + \beta_{\perp}^2 J_m'^2(x) \right] \delta(y), \quad (6.17)$$

где

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \beta_{\perp} \sin \theta, \\ y = m\omega_0 - \omega (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta).$$

Полная принимаемая (или излучаемая) мощность определяется выражением

$$\eta^T = \frac{e^2 \omega_b^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \frac{v_{\perp}^2}{1 - \beta^2} = \frac{e^2 \omega_b^2}{6\pi \epsilon_0 c} \left[ (1 - \beta_{\parallel}^2) \left( \frac{v}{m_0 c^2} \right)^2 - 1 \right] = \frac{e^2 \omega_b^2 \gamma^2}{6\pi \epsilon_0 c} \sin^2 \Theta, \quad \gamma \gg 1. \quad (6.18)$$

Если нас интересует, какая часть этого излучения поляризована *вдоль* магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  и какая часть *полностью* поляризована перпендикулярно  $\mathbf{B}_0$ , то мы найдем

$$\eta^T (\text{вдоль}) = \frac{1}{4} \eta^T \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{\beta_{\perp}^2}{1 - \beta_{\parallel}^2} \right], \\ \eta^T (\text{перпен}) = \frac{3}{4} \eta^T \left[ 1 + \frac{1}{6} \frac{\beta_{\perp}^2}{1 - \beta_{\parallel}^2} \right],$$

где  $\eta^T$  определяется (6.18). Для ультрарелятивистской частицы

$$\beta_{\perp}^2 \approx 1 - \beta_{\parallel}^2 \approx \sin^2 \Theta,$$

где  $\Theta$  — угол наклона; тогда имеем

$$\eta^T \approx \frac{e^2 \omega_b^2 v^2}{6\pi \epsilon_0 c} \sin^2 \Theta,$$

$$\eta^T \text{ (вдоль)} \approx \frac{1}{8} \eta^T,$$

$$\eta^T \text{ (перпен)} \approx \frac{7}{8} \eta^T.$$

Этот результат был получен в работе [245].

Хотя величины, определяющие поляризацию электрического поля, вынесены из-под знака модуля в (6.16), анализ наблюдаемых фактов сильно упрощается, если эти величины выразить через параметры Стокса  $F$ ,  $Q$ ,  $U$ ,  $V$ , которые обсуждались в § 4 гл. 1. Для излучения на  $m$ -й гармонике эти параметры (см. работы [242, 246]) имеют вид

$$\begin{pmatrix} F \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \delta(y) \times \begin{pmatrix} A^2 + B^2 \\ A^2 - B^2 \\ 0 \\ -2AB \end{pmatrix},$$

где

$$A = \frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{\sin \theta} J_m(x), \quad B = \mp \beta_{\perp} J'_m(x)$$

(знак минус — для отрицательного заряда, знак плюс — для положительного заряда). Параметр  $U$  равен нулю, поскольку выбрана специфическая плоскость поляризации; плоскость поляризации определяется углом  $\chi$ , задающим ориентацию эллипса поляризации (на фиг. 5  $\chi$  — угол между осью координат  $y$  и большой осью эллипса поляризации). В данном случае  $\chi = 0$ , поэтому, согласно (1.80),  $U = 0$ .

Заметим, что интенсивность  $F$  удовлетворяет соотношению

$$F = \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}.$$

Отметим также, что интенсивность  $F$  равна коэффициенту испускания  $\eta(\omega, v, \theta, m)$ , определяемому формулой (6.17). Согласно формуле (1.79), для излучения с эллиптической поляризацией имеем

$$\sin 2\beta = - \frac{2AB}{A^2 + B^2},$$

где  $\beta$  — угол (фиг. 5), который не нужно путать с релятивистским фактором  $\beta = v/c$ . В частном случае, когда электрон не движется вдоль магнитного поля  $\mathbf{V}_0$ , легко найти, что излучение линейно поляризовано при распространении перпендикулярно  $\mathbf{V}_0$  ( $\text{tg } \beta = 0$ ); при распространении вдоль  $\mathbf{V}_0$  ( $\text{tg } \beta = +1$ ) излучение будет иметь правостороннюю поляризацию независимо от того, имеет частица компоненту скорости вдоль  $\mathbf{V}_0$  или не имеет.

## § 2. Циклотронное излучение нерелятивистских электронов

Если энергия электрона такова, что  $m\beta \ll 1$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ , и  $\beta = v/c$ ), то функции Бесселя в формулах § 1 настоящей главы можно заменить их асимптотическими разложениями в ряд по малым аргументам. Тогда, например, выражение (6.10) для полной мощности излучения на данной гармонике (при  $\beta_{\parallel} = 0$ ) принимает вид

$$\eta_m^T = \frac{e^2 \omega_b^2}{2\pi \epsilon_0 c} \frac{(m+1)(m^{2m+1})}{(2m+1)!} \beta^{2m}, \quad m\beta \ll 1, \quad 1 - \beta^2 \rightarrow 1. \quad (6.19)$$

Отсюда следует, что спектр состоит из ряда дискретных линий с быстро убывающей интенсивностью

$$\frac{\eta_m^T}{\eta_{m+1}^T} \sim \left(\frac{c}{v}\right)^2;$$

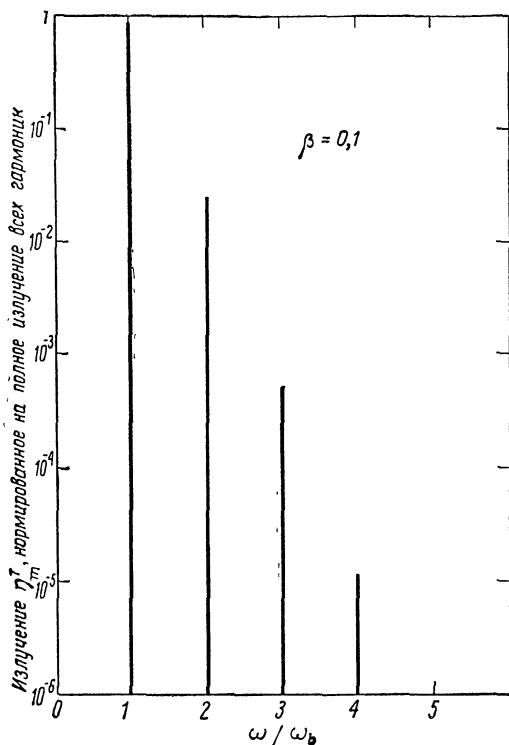
это показано на фиг. 62. Интервал между линиями почти равен  $\omega_b = eB_0/m_0$ .

Если энергия электрона равна или меньше, например, 250 эв, то  $\beta^2 \leq 10^{-3}$  и можно пренебречь испусканием на всех гармониках, кроме основной  $m = 1$  (см., однако, § 3 гл. 7). В этом случае выражение (6.17) для дифференциальной испускательной способности сводится к виду

$$\eta_{\omega}(\theta) = \frac{e^2 \omega^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} v_{\perp}^2 (1 + \cos^2 \theta) \delta[\omega_b - \omega(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)]. \quad (6.20)$$

Выражение (6.20) свидетельствует о том, что излучение на единственный телесный угол вдоль направления магнитного поля ( $\theta = 0$ ) в 2 раза больше, чем в перпендикулярном направлении. Исследование (6.16) показывает, что при  $\theta = 0$  волна имеет круговую поляризацию, а при  $\theta = \pi/2$  волна линейно поляризована, причем электрический вектор образует прямой угол с  $\mathbf{V}_0$ . При промежуточных углах возникает эллиптическая поляризация.

**Эффект столкновений.** До сих пор рассматривалось бесконечно долгое периодическое движение заряда, излучающего бесконечно



Ф и г. 62. Схематическое изображение спектра циклотронного излучения почти нерелятивистского электрона.  
Предполагается, что  $\beta_{\parallel} = 0$ .

длинные цуги волн. Это приводило к бесконечно узким спектральным линиям. Столкновения излучающих частиц с другими частицами плазмы приводит к конечной ширине спектральных линий. Для расчета формы и ширины линии можно принять следующую приближенную модель процесса столкновения.

Предположим, что частица свободно излучает (в момент  $t = 0$  фаза произвольная) в течение конечного интервала времени  $\Delta t$ . В конце интервала  $\Delta t$  излучение резко прекращается, а затем опять возобновляется. Вероятность появления интервала  $\Delta t$  определяется гауссовым распределением вида

$$\nu(v) e^{-\nu(v)\Delta t} d(\Delta t), \quad (6.21)$$

где  $\nu(v)$  — частота столкновений, которая может быть, а может и не быть функцией скорости частицы.

Процедура расчета заключается в том, что проводится анализ Фурье для полей на временном интервале  $\Delta t$

$$V(\omega) = \int_0^{\Delta t} V(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (6.22)$$

а затем усреднение спектрального распределения по всем интервалам  $\Delta t$  с учетом (6.21). Такой расчет был проведен Остером [238]. Для низких частот столкновений,  $\nu(v) \ll \omega$ , следует сделать единственную модификацию: в выражении (6.20) нужно заменить  $\delta$ -функцию на величину

$$\frac{1}{\pi} \frac{\nu(v)}{[\omega_b - \omega(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)]^2 + \nu^2(v)}, \quad (6.23)$$

так что будем иметь

$$\eta_{\omega}(\theta) = \frac{e^2 \omega^2}{32\pi^3 \epsilon_0 c^3} \frac{v_{\perp}^2 \nu(v) (1 + \cos^2 \theta)}{[\omega_b - \omega(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta)]^2 + \nu^2(v)}. \quad (6.24)$$

Форма линии дифференциальной испускательной способности является лоренцевой. Отметим, что полная мощность излучения, соответствующая данной спектральной линии, т. е. проинтегрированная по всем частотам, не зависит от  $\nu$ , что и должно быть, если столкновения только возмущают движение электрона по орбите. При таком подходе пренебрегают тормозным излучением. Это пренебрежение справедливо вблизи центра линии, где преобладает циклотронное излучение. На далеких краях линии необходимо рассматривать только тормозное излучение. В промежуточном диапазоне частот, где эти два эффекта могут быть сравнимы по величине, их нельзя отделить друг от друга. Тогда теория, рассматривающая отдельно циклотронное излучение и отдельно тормозное излучение, несправедлива, и для нахождения испускания целесообразно использовать уравнение Больцмана и дисперсионное уравнение. Эта процедура аналогична той, которая была принята при нарушении условия  $\nu \ll \omega$ , поскольку тогда оба эффекта сравнимы по величине по всей ширине линии (см. § 1 гл. 7).

Уширение линии циклотронного излучения, обусловленное столкновениями релятивистских электронов плазмы, обычно несущественно. На это имеется две причины: 1) частота  $\nu(v)$  очень мала при высоких энергиях; 2) уширение линий из-за изменения релятивистской массы электрона в плазме с некоторой функцией распределения частиц по скоростям значительно больше уширения из-за столкновений (см. § 4 настоящей главы).

**Сводка механизмов уширения линии.** Ширина линии циклотронного излучения или поглощения зависит от ряда эффектов уширения. Перечислим их здесь вкратце и укажем, в каком месте данной книги они обсуждаются более подробно.

а. *Радиационное уширение.* Оно связано с тем обстоятельством, что электрон теряет энергию на излучение, а цуг волн конечной длины не может иметь определенной частоты. Частотный интервал равен примерно  $1/\tau$ , где  $\tau$  определяется по формуле (6.12). Это и есть минимальная ширина линии испускания.

б. *Уширение за счет столкновений.* Ширина линии за счет этого эффекта порядка частоты столкновения. Эффект обсуждается в предыдущем и следующем разделах.

в. *Допплеровское уширение.* Оно возникает из-за хаотического движения электронов вдоль силовых линий. Ширина линии порядка  $\omega(v_0/c) \cos \theta$ , где  $v_0$  — тепловая скорость и  $\theta$  — угол между направлением наблюдения и направлением магнитного поля (см. следующий раздел).

г. *Релятивистское изменение массы.* Оно связано с тем обстоятельством, что циклотронные частоты электронов с различной энергией несколько отличаются друг от друга. Ширина линии порядка  $\omega(v_0/c)^2$  (см. § 4 настоящей главы).

д. *Самопоглощение излучения.* Когда оптическая толщина для центра линии  $\tau_0 = \alpha_\omega L$  приближается к единице, интенсивность излучения приближается к интенсивности излучения черного тела. В термически равновесной плазме интенсивность не может превышать  $B_0(\omega, T)$  и лучистая энергия эффективно распределяется по более широкому диапазону частот (см. следующий раздел).

е. *Дисперсионные плазменные эффекты.* В плотной плазме,  $\omega \leq \omega_p$ , дисперсионные свойства влияют на форму и ширину линии (см. § 1 гл. 7).

ж. *Неоднородности магнитного поля.* Малые неоднородности напряженности магнитного поля  $B_0$  в области плазмы, из которой принимается излучение, вызывают уширение линии порядка  $\Delta\omega_b$  (см., например, фиг. 85б).

**Суммирование  $\eta_\omega$  по ансамблю частиц с некоторой функцией распределения по скоростям.** Коэффициент испускания  $j_\omega$  можно получить в соответствии с (2.45), суммируя  $\eta_\omega$  по ансамблю частиц с некоторой функцией распределения по скоростям. Рассмотрим максвелловское распределение. Тогда, используя выражение (6.20), для бесстолкновительной плазмы находим

$$j_\omega = \frac{\omega_p^2 \omega^2}{16\pi^2 \sqrt{\pi} c^3} (m v_0^2) (1 + \cos^2 \theta) \frac{1}{\Delta} e^{-(\omega - \omega_b)^2 / \Delta^2}, \quad (6.25)$$

где  $v_0^2 = \kappa T/m$ , а

$$\Delta = \sqrt{2} \frac{v_0}{c} \omega \cos \theta. \quad (6.26)$$

Спектр испускания имеет характерную гауссову форму линии с доплеровским уширением. Ширина линии, измеренная между

точками, где интенсивность в  $e$  раз меньше максимального значения,  $\Delta_D = 2\Delta$ . Отметим, что когда наблюдатель видит излучение под прямым углом к направлению магнитного поля ( $\theta = \pi/2$ ), доплеровского уширения нет. Коэффициент поглощения  $\alpha_\omega$  можно получить из закона Кирхгофа, используя выражение (6.25).

Если основным механизмом уширения являются столкновения, то, используя выражение (6.24) (при  $\beta_\parallel \cos \theta \rightarrow 0$ ), получим

$$j_\omega = \frac{\omega_p^2 \omega^2}{6\pi^3 \sqrt{\pi} c^3} (m v_0^2) (1 + \cos^2 \theta) \int_0^\infty \frac{v(a y)}{(\omega - \omega_b)^2 + v^2(a y)} e^{-y^2} y^4 dy =$$

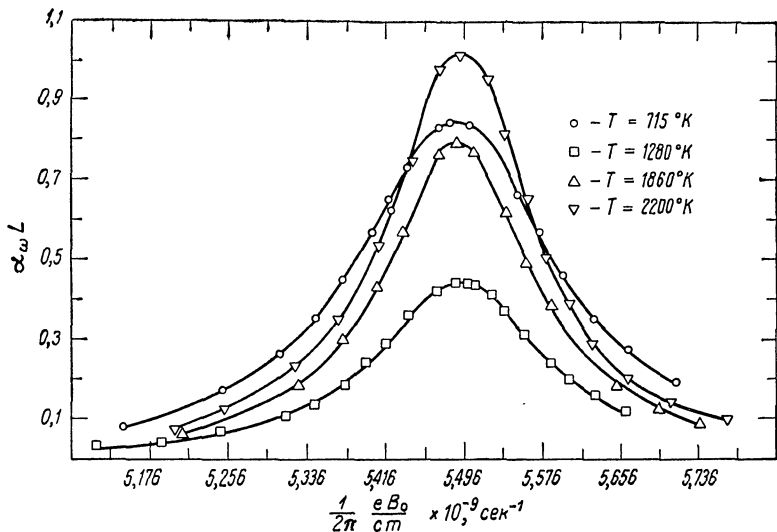
$$= \frac{\omega_p^2 \omega^2}{16\pi^3 c^3} (m v_0^2) (1 + \cos^2 \theta) \frac{v}{(\omega - \omega_b)^2 + v^2}, \quad v = \text{const}, \quad (6.27)$$

где параметр  $a = \sqrt{2} v_0$ . Когда  $v$  не зависит от скорости, форма линии — лоренцева и ширина линии в точках «половинной мощности»  $\Delta_\nu(\omega) = 2v$ .

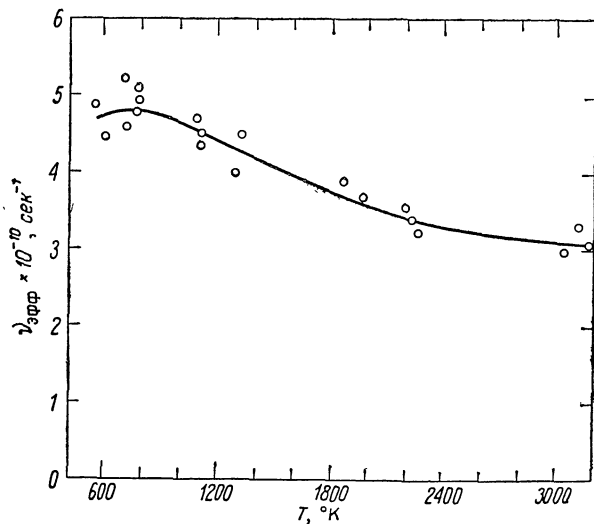
Эффекты Доплера и столкновительный часто сравнимы по величине. Если учесть оба эффекта в (6.24), то условие  $\beta_\parallel \cos \theta \neq 0$  приводит к интегралу, который нужно находить численно. Он известен как функция Фойгта и табулирован (см. работу [247]). Качественно форма линии вблизи центра — доплеровская, а на крыльях — лоренцева.

Из (6.25) и (6.27) видно, что, изучая форму линии излучения или поглощения, можно получить существенную информацию о плазме. Площадь под резонансной кривой пропорциональна полному числу электронов в «поле зрения» приемной антенны. Ширина линии определяет электронную температуру, если преобладает доплеровское уширение, и частоту столкновений, если преобладают столкновения.

При исследовании процессов атомных столкновений (см. работы [248, 249]) для определения частоты  $\nu$  и ее зависимости от скорости полезным методом является измерение ширины линий. На фиг. 63а показано несколько форм линий, полученных при поглощении в положительном столбе, находящемся в аксиальном магнитном поле. Измерения проводились в послесвечении повторяющегося импульсного разряда в парах цезия в момент времени, когда распределение электронов по скоростям было близко к максвелловскому. Ширина линии была получена в различные моменты времени при разных значениях электронной температуры. Одновременное измерение температуры посредством методики, описанной в гл. 10, позволяет тогда определить  $\nu(\nu)$ , если должным образом «разрешен» (или обращен) интеграл в (6.27) (для этого обычно требуется применять счетные машины).



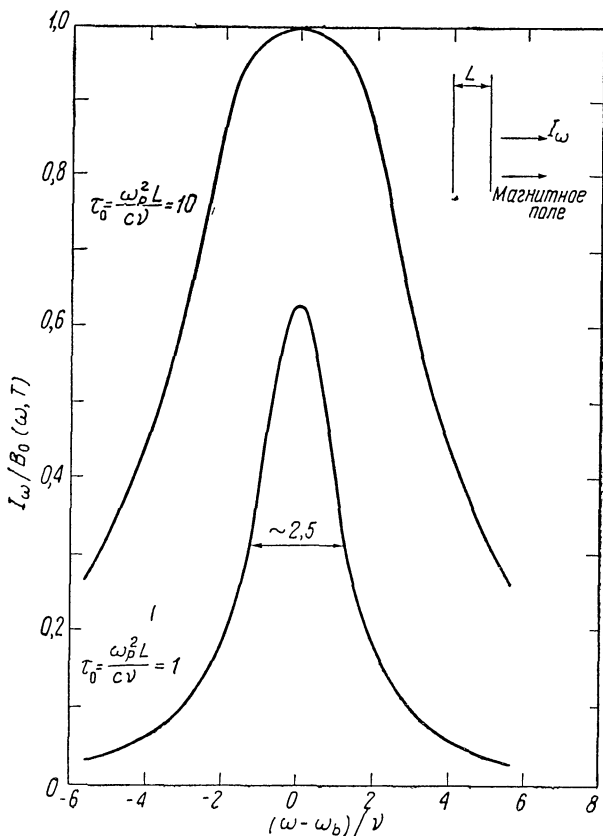
Фиг. 63а. Зависимость коэффициента поглощения, измеренного в послесвечении импульсного разряда постоянного тока в парах цезия, от магнитного поля в окрестности электронной циклотронной частоты (из работы Ингрема [249]). Измерения были сделаны в волноводе, причем магнитное поле  $B_0$  и волновод были ориентированы параллельно оси цилиндрической разрядной трубки.  $L$  ( $\approx 20 \text{ см}$ ) — эффективная длина плазмы, помещенной в волновод. Давление  $p = 0,0275 \text{ торр}$ .



Фиг. 63б. Зависимость ширины линии ( $\nu_{\text{эфф}} = \Delta\omega_b/2$ ) от электронной температуры (из работы Ингрема [249]).

Заметим, что  $\nu_{\text{эфф}} = \nu$  только в том случае, когда  $\nu$  не зависит от скорости; на фигуре частота  $\nu_{\text{эфф}}$  нормирована на плотность атомов цезия, соответствующую давлению 1 торр и температуре  $0^\circ \text{C}$ .





Фиг. 64. Уширение линии из-за самопоглощения излучения (из работы Хиршфилда и Брауна [289]).

$\tau_0$  — оптическая толщина для центра линии. Плазма настолько разрежена, что  $\omega \gg \omega_p$  (ср. с фиг. 78 и 80 для плотной плазмы). Заметим, что у нижней кривой ширина линии  $\Delta\omega \approx 2,5\nu$ , эту ширину следует сравнить с шириной  $\Delta\omega = 2\nu$  в отсутствие самопоглощения.

На фиг. 63б показана зависимость эффективной частоты столкновений  $\nu_{эфф}$  от электронной температуры; частота  $\nu_{эфф}$  определена как половина ширины линии, измеренной в точках половинной мощности; она равна истинной частоте столкновений электрон — атом  $\nu$ , если последняя не зависит от скорости. Однако одно предостережение: эти утверждения применимы к оптически тонкой плазме. Если величина  $\alpha_\omega L$  не мала по сравнению с единицей, то линии уширяются, как будет показано ниже. Соответствующие поправки должны быть сделаны при получении  $\nu_{эфф}$  из измеряемой ширины линии наблюдаемой интенсивности; такие поправки были сделаны при построении кривых на фиг. 63а и 63б.

До сих пор мы пренебрегали самопоглощением излучения (оптическая толщина  $\tau \ll 1$ ). При этих обстоятельствах спектры интенсивности  $I_\omega$  и  $j_\omega$  одинаковые с точностью до постоянного коэффициента пропорциональности. Требование оптической прозрачности налагает довольно строгие ограничения на максимальную плотность электронов и размеры плазмы (в направлении наблюдателя). Например, когда доминируют столкновения, то, согласно (6.27) и закону Кирхгофа, для толщины  $\tau_0$  в центре линии имеем

$$\tau_0 = \alpha_\omega L = \frac{\omega_p^2}{2c\nu} (1 + \cos^2 \theta) L. \quad (6.28)$$

Если плотность электронов  $N = 5 \times 10^9 \text{ см}^{-3}$ ,  $\nu = 2 \times 10^8 \text{ сек}^{-1}$  (для гелия это соответствует давлению  $\sim 10^{-1} \text{ торр}$ ) и  $L = 1 \text{ см}$ , то  $\tau_0 \approx 1$ .

Самопоглощение излучения приводит к уширению линии и уплощению ее вершины. Интенсивность для случая однородного слоя плазмы толщиной  $L$  определяется формулой

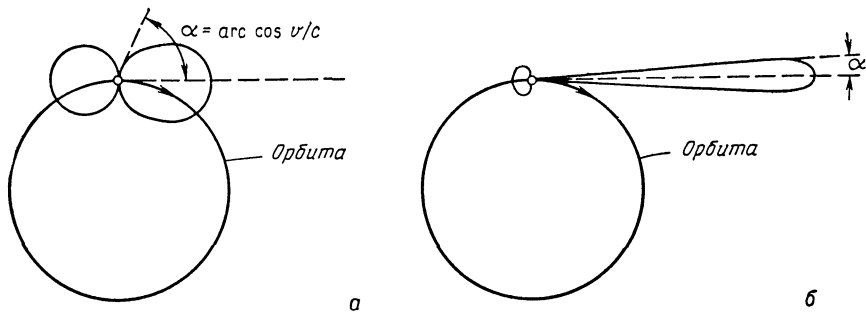
$$I_\omega = \frac{j_\omega}{\omega} (1 - e^{-\alpha_\omega L}) = B_\omega(\omega, T) (1 - e^{-\alpha_\omega L}). \quad (6.29)$$

На фиг. 64 показано спектральное распределение интенсивности для плазмы, в которой преобладают столкновения. При термическом равновесии испускание не может превысить излучения черного тела, которое поэтому ограничивает высоту пика. Измерение интенсивности этого пика обеспечивает независимое определение температуры электронов.

Некоторые аспекты излучения термически неравновесной плазмы, в которой преобладают столкновения, уже обсуждались в § 3 гл. 2. (Более подробное обсуждение проводится в гл. 9; в работе [57] обсуждается излучение термически неравновесной бесстолкновительной плазмы, в которой преобладает доплеровское уширение.)

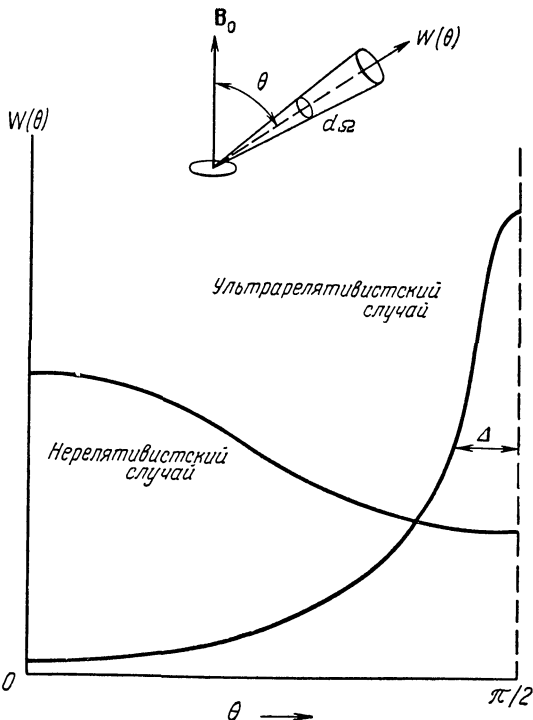
### § 3. Излучение ультррелятивистских электронов

На фиг. 65, *a* схематически показано мгновенное распределение энергии, излучаемой нерелятивистским электроном ( $\beta \rightarrow 0$ ), т. е. в виде полярной диаграммы представлена зависимость интенсивности от угла. Интенсивность излучения в обратном направлении почти такая же, как и в прямом. Излучение распределено по широкому конусу. В противоположность этому (см. фиг. 65, *б*), излучение ультррелятивистского электрона ( $\beta \rightarrow 1$ ) сконцентрировано почти исключительно в прямом направлении в узком конусе, половина угла при вершине которого  $\alpha = \arccos \beta$ . На фиг. 66 приведена зависимость усредненной по времени интенсивности излуче-



Фиг. 65. Полярная диаграмма мгновенной интенсивности излучения нерелятивистского электрона (а) и ультрарелятивистского электрона (б) (из работы Балванца [290]).

В нерелятивистском случае ( $v/c \rightarrow 0$ ) угловое распределение такое же, как у диполя (3.11); приведенная на фигуре полярная диаграмма является поперечным сечением тела в форме бублика. В ультрарелятивистском случае приведенная полярная диаграмма является поперечным сечением луча прожектора; преобладает излучение вдоль вектора мгновенной скорости заряда. Предполагается, что  $\beta_{\parallel} = 0$ . При  $\beta_{\parallel} \neq 0$  конус излучения по-прежнему направлен вдоль вектора полной скорости заряда.



Фиг. 66. Схема углового распределения излучения, усредненного по периоду обращения (из работы Балванца [290]).

Кривые приведены в разных масштабах. Предполагается, что  $\beta_{\parallel} = 0$ .

ния  $W(\theta)$  на единичный телесный угол  $d\Omega$  от угла  $\theta$  между направлением распространения и направлением магнитного поля (наблюдатель находится в дальней зоне поля излучения электрона). В нерелятивистском случае зависимость от угла характеризуется формулой (6.20). В ультрарелятивистском случае излучение происходит под прямым углом к  $\mathbf{B}_0$  и сосредоточено в основном внутри угла, определяемого формулой

$$\gamma\Delta = \left| \gamma \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \right| \approx 1,$$

где  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

Мощность излучения на данной гармонике  $m$  можно найти из уравнения (6.10). В пределе  $\beta \rightarrow 1$ ,  $\gamma \gg 1$  и  $\beta_{\parallel} = 0$  получаем

$$\eta_m^T = \frac{e^2 \omega_b^2}{2\pi \epsilon_0 c} \frac{m}{\gamma^2} \left[ J'_{2m}(2m\beta) - \frac{m}{\gamma^2} \int_0^{\beta} J_{2m}(2mt) dt \right]. \quad (6.30)$$

Сразу видно, что преобладает испускание на высоких гармониках. Если теперь дополнительно к неравенству  $\gamma \gg 1$  добавить также требование  $m \gg 1$ , то уравнение (6.30) можно упростить с помощью формул Ватсона и Николсона (см. работу [250]), которые связывают функции Бесселя  $J$  с модифицированными функциями Ханкеля  $K$ :

$$\begin{aligned} J_{2m}(2m\beta) &= \frac{1}{\pi \sqrt{3} \gamma} K_{1/3}(R), \\ J'_{2m}(2m\beta) &= \frac{1}{\pi \sqrt{3} \gamma^2} K_{2/3}(R), \\ \int_0^{2m\beta} J_{2m}(y) dy &= \frac{1}{\pi \sqrt{3}} \int_R^{\infty} K_{1/3}(t) dt, \end{aligned} \quad (6.31)$$

а также с помощью рекуррентного соотношения для функций Ханкеля

$$2K_{2/3}(R) - \int_R^{\infty} K_{1/3}(t) dt = \int_R^{\infty} K_{5/3}(t) dt, \quad (6.32)$$

где  $R = 2m/3\gamma^3$ . Подставляя (6.31) и (6.32) в (6.30), находим

$$\eta_m^T = \frac{e^2 \omega_b^2}{4\pi^2 \sqrt{3} \epsilon_0 c} \frac{m}{\gamma^4} \int_{2m/3\gamma^3}^{\infty} K_{5/3}(t) dt. \quad (6.33)$$

Последовательные гармоники на частотах  $\omega = m\omega_0$  расположены очень тесно ( $\Delta\omega = \omega_b/\gamma$ ) и спектр почти непрерывный, т. е. полностью противоположен спектру в нерелятивистском случае. Заменяя в (6.33)  $m$  на  $\omega/\omega_0$  и разделив на  $\omega_0$ , получим полное испускание

на единичный интервал круговых частот (а не на одну гармоническую):

$$\eta_{\omega}^T = \frac{\sqrt{3} e^2 \omega_b}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \left[ \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(t) dt \right], \quad (6.34)$$

это — искомый результат. Параметр  $\omega_c$  (в рад/сек) можно вычислить по формуле

$$\omega_c = \frac{3}{2} \omega_b \gamma^2 = 2,64 \times 10^7 B_0 \left( \frac{\epsilon}{m_0 c^2} \right)^2, \quad (6.35)$$

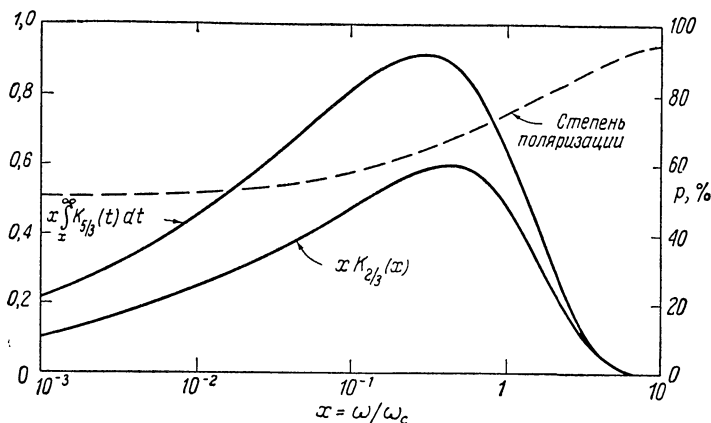
где  $B_0$  — магнитное поле в гауссах.

Спектр определяется функцией, стоящей в квадратных скобках в формуле (6.34); эта функция представлена на фиг. 67. Она медленно растет при низких частотах,  $\omega \ll \omega_c$ , достигает максимума при  $\omega \approx 0,3\omega_c$  и затем резко уменьшается при  $\omega \gg \omega_c$ . Спектр по обе стороны от максимума можно аппроксимировать следующими формулами:

$$\eta_{\omega}^T = \frac{3^{1/2} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) e^2 \omega_b}{2^{7/3} \pi^2 \epsilon_0 c} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1/3}, \quad \frac{\omega}{\omega_c} \ll 1, \quad (6.36)$$

$$\eta_{\omega}^T = \frac{3^{1/2} e^2 \omega_b}{2^{7/2} \pi^{3/2} \epsilon_0 c} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{1/2} e^{-(\omega/\omega_c)}, \quad \frac{\omega}{\omega_c} \gg 1. \quad (6.37)$$

Теоретически предсказанный спектр был сравнен со спектром, измеренным на электронном ускорителе [251, 252]. Было обнаружено



Фиг. 67. Функции [см. уравнения (6.34), (6.47) и (6.49)], связанные со спектром излучения ультрарелятивистского электрона (из работы Вестфолда [241]).

\*Кривые построены по табулированным величинам, приведенным в указанной работе.

полное согласие с теорией. Спектр охватывает интервал от основной частоты  $\omega = \omega_0$  до  $\omega \approx \omega_c$ . Если, например,  $B_0 = 50$  кГс и максимальная энергия электрона равна 100 Мэв, то  $\omega_0/2\pi \approx 10^9$  Гц и  $\omega_c/2\pi \approx 10^{16}$  Гц; излучение перекрывает видимый спектр, где оно возникает в виде голубоватого свечения.

В этих расчетах мы пренебрегали движением заряда вдоль магнитного поля. Переход от круговой орбиты к спиральной можно выполнить, учтя следующее обстоятельство: характеристики излучения электрона, движущегося по спиральной траектории, воспринимаемые неподвижным наблюдателем, точно такие же, какие воспринимались бы от электрона, движущегося по круговой орбите, наблюдателем, движущимся со скоростью  $v_{\parallel}$  вдоль направления магнитного поля. Следствие преобразований Лоренца таково: в (6.34) и (6.35) должна быть сделана следующая замена<sup>1)</sup>:

$$\omega_b \rightarrow \omega_b \sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2}. \quad (6.38)$$

**Обыкновенная и необыкновенная волны.** При рассмотрении в предыдущем разделе полной мощности излучения на данной гармонике была потеряна вся информация относительно поляризации волн. Пусть вектор распространения составляет с полем угол  $\theta = \pi/2$ ; в этом направлении излучается основная часть энергии. Анализируя формулы (6.16) и (6.17), мы видим, что испускательная способность состоит из двух слагаемых: одно соответствует излучению с компонентой электрического вектора вдоль  $\mathbf{B}_0$ ,

$$\eta_{\omega}^{(0)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \sum_1^{\infty} \beta_{\parallel}^2 J_m^2(m\beta_{\perp}) \delta(m\omega_0 - \omega), \quad (6.39)$$

а другое — излучению с компонентой электрического вектора, перпендикулярной  $\mathbf{B}_0$ ,

$$\eta_{\omega}^{(x)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \sum_1^{\infty} \beta_{\perp}^2 J_m'^2(m\beta_{\perp}) \delta(m\omega_0 - \omega). \quad (6.40)$$

Эти два типа излучения, обычно называемые обыкновенной и необыкновенной волнами, являются двумя независимыми модами распространения. Отметим, что существование обыкновенной волны в этом случае обусловлено исключительно тем, что  $\beta_{\parallel} \neq 0$ .

Желательно теперь просуммировать  $\eta_{\omega}$  по ансамблю электронов и вычислить таким образом коэффициент испускания  $j_{\omega}$ :

$$j_{\omega}^{(0, x)} = \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \eta_{\omega}^{(0, x)}(p, \theta, \Theta) f(p, \Theta) 2\pi \sin \Theta d\Theta p^2 dp, \quad (6.41)$$

<sup>1)</sup> Это справедливо для не зависящего от времени распределения излучающих зарядов. См. замечание перед формулой (6.16).

где  $f$  — функция распределения электронов,  $p$  — величина импульса частицы,  $p_{\parallel} = p \cos \Theta$ ,  $p_{\perp} = p \sin \Theta$ , а  $\Theta$  — угол между  $\mathbf{V}_0$  и  $\mathbf{p}$ . Если функция  $f$  изотропна (но не обязательно максвелловская), то удобно вначале провести интегрирование по  $\Theta$ . С этой целью определим усредненную испускательную способность

$$\langle \eta_{\omega}^{(0, x)} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \eta_{\omega}^{(0, x)} (\beta \cos \Theta; \beta \sin \Theta) 2\pi \sin \Theta d\Theta, \quad (6.42)$$

тогда

$$j_{\omega}^{(0, x)} = \int_0^{\infty} \langle \eta_{\omega}^{(0, x)} \rangle f(p) 4\pi p^2 dp. \quad (6.43)$$

Усредненную испускательную способность можно записать в виде [ср. с (6.39) и (6.40)]

$$\langle \eta_{\omega}^{(0, x)} \rangle = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \sum_1^{\infty} A_m^{(0, x)}(\gamma) \delta(m\omega_0 - \omega), \quad (6.44)$$

где функции  $A_m^{(0, x)}$  содержат необходимое интегрирование по  $\Theta$ . Трубников [48] показал с помощью соотношений (6.31) и (6.32), что для ультрарелятивистских электронов ( $\gamma \gg 1$ ,  $m \gg 1$ )

$$A_m^{(0, x)} = \frac{1}{4\sqrt{3} \pi m \gamma^2} \left[ \int_{2m/3\gamma^3}^{\infty} K_{5/3}(t) dt \pm K_{2/3}\left(\frac{2m}{3\gamma^3}\right) \right], \quad (6.45)$$

где знак минус относится к обыкновенной волне, а знак плюс — к необыкновенной.

Суммирование в (6.44) можно заменить интегрированием, поскольку в этом диапазоне энергий гармоники расположены близко друг к другу. Тогда

$$\sum_1^{\infty} A_m^{(0, x)}(\gamma) \delta(m\omega_0 - \omega) \rightarrow \int_1^{\infty} dm A_m^{(0, x)}(\gamma) \delta\left(m \frac{\omega_b}{\gamma} - \omega\right) = \frac{\gamma}{\omega_b} (A_m^{(0, x)})_{m=\gamma\omega/\omega_b}, \quad (6.46)$$

что дает

$$\langle \eta_{\omega}^{(0, x)} \rangle = \frac{\sqrt{3} e^2 \omega_b}{64\pi^3 \epsilon_0 c} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \left[ \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(t) dt \pm K_{2/3}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \right], \quad (6.47)$$

где  $\omega_c$  опять определяется формулой

$$\omega_c = \frac{3}{2} \omega_b \gamma^2.$$

Тогда полная дифференциальная испускающая способность имеет вид

$$\langle \eta_{\omega} \rangle = \langle \eta_{\omega}^0 \rangle + \langle \eta_{\omega}^x \rangle = \frac{\sqrt{3} e^2 \omega_b}{32\pi^3 \epsilon_0 c} \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(t) dt \right], \quad (6.48)$$

т. е. такой же, как (6.34). Эти два уравнения были получены несколько иным путем в работах [253, 254] (см. также работу [255]).

Зная испускающую способность  $\eta_{\omega}$ , можно определить [ср. (1.93)] степень поляризации  $p$ :

$$p = \left| \frac{\eta_{\omega}^{(x)} - \eta_{\omega}^{(0)}}{\eta_{\omega}^{(x)} + \eta_{\omega}^{(0)}} \right| = \left| \frac{K_{2/3}(\omega/\omega_c)}{\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(t) dt} \right|. \quad (6.49)$$

Используя асимптотические приближения для  $K_{\nu}$  при низких и высоких частотах, получаем  $p \rightarrow 1/2$  при  $\omega \ll \omega_c$  и  $p \rightarrow 1$  при  $\omega \gg \omega_c$ .

На фиг. 67 помимо зависимости функций  $xK_{2/3}(x)$  и  $x \int_x^{\infty} K_{5/3}(t) dt$ , которые входят в (6.47) и (6.48), от  $\omega/\omega_c$  приведена зависимость  $p$  от  $\omega/\omega_c$ .

Когда угол наблюдения  $\theta$  отличается от  $\pi/2$ , выражение (6.49) и фиг. 67 остаются справедливыми при условии, что  $\omega_c$  заменяется на  $\omega_c \sin \theta$ ; это будет объяснено ниже в конце данного параграфа. В каждом из двух случаев,  $\theta = \pi/2$  и  $\theta \neq \pi/2$ , величина  $p$ , определяемая (6.49), является мерой того, что можно назвать степенью *линейной* поляризации излучения. Другими словами, высокочастотное электрическое поле  $\mathbf{E}$  можно разложить таким образом, что испускающая способность  $\eta_{\omega}^{(x)}$  будет соответствовать такой компоненте  $\mathbf{E}$ , которая перпендикулярна постоянному магнитному полю  $\mathbf{B}_0$  и волновому вектору  $\mathbf{k}$ , в то время как  $\eta_{\omega}^{(0)}$  будет соответствовать такой компоненте  $\mathbf{E}$ , которая лежит вдоль проекции  $\mathbf{B}_0$ , перпендикулярной  $\mathbf{k}$ . Для угла  $\theta \neq \pi/2$  излучение в общем случае поляризовано по эллипсу и при анализе данных наблюдений часто более уместно разложить электрический вектор иным образом, например на компоненты, соответствующие лево- и правосторонним поляризациям (см. работы [246, 256]). С этой целью можно определить величину  $p_c$  — степень круговой поляризации, которая дает долю, например, правосторонней поляризации в полном излучении. Для этой величины в случае ультрарелятивистского элек-



трона имеем

$$p_c = \frac{2}{3} \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\gamma} \frac{\omega_c}{\omega} \frac{\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{1/3}(t) dt}{\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(t) dt} = \frac{2}{3} \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\gamma} \frac{\omega_c}{\omega} [2\rho - 1].$$

Вторая запись уравнения следует из (6.32) и (6.49). Заметим, что частота  $\omega_c$ , входящая в выражения для  $p_c$  и  $\rho$ , включает в себя угол  $\theta$ , а именно:

$$\omega_c \equiv \frac{3}{2} \omega_b \gamma^2 \sin \theta.$$

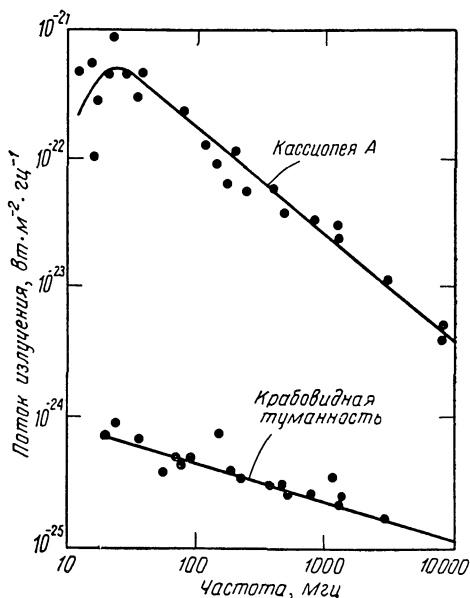
**Нетепловое излучение космических источников.** В 1950 г. Альфен и Херлофсон [257] и независимо от них Кипенхауэр [258] высказали предположение, что циклотронное излучение ультрарелятивистских электронов вполне может быть важным источником космических радиоволн. То, что было тогда по существу блестящей догадкой, обрело впоследствии количественную формулировку в работах Гинзбурга [259, 260], Гетманцева [261] и некоторых других. В настоящее время теория общепризнана как дающая правильную интерпретацию так называемой нетепловой компоненты излучения от нашей и других галактик. Действительно, эти процессы испускания играют центральную роль во многих космологических теориях; они привели также к открытию новых космических объектов, называемых квазарами. (В книге Шкловского [262] превосходно описаны данные наблюдений и теоретические представления до 1958 г., обзор более поздних данных см. в работах Гинзбурга и Сыроватского [263, 264].)

Тепловая компонента галактического излучения вызвана тормозным излучением и обсуждалась в § 4 гл. 3. Ее спектр приведен на фиг. 20 и 29. Спектр нетепловой компоненты совершенно другой; в большом диапазоне частот (от десятков до многих тысяч мегагерц) поток подчиняется закону

$$F_{\omega} \sim \omega^{-x}. \quad (6.50)$$

Показатель степени  $x$  меняется от источника к источнику. Обычно  $x$  имеет значение в интервале от 0,3 до 2. На фиг. 68 приведены спектры от Кассиопеи и Крабовидной туманности [262], для первой  $x \approx 1,2$ , для второй — примерно 0,3. Показатель степени  $x$  обычно называют *спектральным индексом*.

Для расчета спектра испускания предположим, что релятивистские электроны имеют изотропное распределение по скоростям. Обычно предпочтительнее выражать различные величины через



Фиг. 68. Поток излучения от двух астрономических объектов (из работы Шкловского [262]).

Точками представлены результаты измерений многих ученых в различных обсерваториях.

функцию распределения по энергиям  $\epsilon$ , а не через функцию распределения по импульсам. Эти две функции распределения связаны следующим образом:

$$dN = f(p) 4\pi p^2 dp = N(\epsilon) d\epsilon. \quad (6.51)$$

Отсюда формула для коэффициента испускания (6.43) принимает вид

$$j_{\omega}^{(0, x)} = \int \langle \eta_{\omega}^{(0, x)}(\epsilon) \rangle N(\epsilon) d\epsilon. \quad (6.52)$$

Если, как предполагается, источником наблюдаемого радиоизлучения являются первичные космические лучи, проходящие через межзвездные магнитные поля, то нужно руководствоваться тем, что  $N(\epsilon)$  имеет следующий вид:

$$N(\epsilon) = K\epsilon^{-\alpha}, \quad \alpha > 1, \quad (6.53)$$

это по существу функция распределения по энергиям лучей  $\epsilon$ . Функцию (6.53) теперь можно нормировать, зная, что  $\int dN = N_0$ ;

в результате имеем

$$N(\varepsilon) = N_0 (\alpha - 1) \varepsilon_{\text{мин}}^{\alpha-1} \frac{1}{\varepsilon^\alpha}. \quad (6.54)$$

При получении выражения (6.54) производилось обрезание  $\varepsilon$  на нижнем  $\varepsilon_{\text{мин}}$  и верхнем  $\varepsilon_{\text{макс}}$  пределах; при этом предполагалось, что  $\varepsilon_{\text{макс}} \gg \varepsilon_{\text{мин}}$ .

Чтобы найти полное излучение

$$j_\omega = j_\omega^{(0)} + j_\omega^{(x)}$$

в направлении, составляющем прямой угол с магнитным полем, подставим (6.48) и (6.54) в (6.52). Заменяя  $\varepsilon$  на  $x = \omega/\omega_c$ , получим

$$j_\omega = AN_0 \left( \frac{\varepsilon_{\text{мин}}}{m_0 c^2} \right)^{\alpha-1} \frac{(\omega_b)^{(\alpha+1)/2}}{\omega^{(\alpha-1)/2}} \left\{ G \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)_{\text{макс}} - G \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)_{\text{мин}} \right\}, \quad (6.55)$$

где

$$A = \frac{\sqrt{3}}{64\pi^3} \left( \frac{3}{2} \right)^{(\alpha-1)/2} (\alpha - i) \frac{e^2}{\varepsilon_0 c},$$

$$G(y) = \int_y^\infty x^{(\alpha-1)/2} \int_x^\infty K_{5/3}(t) dt dx.$$

Очевидно, что, выбирая различные значения  $\alpha$ ,  $\varepsilon_{\text{мин}}$  и  $\varepsilon_{\text{макс}}$ , можно прийти к разным спектральным распределениям для  $j_\omega$ . Однако когда  $\varepsilon_{\text{макс}}$  и  $\varepsilon_{\text{мин}}$  таковы, что в интересующем нас диапазоне частот  $(\omega/\omega_c)_{\text{макс}} \ll 1$  и  $(\omega/\omega_c)_{\text{мин}} \gg 1$ , выражение для  $j_\omega$  имеет вид простого степенного закона. Чтобы иметь некоторое представление об этих величинах, выберем  $\varepsilon_{\text{макс}} = 10$  Бэв и  $\varepsilon_{\text{мин}} = 1$  Мэв для излучения в магнитном поле  $10^{-5}$  гс. Результаты приведены в табл. 4

Таблица 4

$\varepsilon$	$\omega/2\pi = 100$ Мгц	$\omega/2\pi = 10\,000$ Мгц
10 Бэв	$\left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)_{\text{макс}} \approx 0,006$	$\left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)_{\text{макс}} \approx 0,6$
1 Мэв	$\left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)_{\text{мин}} \approx 6 \times 10^5$	$\left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)_{\text{мин}} \approx 6 \times 10^7$

Из табл. 4 видно, что предположения хорошо удовлетворяются на радиочастотах, но становятся несправедливыми в верхней части

микроволнового диапазона. В области применимости функция внутри фигурных скобок в (6.55) близка к  $G(0)$ ; можно показать, что

$$G(0) = 2^{(\alpha-3)/2} \frac{\alpha + \frac{7}{3}}{\alpha + 1} \Gamma\left(\frac{3\alpha - 1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\alpha + 7}{12}\right). \quad (6.56)$$

Таким образом, для полного испускания имеем

$$j_\omega = AG(0)N_0 \left(\frac{\epsilon_{\text{МИН}}}{m_0 c^2}\right)^{\alpha-1} \frac{(\omega_b)^{(\alpha+1)/2}}{\omega^{(\alpha-1)/2}}. \quad (6.57)$$

Если пренебречь поглощением излучения и считать, что измеряемый поток подчиняется закону (6.50), то его можно сравнить с потоком, достигающим наблюдателя и равным

$$F_\omega = j_\omega L \Delta\Omega, \quad (6.58)$$

где  $L$  — толщина источника в направлении наблюдения и  $\Delta\Omega$  — телесный угол, под которым «виден» источник из места наблюдения.

В результате этого сравнения можно представить величину  $x$  непосредственно через показатель степени  $x$ :  $\alpha = (2x + 1)$ . Поскольку помимо показателя степени  $x$  эксперимент дает только еще одну величину — значение потока, то для завершения расчетов необходима добавочная информация<sup>1)</sup>. Например, если ищется плотность релятивистских электронов  $N_0$ , то требуется знать  $\epsilon_{\text{МИН}}$  и  $V_0$ . Рассмотрим в качестве иллюстрации излучение нашей галактики. Полагая для оценки  $V_0 \approx 10^{-5} \text{ гс}$  и  $\epsilon_{\text{МИН}} = 2 \times 10^7 \text{ эв}$ , находим, что для наблюдаемого потока плотность  $N_0 \approx 10^{-10} \text{ см}^{-3}$ . Таким образом, чтобы объяснить наблюдаемое излучение, требуется лишь малое число электронов с высокой энергией.

Одним из наиболее убедительных аргументов в пользу гипотезы о циклотронном излучении является поляризация излучения. Поступим точно так же, как при получении (6.55), но с той лишь разницей, что вместо выражения для  $\eta_\omega^T$  рассмотрим выражения для  $\eta_\omega^{(0)}$ ,  $\eta_\omega^{(x)}$  [см. (6.47)]. Тогда найдем

$$j_\omega^{(0, x)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{AN_0}{2} \left(\frac{\epsilon_{\text{МИН}}}{m_0 c^2}\right)^{\alpha-1} \frac{\omega_b^{(\alpha+1)/2}}{\omega^{(\alpha-1)/2}} \left\{ G^{(0, x)} \left[ \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)_{\text{макс}} \right] - G^{(0, x)} \left[ \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)_{\text{МИН}} \right] \right\}, \quad (6.59)$$

где

$$G^{(0, x)}(y) = \int_y^\infty x^{(\alpha-1)/2} \int_x^\infty K_{5/3}(t) dt dx \pm \int_y^\infty x^{(\alpha-1)/2} K_{2/3}(x) dx.$$

<sup>1)</sup> Вольтер в своей прекрасной обзорной работе [265] показал роль циклотронного излучения в общем физическом представлении о небесном теле и проиллюстрировал это на примере Крабовидной туманности.

Степень поляризации  $p$  в двух случаях  $(\omega/\omega_c)_{\max} \ll 1$  и  $(\omega/\omega_c)_{\min} \gg 1$  становится независимой от частоты и определяется выражением

$$p = \frac{j_{\omega}^{(x)} - j_{\omega}^{(0)}}{j_{\omega}^{(x)} + j_{\omega}^{(0)}} = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \frac{7}{3}}. \quad (6.60)$$

Для значений  $\alpha$  в интервале от 1,6 до 5,0 (соответствующих значениям  $x$  в интервале от 0,3 до 2)  $p$  составляет от 66 до 82%.

В радио- и микроволновом диапазоне была измерена значительно меньшая степень поляризации. Это можно объяснить тем, что излучение, исходящее от источника, может проходить области, в которых магнитное поле сильно изменяется по величине и направлению. Общий эффект — это деполяризация, обусловленная фарадеевским вращением. Угол вращения<sup>1)</sup> пропорционален  $B_0 l / \omega^2$  (где  $l$  — толщина области), поэтому деполяризация больше у излучения из центра источника, чем от края, и больше на низких частотах наблюдения, чем на высоких. Последнее объясняет, почему степень поляризации мала на радиочастотах, но велика в оптическом диапазоне и составляет, например, для оптического излучения Крабовидной туманности 50—80% (см. работу [263]).

Циклотронный механизм излучения присущ не только удаленным галактическим и внегалактическим источникам. Например, сейчас существует общепринятая точка зрения, что излучение Юпитера в дециметровом диапазоне длин волн имеет ту же самую природу; излучение происходит, по-видимому, от гало, форма которого примерно соответствует земным радиационным поясам. Однако при расчете  $j_{\omega}$  необходимо учитывать, что распределение электронов по импульсам, по-видимому, носит ярко выраженный анизотропный характер (см. работы [254, 266, 267]).

Результаты получены для излучения внутри узкого конуса, ось которого точно перпендикулярна направлению магнитного поля  $B_0$ . Однако в ультррелятивистском случае, который сейчас обсуждается, легко сделать обобщение на произвольное направление наблюдения: в формулах (6.55) — (6.59)  $B_0$  нужно заменить на  $B_0 \sin \theta$ , где  $\theta$  — угол между  $B_0$  и направлением распространения волн  $k$ . Подтверждение этого можно найти, например, в книге [263]. Качественно рассуждение заключается в следующем. Для ультррелятивистских частиц излучение сконцентрировано в узком конусе (фиг. 65), ось которого лежит вдоль мгновенного направления

<sup>1)</sup> Угол вращения (в рад) при  $\omega_b/\omega \ll 1$ ,  $\omega_p^2/\omega^2 \ll 1$  определяется следующим выражением:

$$\psi = \left( \frac{\omega_p^2 \omega_b}{2c\omega^2} \right) l.$$

движения частицы. Запишем компоненты скорости частицы  $\beta c$  в виде

$$\beta_{\parallel} c = \beta c \cos \Theta \quad \text{и} \quad \beta_{\perp} c = \beta c \sin \Theta,$$

где  $\Theta$  — угол наклона. Тогда с точностью до величины порядка  $\gamma^{-1}$  излучение распространяется под углом  $\Theta$ , т. е.

$$\theta = \Theta + O(\gamma^{-1}).$$

Используя преобразования Лоренца, приходим к следующей замене [см. (6.38)]:

$$\omega_b \rightarrow \omega_b \sin \theta.$$

Однако, как было указано в § 1 настоящей главы, обобщение формул (6.55) — (6.59) на произвольное направление распространения можно оправдать только для не зависящего от времени распределения зарядов.

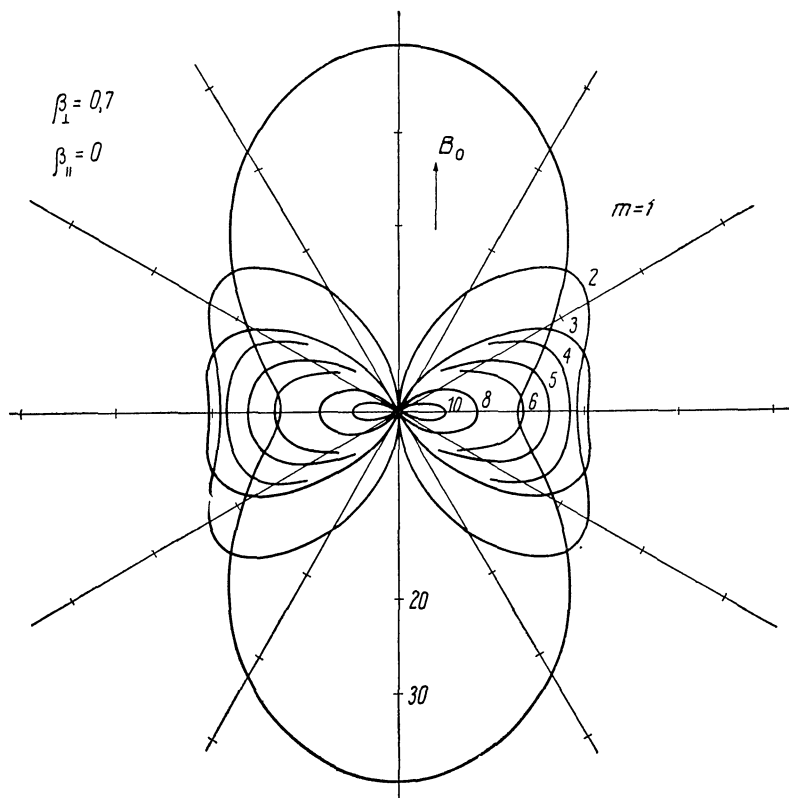
Когда излучение принимается из большого объема пространства, в котором направления магнитного поля изменяются в широких пределах, часто рассматривают эти направления как хаотические относительно направления наблюдения. Принимаемое излучение обладает хаотической поляризацией и интенсивность испускания (6.55) должна быть усреднена по всем направлениям магнитного поля. Это приводит к следующему соотношению:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\sin \theta)^{(\alpha+1)/2} \sin \theta d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma[(\alpha+5)/4]}{\Gamma[(\alpha+7)/4]}.$$

#### § 4. Излучение умеренно релятивистских электронов

Энергии электронов, называемых *умеренно релятивистскими*, охватывают диапазон от килоэлектронвольт до сотен килоэлектронвольт. Один конец спектра испускания умеренно релятивистских электронов (с малой энергией) приближается к спектру испускания нерелятивистских электронов, который обсуждался в § 2 настоящей главы, а другой конец спектра испускания умеренно релятивистских электронов (с высокой энергией) приближается к спектру испускания ультрарелятивистских электронов, рассмотренному в § 3 настоящей главы. Расчеты излучения умеренно релятивистских электронов являются наиболее громоздкими. Приближения часто нелегко сделать и необходимо использовать полную систему уравнений (6.16) и (6.17).

Плазма с электронами, имеющими энергии в этом диапазоне, создается во многих экспериментах по термоядерному синтезу и в установках, исследуемых в настоящее время, поэтому ниже мы рассматриваем такую плазму.



Фиг. 69. Угловое распределение излучения умеренно релятивистского электрона (из работы Остера [238]).

Полная полярная поверхность получается при вращении данной фигуры вокруг вертикальной оси.

Если энергия электронов не очень велика, полную мощность испускания можно получить, взяв первые несколько членов разложения в ряд выражения (6.18):

$$\eta^T \approx \frac{e^2 \omega_b^2}{6\pi \epsilon_0 c} \beta_{\perp}^2 (1 + \beta^2 + \dots), \quad (6.61)$$

где  $\beta^2 = \beta_{\parallel}^2 + \beta_{\perp}^2$ . Интересно сравнить  $\eta^T$  с мощностью испускания на одной основной гармонике:

$$\eta^T(m=1) \approx \frac{e^2 \omega_b^2}{6\pi \epsilon_0 c} \beta_{\perp}^2 \left(1 + \beta^2 - \frac{12}{5} \beta_{\perp}^2 + \dots\right). \quad (6.62)$$

Относительная доля излучения, приходящаяся на высшие (кроме первой) гармоники, определяется выражением

$$\frac{\eta^T - \eta^T(m=1)}{\eta^T} \approx \frac{12}{5} \frac{\beta_{\perp}^2}{1 + \beta_{\parallel}^2 + \beta_{\perp}^2}. \quad (6.63)$$

Взяв  $\beta_{\perp} = 1/2$  (кинетическая энергия примерно равна 80 кэв) и  $\beta_{\parallel} = 0$ , получим несколько неожиданный результат: даже при такой довольно низкой энергии приблизительно 50% излучения приходится на высшие гармоники. При максвелловском распределении электронов по скоростям, сделав соответствующее усреднение выражений (6.61) и (6.62), приводим (6.63) к виду

$$\frac{\langle \eta^T \rangle - \langle \eta^T(m=1) \rangle}{\langle \eta^T \rangle} \approx \frac{48}{5} \left( \frac{\kappa T}{m_0 c^2} \right). \quad (6.64)$$

При  $T = 50$  кэв примерно 94% испускаемой энергии (!) приходится на высшие (кроме первой) гармоники. При таких энергиях определенно нельзя пренебрегать испусканием на гармониках.

На фиг. 69 приведено угловое распределение излучения для случая  $\beta_{\perp} = 0,7$  (кинетическая энергия примерно равна 200 кэв) и  $\beta_{\parallel} = 0$ . Отметим, что с увеличением номера гармоники излучение все более и более концентрируется в направлении, перпендикулярном приложенному магнитному полю.

**Излучение плазмы, находящейся в тепловом равновесии.** Рассмотрим испускание под углом  $\theta = \pi/2$  из плазмы с максвелловским распределением электронов по скоростям. Подставим в (6.43) вместо функции  $f$  и испускательной способности  $\langle \eta \rangle$  соответствующие им выражения (2.26) и (6.44) и проведем интегрирование (которое тривиально из-за наличия  $\delta$ -функции). Для энергий  $\mu \equiv m_0 c^2 / \kappa T \gg 1$  результат имеет вид

$$j_{\omega}^{(0, x)} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \left( \frac{\omega_p^2}{\omega_b c} \right) \left( \frac{\omega^2 \kappa T}{8\pi^3 c^2} \right) \sum_m \Phi(m; x; \mu), \quad (6.65)$$

$$\alpha_{\omega}^{(0, x)} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \left( \frac{\omega_p^2}{\omega_b c} \right) \sum_m \Phi(m; x; \mu);$$

выражение для  $\alpha_{\omega}^{(0, x)}$  получено из выражения для  $j_{\omega}^{(0, x)}$  на основании закона Кирхгофа, а  $\Phi$  определяется формулой

$$\Phi(m; x; \mu) = \sqrt{2\pi} \frac{\mu^{5/2}}{x^4} m^2 \sqrt{m^2 - x^2} e^{-\mu \left( \frac{m}{x} - 1 \right)} A_m^{(0, x)} \left( \frac{m}{x} \right),$$

$$x = \frac{\omega}{\omega_b}, \quad (6.66)$$

$$\mu = \frac{m_0 c^2}{\kappa T}.$$



Отдельные члены с  $m = 1, 2, \dots$  из (6.65) представляют собой вклады от гармоник в полные коэффициенты испускания и поглощения.

Величина  $A_m$  вычисляется из формулы (6.44) с учетом (6.39), (6.40) и (6.42). Трубников [48] показал, что для нее можно применять следующие приближения:

для нерелятивистских энергий,  $m\beta \ll 1$ ,

$$A_m^{(0, x)} = \frac{(m\beta)^{2m}}{(2m+1)!} \left( \frac{\beta^2}{2m+3}; 1 \right); \quad (6.67a)$$

для умеренно релятивистских энергий,  $\gamma^3 \ll m$ ,

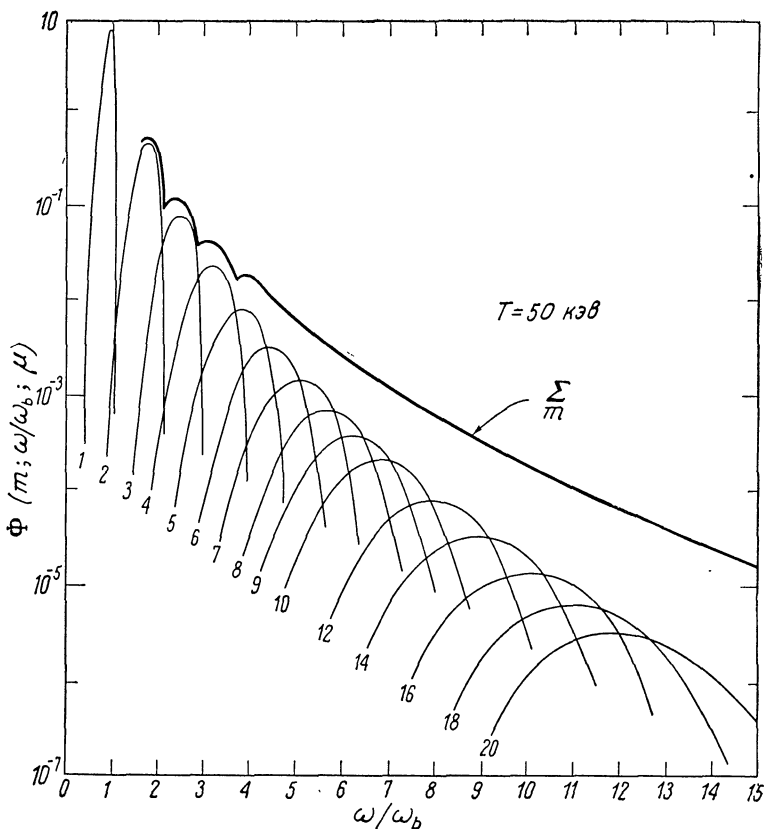
$$A_m^{(0, x)} = \frac{e^{2m/\gamma}}{\sqrt{16\pi m^3 \gamma}} \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^m \left[ \frac{\gamma(\gamma^2-1)}{2m}; 1 \right]. \quad (6.67b)$$

Спектральные характеристики излучения входят в функцию  $\Phi$ . На фиг. 70а показана зависимость функции  $\Phi$  от  $x = \omega/\omega_b$  для первых двадцати гармоник при  $\mu = 10$  ( $T \approx 50$  кэВ). Рассматривается только необыкновенная волна; вклад от обыкновенной волны обычно мал. Уширение отдельных линий вызвано релятивистским изменением массы. В излучение, соответствующее данной линии, дают вклад только частоты  $\omega \leq m\omega_b$ , причем электроны с максимальной энергией ответственны за излучение на низшей частоте. Вблизи пиков линии имеют примерно гауссову форму и полуширина  $(\Delta\omega)_m$  приближенно определяется формулой

$$(\Delta\omega)_m \approx m^{3/2} \omega_b \left( \frac{xT}{m_0 c^2} \right) \quad \text{для малых } m. \quad (6.68)$$

Возрастающее размазывание последующих гармоник приводит к ярко выраженному перекрытию и в результате — к почти монотонно спадающему спектру. Приближенный вид спектра приведен на фиг. 70а. Перекрытие становится существенным для тех гармоник, для которых ширина  $2(\Delta\omega)_m$  соответствующей линии равна или превышает расстояние между гармониками ( $\sim \omega_b$ ); найдем из (6.68) значение  $m$ ; при  $T = 50$  кэВ имеем  $m \approx 3$ , т. е. у гармоник с  $m > 3$  перекрытие преобладает.

Измеряя спектр испускания, мы получаем ценную информацию о температуре и плотности плазмы. О таких экспериментах впервые сообщили Лихтенберг и др. [268]; их результаты приведены на фиг. 70б. Излучение принималось от импульсной плазмы, удерживаемой в ловушке с магнитными «пробками» и нагреваемой за счет магнитного сжатия. В качестве детектора использовался фоточувствительный элемент на антимониде индия, стоящий после монохроматора, работающего в далеком инфракрасном диапазоне. Наблюдения проводились в диапазоне длин волн от 0,2 до 4 мм. Ширина полосы приемника составляла примерно  $0,1\omega_b$ .



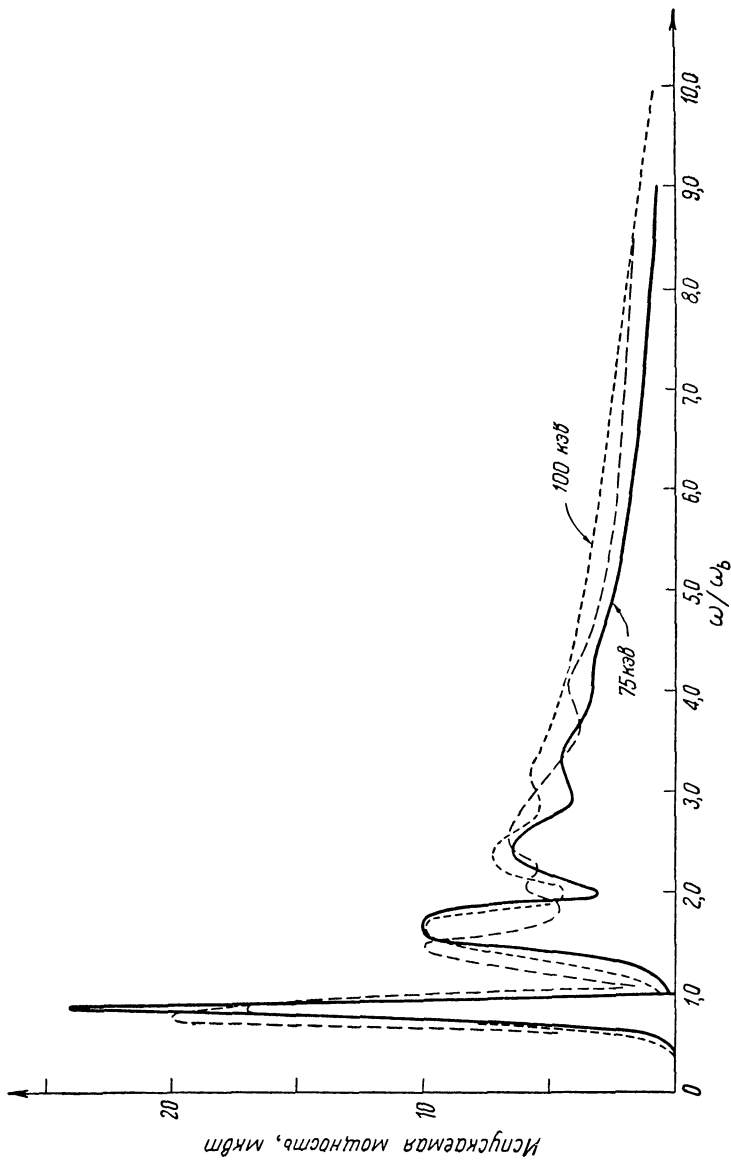
Фиг. 70а. Спектр первых двадцати гармоник до и после суммирования ( $\sum_m$ ) по отдельным гармоникам (из работы Хиршфилда, Балвина и Брауна [291]). Самопоглощение не учитывается.

Как видно из фиг. 69, угловое распределение излучения, в общем, весьма сложное, за исключением излучения на высоких гармониках. Для последнего Трубников показал [269], что если

$$\frac{\omega}{\omega_b} \frac{\kappa T}{m_0 c^2} \gg 1, \quad (6.69)$$

то угловое распределение хорошо аппроксимируется выражением

$$j_{\omega}^{(x)}(\theta) \approx j_{\omega}^{(x)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \exp\left\{-\left[\left(x \frac{\mu^2}{48}\right)^{1/3} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)^2\right]\right\} \quad \text{для} \quad \left|\theta - \frac{\pi}{2}\right| \ll 1, \quad (6.70)$$



Ф и г. 70б. Сравнение измеренного и рассчитанных спектров излучения, испускаемого плазмой с горячими электронами (из работы Лихтенберга, Сесника и Тривеллиса [268]).  
 Крупный пик — экспериментальная кривая,  $B_0 = 50$  кэс,  $t = 500$  мксек. В этом эксперименте поглощение несущественно. Излучение наблюдалось под прямыми углами к приложенному магнитному полю и детектировалось быстродействующим детектором на антимониде индия (см. работу Патли [90]).

где  $j_{\omega}^{(x)}(\pi/2)$  определяется формулой (6.65). Отметим, что при отклонении угла  $\theta$  от  $\pi/2$  излучение спадает быстрее, чем по экспоненте (подробные расчеты см. в работах [270—274]).

**Самопоглощение.** В оптически толстой плазме самопоглощение радикально изменяет спектры, показанные на фиг. 70а и 70б.

Рассмотрим испускание под прямым углом от однородного слоя плазмы толщиной  $L$ , находящегося в магнитном поле  $B_0$ , направленном перпендикулярно  $L$ . Интенсивность  $I_{\omega}$  вне плазмы равна

$$I_{\omega}^{(0, x)} = B_0(\omega, T) \left[ 1 - e^{-\alpha_{\omega}^{(0, x)} L} \right]. \quad (6.71)$$

Коэффициент поглощения выводится из выражений (6.65) — (6.67). Оптическую толщину  $\alpha_{\omega} L$  можно записать в виде

$$\alpha_{\omega}^{(0, x)} L = \Lambda \sum_m \Phi(m; x; \mu), \quad (6.72)$$

где  $\Lambda$  — безразмерный параметр, определяемый формулой

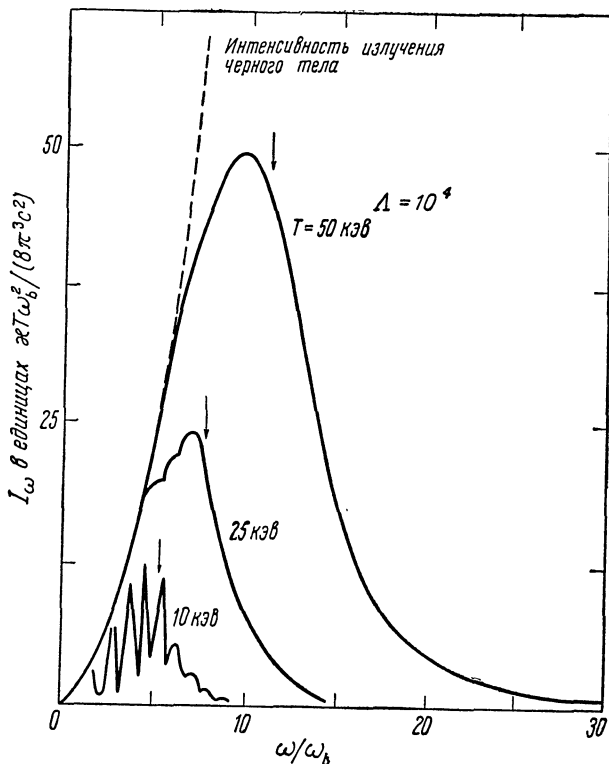
$$\Lambda = \frac{\omega_p^2 L}{\omega_b c}; \quad (6.73)$$

он показывает, насколько важно самопоглощение. Когда  $\alpha_{\omega}^{(x)} L$  больше единицы<sup>1)</sup>, наблюдатель видит спектр испускания черного тела; когда  $\alpha_{\omega}^{(x)} L$  меньше единицы, он видит практически невозмущенный спектр испускания отдельной частицы. Положим, например:  $L = 1$  м,  $B = 50\,000$  гс и  $N = 8 \times 10^{14}$  см<sup>-3</sup>. Тогда  $\Lambda = 10^4$  и частота, которая разграничивает две области испускания, определяется из равенства  $\sum \Phi \approx 10^{-4}$ . Из фиг. 70а видно, что это происходит на частоте  $\omega \approx 11\omega_b$ . При более низких частотах испускание на гармониках эффективно запирается в пределах спектра черного тела.

На фиг. 71 показана зависимость интенсивности  $I_{\omega}$  от частоты при  $\Lambda = 10^4$  для трех различных температур электронов. Стрелками указана частота  $\omega^*/\omega$ , для которой  $\alpha_{\omega} L = 1$ . Видно, что при  $\omega \lesssim \omega^*$  испускание практически такое, как испускание черного тела; при  $\omega \gtrsim \omega^*$  оно очень быстро падает до пренебрежимо малых величин. Поэтому полная интенсивность излучения под прямыми углами к  $\mathbf{B}_0$  от слоя плазмы хорошо аппроксимируется следующим выражением:

$$I\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) \approx \int_0^{\omega^*} B_0(\omega, T) d\omega = \frac{\omega_b^3 \kappa T}{24\pi^3 c^2} (m^*)^3, \quad (6.74)$$

<sup>1)</sup> Рассматривается только необыкновенная волна.



Фиг. 71. Кривые, иллюстрирующие эффект самопоглощения (или «пленения») излучения (из работы Трубникова [48]).

Стрелками указаны частоты, при которых  $\omega = \omega^*$ .

где  $m^* = \omega^*/\omega_b$  — номер гармоники, выше которой излучение перестает совпадать с излучением черного тела.

Номер  $m^*$  является функцией только электронной температуры  $T$  и параметра непрозрачности  $\Lambda$ ; его можно вычислить из (6.66) и (6.72). На фиг. 72 показаны результаты работы [48]. Кривая для плазмы с температурой 50 кэВ приблизительно удовлетворяет эмпирическому соотношению

$$(m^*)^6 = 0,57 \left( \frac{20}{3} \Lambda T \right), \quad (6.75a)$$

или

$$(m^*)^6 = 0,57 (100\beta_e BL), \quad (6.75b)$$

где  $B$  — магнитное поле в гауссах,  $L$  — толщина плазменного слоя в метрах и  $\beta_e = 2\mu_0 N \kappa T / B^2$  — отношение давления электронов

к магнитному давлению. Соотношение (6.75б) следует из тождества

$$\frac{20}{3} \Lambda T \text{ (в кэВ)} = 100\beta_e B \text{ (в гс)} L \text{ (в м)}.$$

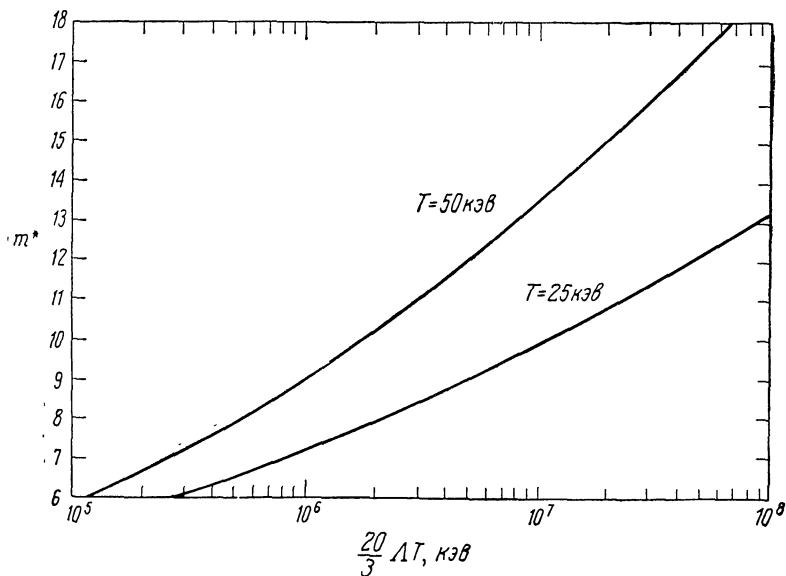
Эти результаты относятся к излучению под прямым углом к поверхности слоя плазмы. Нас больше интересует следующий вопрос: какова эффективная частота  $\omega^*$ , вплоть до которой *полный поток*, выходящий из слоя, оказывается черным? Чтобы ответить на него, необходимо провести довольно утомительное интегрирование  $I_\omega(\theta)$  как по всему угловому распределению  $\theta$ , так и по всем частотам  $\omega$ . Это сделали Драммонд и Розенблют [274]; они показали, что поток излучения (в  $\text{вт/м}^2$ ) можно выразить в виде [ср. с (6.74)]

$$F = \frac{\omega_b^3 \kappa \Gamma}{12\pi^2 c^2} (m_{DR}^*)^3, \quad (6.76)$$

где  $m_{DR}^* = \omega^*/\omega_b$  — номер гармоники, ниже которой циклотронное излучение эффективно запирается за счет самопоглощения. Для плазмы с температурой 50 кэВ находим

$$(m_{DR}^*)^6 \approx 0,25 (100\beta_e BL), \quad (6.77)$$

что очень близко к результату (6.75а).



Фиг. 72. Зависимость номера гармоник  $m^*$ , «пленных» в результате самопоглощения, от коэффициента непрозрачности  $\Lambda$ , определяемого формулой (6.73).

**Влияние циклотронного излучения на конструкцию термоядерных реакторов.** В настоящее время в системах, использующих магнитные поля для удержания частиц, существенную роль играет отношение давления частиц к магнитному давлению:

$$\beta \equiv \beta_e + \beta_i = \frac{2\mu_0}{B^2} (N \kappa T + N_i \kappa T_i). \quad (6.78)$$

Часто отношение  $\beta$  принимает критическое значение, выше которого система оказывается неустойчивой. В общем, отношение  $\beta$  имеет максимальное значение, равное единице, но обычно требуется, чтобы оно было значительно меньше.

С иллюстративной целью рассмотрим генерацию энергии при циклотронном излучении в системе с  $\beta = 1$ ,  $T = T_i$  и  $N = N_i$ . Если проинтегрировать выражение (6.61) по максвелловскому распределению, то (для  $T \ll 200$  кэв) найдем

$$P_C \approx 5 \times 10^{-38} N^2 T^2 \quad (\text{в вт/м}^3), \quad (6.79)$$

где  $N$  — плотность в  $\text{м}^{-3}$  и  $T$  — температура в кэв. Заметим для сравнения, что полное тормозное излучение, определяемое формулой (3.84) и выраженное в тех же самых единицах, имеет вид

$$P_B \approx 5 \times 10^{-37} N^2 T^{1/2} \quad (\text{в вт/м}^3). \quad (6.80)$$

При низких температурах тормозное излучение больше циклотронного. Однако при температуре 36 кэв, соответствующей температуре поджига D — D-реактора (в отсутствие магнитного поля), преобладает циклотронное излучение. Действительно, поскольку  $P_C$  пропорционально  $T^2$ , скорость выделения энергии при реакциях D — D никогда не превысит скорости ухода энергии за счет циклотронного излучения. Это не так при реакциях D — T; мы находим, что при температуре поджига 4 кэв выделяющаяся энергия превышает потери. Из-за циклотронного излучения температура поджига увеличивается от 4 кэв примерно до 7 кэв.

Таким образом, видно, что циклотронное излучение не является, по-видимому, существенным для D — T-реакторов, но может быть существенным для D — D-реакторов. Хотя формула (6.79) предсказывает, что скорость радиационных потерь превышает скорость выделения энергии, этот факт не исключает возможности создания D — D-реактора. Действительно, если можно сделать реактор достаточно большим, то большая часть излучения самопоглотится, прежде чем выйдет наружу. Если излучение происходит исключительно в окрестности основной частоты  $\omega = \omega_b$ , то высокий коэффициент поглощения на этой частоте обеспечивает поперечный размер реактора всего в несколько сантиметров. При таком размере уменьшаются потери энергии до приемлемых величин. Однако, как

было видно в предыдущем разделе, большая часть излучения при-  
суща высшим гармоникам; поскольку излучение на высших гармо-  
никах относительно слабое, коэффициент поглощения также невелик,  
и в результате этого размеры реактора должны быть соответ-  
ственно увеличены. Впервые на это важное обстоятельство  
обратил внимание Трубников [48].

Минимальный размер реактора можно получить из уравнений  
баланса энергии. Для ионов уравнение баланса энергии имеет вид

$$fP_{DD} = P_{ie}, \quad (6.81)$$

где  $P_{DD}$  — энергия (на единицу объема), выделяющаяся в единицу  
времени при D — D-реакциях,  $P_{ie}$  — энергия (на единицу объема),  
передаваемая в единицу времени от ионов к электронам при упру-  
гих столкновениях, и  $f$  — число, показывающее, какая часть энергии  
 $P_{DD}$  передается непосредственно ионам. Поскольку энергия  $P_{DD}$   
пропорциональна величине  $N^2$ , умноженной на функцию от  $T_i$ ,  
а энергия  $P_{ie}$  пропорциональна величине  $N^2$ , умноженной на функ-  
цию от  $T$  и  $T_i$ , то уравнение (6.81) позволяет получить равновес-  
ную температуру ионов  $T_i$  как функцию электронной темпера-  
туры  $T$ .

Для электронов уравнение баланса энергии имеет вид

$$P_{DD}(1 - f) + P_{ie} = P_B + \frac{F}{L}, \quad (6.82)$$

где  $P_B$  — потери на тормозное излучение, определяемые формулой  
(3.84),  $F$  — поток излучения от черного тела, определяемый выра-  
жением (6.76), и  $L$  — критическая толщина плазменного слоя. Это  
уравнение можно переписать в виде

$$\beta_e = \frac{(m_{DR}^*)^3}{\beta_e BL} g(T), \quad (6.83)$$

где  $g$  — функция только электронной температуры. Эта функция  
имеет минимум при температуре  $T \approx 50$  кэВ, которая поэтому яв-  
ляется оптимальной температурой для реактора минимального раз-  
мера. Подставляя (6.77) в (6.83), находим

$$L \sim \frac{g^2(T)}{\beta_e^3 B} \quad \text{при } T = 50 \text{ кэВ}; \quad (6.84)$$

отсюда видна сильная зависимость  $L$  от  $\beta_e$ .

Для получения плазмы как можно меньшего размера необхо-  
димо, чтобы величина  $\beta_e$  имела большое значение. С другой стороны,  
для устойчивости плазмы обычно требуется, чтобы отношение пол-  
ного давления частиц к магнитному давлению, т. е.  $\beta = \beta_e + \beta_i$ ,  
имело довольно малое значение. Драммонд и Розенблют подсчи-  
тали, что при  $T = 50$  кэВ,  $B = 10^5$  гс и  $\beta = 0,1$   $L = 205$  м (!). Од-  
нако  $L = 3,2$  м при  $\beta = 0,4$ . Это довольно большие реакторы.



Размер можно сильно уменьшить с помощью рефлекторов, установленных вне плазмы. Если  $\Gamma$  — их коэффициент отражения, то критические размеры, при которых плазма является практически черной, уменьшаются в  $1/(1 - \Gamma)$  раз. При  $\Gamma = 90\%$   $L$  уменьшается в 10 раз.

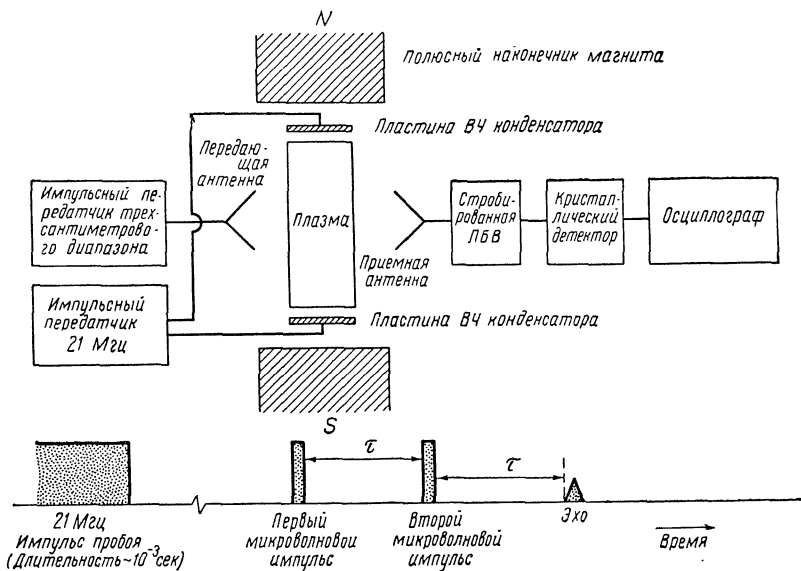
Имеются и другие факторы, которые также могут помочь делу. При расчете температуры поджига для  $D - D$ -реакции было получено значение 36 кэв, при этом не учитывалось сжигание трития и  $He^3$ , которые образуются при реакции. При их сгорании плазма получает дополнительную энергию, что снижает температуру поджига. При этих условиях значение  $L$  (без отражателей) становится равным 10,7 м при  $\beta = 0,1$  и  $L = 0,17$  м при  $\beta = 0,4$ . Это довольно обнадеживающие результаты. С другой стороны, имеется проблема потерь частиц (например, из ловушки с магнитными «пробками»), что приводит к возрастанию температуры поджига.

### § 5. Явление эха вблизи электронной циклотронной частоты

Хилл и Каплан [275] обнаружили, что в плазме, возбуждаемой многократными импульсами микроволнового излучения, частота которого близка к электронной циклотронной частоте, имеет место эффект эха, по-видимому, аналогичный эффекту эха в системах ядерных магнитных спинов [276, 277].

Блок-схема эксперимента Хилла и Каплана приведена на фиг. 73. Плазма создавалась между полюсами электромагнита многократно повторяющимися импульсами от источника ВЧ излучения, частота которого составляла 21 МГц (продолжительность импульса равна примерно 1 мсек). Пробой производился в таких газах, как аргон, неон и азот при давлениях между  $\sim 10^{-3}$  и  $\sim 10^{-1}$  торр. Во время импульса плотность электронов достигала значений от  $\sim 10^9$  до  $\sim 10^{11}$  см $^{-3}$ .

В период послесвечения плазма облучалась двумя или тремя достаточно интенсивными импульсами микроволнового излучения, частота которого ( $8,2 \times 10^3 - 12,4 \times 10^3$  МГц) была близка к электронной циклотронной частоте  $\omega_e$ . Падающее излучение было поляризовано так, что его электрический вектор был перпендикулярен магнитному полю  $B_0$ . Энергия излучения в импульсе составляла примерно  $10^{-6}$  Дж, а ширина импульса была около 50 нсек. В экспериментах с двумя импульсами, разделенными временным интервалом  $\tau$ , приемная антенна воспринимала эхо через время  $\tau$  после второго импульса. Иногда появлялось более чем одно эхо. Для наблюдения четкого эха по аналогии с общепринятой техникой получения спинового эха [276] вводилась небольшая неоднородность магнитного поля ( $\sim 0,5\%$ ).



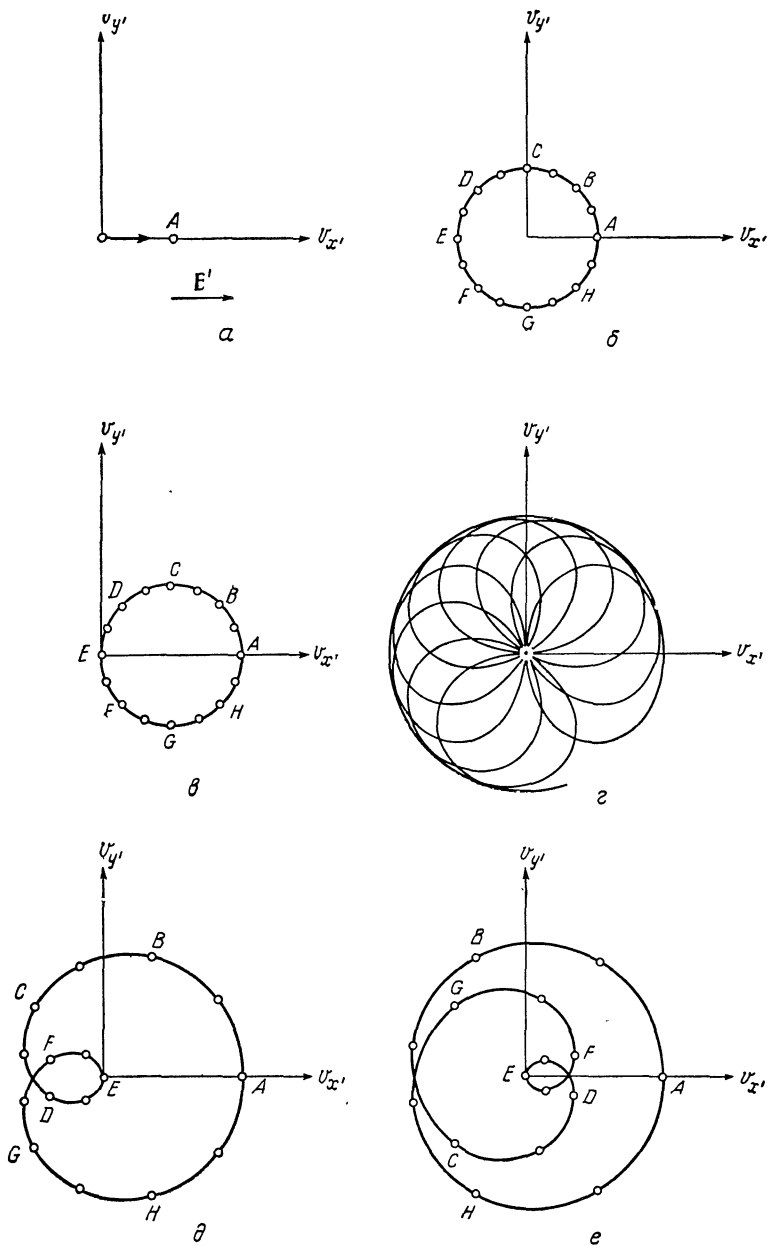
Фиг. 73. Принципиальная блок-схема аппаратуры, используемая для наблюдения эха (из работы Хилла и Каплана [275]).

В обсуждаемой здесь системе классических осцилляторов возникновение эха может быть обусловлено несколькими механизмами. В настоящее время объяснения носят в лучшем случае полуколичественный характер [278—281, 495]. Трудность заключается в том, что для полного понимания явления необходимо нелинейное рассмотрение. Ниже дается картина явления на основе линейной теории. При этом мы будем придерживаться схемы изложения, предложенной Гоулдом [278].

Рассмотрим систему свободных невзаимодействующих электронов, вращающихся в приложенном постоянном магнитном поле  $\mathbf{V}_0$ . Предположим для простоты, что электроны вначале не имеют собственной энергии и приобретают ее исключительно от импульсов микроволнового излучения. Пусть микроволновое излучение падает вдоль направления  $\mathbf{V}_0$  и пусть оно обладает правосторонней круговой поляризацией и частотой  $\omega \approx \omega_b$ .

Предположим, что наблюдатель находится в системе координат (штрихованная система), вращающейся вокруг  $\mathbf{V}_0$  с угловой скоростью  $\omega$ . До того как прилагается первый импульс, все электроны находятся в начале системы координат  $v'_x, v'_y$ , показанной на фиг. 74. Предположим также, что импульс прилагается в течение такого короткого времени  $t_1$ , для которого

$$(\omega_b - \omega) t_1 \equiv (\Delta\omega_b) t_1 \ll 1.$$



Фиг. 74. Распределение электронов по скоростям во вращающейся системе координат (из работы Гоулда [208]).  
 а - в момент  $t=0$  первого импульса; б - при  $0 < t < \tau$ ; в - при  $t=\tau$ ; г - при  $\tau < t < 2\tau$ ; д - при  $t=2\tau$ ; е - при  $t=3\tau$ .

Тогда каждый электрон приобретает скорость

$$\mathbf{v}'_1 = \frac{eE't_1}{m},$$

где  $E'$  — электрическое (статическое) поле, которое имеется во вращающейся системе координат (фиг. 74, а). В течение длительности этого импульса результирующая макроскопическая плотность тока равна

$$J'_x = Nev'_1.$$

Индукированный ток постепенно затухает из-за предполагаемых неоднородностей магнитного поля. Поэтому за интервал времени, больший  $(\Delta\omega_b)^{-1}$ , концы векторов скорости распределяются почти равномерно по окружности радиусом  $v'_1$  (фиг. 74, б). Например, концы векторов скорости в точке  $B$  попадают опять в эту точку после поворота на углы  $(\pi/4) \pm 2\pi n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) и аналогично для других точек, обозначенных  $C, D$  и т. д.

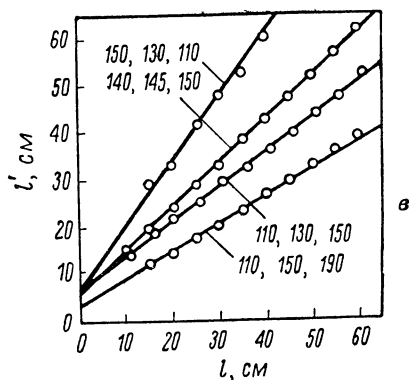
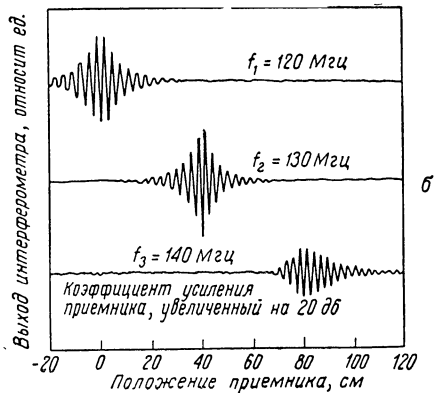
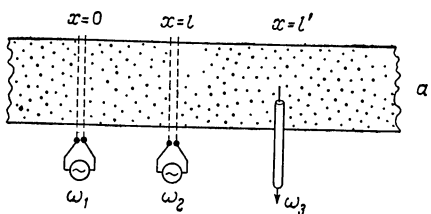
Когда через время  $t = \tau$  прилагается второй импульс (предполагается, что он идентичен первому), опять индуцируется ток, причем результирующая макроскопическая плотность его теперь равна

$$J'_x = 2Nev'_1.$$

Электроны движутся по окружности, смещенной относительно начала координат, как показано на фиг. 74, в. После импульса каждый вектор скорости вращается со своей угловой скоростью  $\Delta\omega_b$ , создавая тем самым петли (фиг. 74, з); макроскопический ток опять равен нулю. Однако в момент времени  $t = 2\tau$  электроны перегруппировываются таким образом (фиг. 74, д), что векторы, которые были в точке  $B$ , опять совмещаются в новой точке  $B$ , а те, которые были в точке  $C$  — в новой точке  $C$  и т. д. Аналогичная ситуация возникает при  $t = 3\tau$  (фиг. 74, е),  $t = 4\tau$  и т. д.

На первый взгляд кажется, что из-за фазовой группировки при  $t = 2\tau, 3\tau, \dots$  возникает результирующий макроскопический ток и, тем самым, эхо. Однако это не так, поскольку ток «сгруппированных» частиц с  $v'_x < 0$  точно компенсируется током, образованным частицами с  $v'_x > 0$ . Таким образом, эта «линейная» теория не в состоянии объяснить наблюдаемое эхо. Необходимо найти механизм, который испортил бы компенсацию. В цитированных выше работах предложено несколько таких механизмов. Ограничимся двумя.

Учет релятивистской массы приводит к зависимости гирочастоты от энергии электрона. В результате этого из-за различия в энергиях вращение векторов скоростей в полупространстве  $v'_x > 0$  (фиг. 74, д) несколько отличается от вращения векторов скоростей в полупространстве  $v'_x < 0$ .



Фиг. 75. Эксперимент, в котором наблюдалось эхо плазменной волны (из работы Малмберга и др. [286]).

а — принципиальная схема эксперимента;  $x=0$  и  $x=l$  — места расположения двух передатчиков, возбуждаемых на частотах вблизи электронной плазменной частоты;  $x=l'$  — место расположения антенны, детектирующей эхо. б — эхо третьего порядка ( $m=2, n=1$ ). в — положение того же самого эха при изменениях  $\omega_1, \omega_2$  и  $l$ . Сплошные линии — расчетные, полученные на основании уравнения (6.91).

Столкновения также могут вызвать эхо. Когда частота столкновений электрон — атом или электрон — ион зависит от скорости, что имеет место в большинстве газов (см. § 2 и 6 гл. 3), электроны селективно устраняются от участия в процессе группировки и компенсация опять может быть нарушена.

Эффект эха может оказаться полезным средством при исследовании релаксационных процессов в плазме. По мере увеличения интервала  $\tau$  между импульсами амплитуда эха уменьшается, и когда  $\tau$  становится значительно больше среднего времени жизни резонансных процессов, эффект пропадает. Помимо электронной циклотронной частоты имеется много естественных мод колебаний плазмы, и есть надежда обнаружить эхо в разнообразных системах.

Недавно обнаружено экспериментально и объяснено теоретически волновое эхо вблизи электронной плазменной частоты [282—286]. В отличие от описанных выше экспериментов на электронной циклотронной частоте, в которых эхо наблюдалось как явление во времени, оказалось более удобно исследовать эхо плазменных волн как явление в пространстве.

Стационарный столб полностью ионизованной плазмы помещается в сильное магнитное поле, которое используется в данных

экспериментах (это та же самая плазма, которая была описана в § 5 гл. 4 и в которой наблюдалось электронное затухание Ландау). Первая антенна в некоторой точке  $x = 0$  непрерывно возбуждает продольные электронные плазменные волны, быстро исчезающие из-за затухания Ландау (фиг. 75), причем синусоидальное электрическое поле зависит от времени как  $\exp(-j\omega_1 t)$ . Вторая антенна в точке  $x = l$  непрерывно возбуждает волны на другой частоте  $\omega_2$ ; их электрическое поле зависит от времени как  $\exp(+j\omega_2 t)$ . Третья, приемная антенна, настроенная на разностную частоту  $\omega_3 = (\omega_2 - \omega_1)$ , регистрирует в плазменном столбе сигналы на этой частоте. В некоторой точке  $x = x_0 > l$  детектируется пространственное эхо. Положение точки  $x = x_0$ , в которой оно наблюдается, зависит от значений частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и расстояния  $l$  между передающими антеннами. Эксперимент показывает, что

$$\frac{x_0}{l} = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (6.85)$$

Данное эхо (как и циклотронное) является нелинейным эффектом. Хотя детальные расчеты очень громоздки, физику явления понять легко.

Электрическое поле от первого передатчика возмущает стационарную функцию распределения электронов по скоростям  $f_0(v)$ . Возмущение первого порядка полной функции  $f(v)$  имеет вид

$$f_1 \sim f_1(v) \exp[-j\omega_1 t] \quad \text{при } x = 0. \quad (6.86)$$

С увеличением расстояния электрическое поле быстро затухает (по Ландау), но, поскольку имеются электроны с высокой энергией, то функция распределения остается возмущенной. Это можно записать в виде

$$f_1 \sim f_1(v) \exp\left[-j\omega_1 \left(t - \frac{x}{v}\right)\right]. \quad (6.87)$$

Для достаточно больших  $x$  ВЧ возмущение плотности электронов  $n$  (и ВЧ электрическое поле), связанное с  $f_1$ , равно нулю. Причина такова — для получения  $n$  необходимо провести интегрирование функции  $f_1$  по скорости. Так как фаза этой функции быстро осциллирует, как функция  $v$ , то интеграл от нее практически равен нулю. Поэтому не возникают макроскопические колебания плотности и, следовательно, не возникает эха в случае одного передатчика.

Электрическое поле от второго передатчика в точке  $x$  вызывает возмущение первого порядка функции  $f_0(v)$ , которое имеет вид

$$f_2 \sim f_2(v) \exp\left[+j\omega_2 \left(t - \frac{x-l}{v}\right)\right]. \quad (6.88)$$

Кроме того, электрическое поле действует на возмущение  $f_1$  и приводит к возмущению второго порядка (нелинейному) вида

$$f_3 \sim f_1 f_2 \exp \left[ -j\omega_1 \left( t - \frac{x}{v} \right) + j\omega_2 \left( t - \frac{x-l}{v} \right) \right]. \quad (6.89)$$

Как уже указывалось, интегралы от функций  $f_1$  и  $f_2$  по скорости из-за быстрых осцилляций фазы этих функций равны нулю; то же самое справедливо и для интеграла от  $f_3$ , за исключением определенного расстояния  $x = x_0$ , для которого

$$\omega_1 \frac{x_0}{v} = \omega_2 \frac{x_0 - l}{v}, \quad (6.90)$$

что в точности совпадает с результатом (6.85). Здесь появляется эхо. Можно рассматривать этот процесс как такой, при котором смещение фаз (деструктивная интерференция) обращается вторым передатчиком в результате изменения направления фазовой истории частиц.

Наблюдается также эхо высшего порядка, и на фиг. 75, б показано эхо третьего порядка. Теория предсказывает, что пространственное эхо на частоте

$$\omega_3 = m\omega_2 - n\omega_1 \quad (m, n - \text{целые числа})$$

должно возникать на расстоянии  $l'$

$$\frac{l'}{l} = \frac{n\omega_1}{m\omega_2 - n\omega_1}. \quad (6.91)$$

Это расстояние измеряется от положения *второго* передатчика при условии, что

$$m\omega_2 > n\omega_1.$$

На фиг. 75 теоретические данные, полученные на основании (6.91), сравниваются с экспериментальными результатами.

В заключение отметим, что наблюдается также эхо на ионно-звуковых волнах (см. [287, 288]).

## Волны в магнитоактивной плазме

В этой главе рассматривается проблема распространения волн в магнитоактивной плазме с произвольно большой концентрацией заряженных частиц. Даже в относительно разреженной плазме, находящейся в магнитном поле, постоянная распространения различных волн может заметно отличаться от аналогичной величины для свободного пространства, особенно вблизи характеристических резонансов системы. Это приводит к существенному изменению спектра испускания, который обсуждался в гл. 6. Кроме эффектов, связанных с поперечными электромагнитными волнами, здесь изучаются также продольные плазменные волны.

## § 1. Волны в холодной плазме

В приближении холодной плазмы столкновения являются только источником затухания (и, следовательно, испускания) волн. Эффект столкновений будем описывать с помощью частоты столкновений  $\nu$ . Если предположить, что частота столкновений не зависит от скорости частицы, то ее можно просто ввести в силу трения, входящую в уравнение движения (ср. § 4 гл. 4). Это приводит к тому, что формулы (1.25) и (1.26) для элементов тензора диэлектрического коэффициента  $\mathbf{K}$  теперь принимают вид <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned}
 K_{zz} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\nu)}, \\
 K_{xx} \pm jK_{xy} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_b - j\nu)}, \\
 K_{xx} &= K_{yy}, \quad K_{xy} = -K_{yx}.
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Остальные элементы тензора равны нулю. При выводе (7.1) предполагалось, что только один сорт частиц (электроны) дает вклад в диэлектрический коэффициент  $K$ . Когда частота столкновений  $\nu$  зависит от скорости электрона, в правых частях формул (7.1) нужно провести соответствующее усреднение по ансамблю электро-

<sup>1)</sup> Частота  $\omega_b$ , по определению, положительна для электронов.



нов с определенным распределением их по скоростям (см. работу [293], а также § 3 гл. 3).

Подставив (7.1) в уравнение (1.36), находим дисперсионное соотношение. В общем случае для данного направления распространения и для данных параметров плазмы получаются две волны. Если рассмотреть для простоты только волны, распространяющиеся вдоль ( $\theta = 0$ ) и перпендикулярно ( $\theta = \pi/2$ ) направлению магнитного поля, то выражения для комплексных постоянных распространения будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} k_l^2 \\ k_r^2 \end{aligned} \right\} = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 (K_{xx} \pm jK_{xy}) \quad \text{для } \theta = 0, \\ \left. \begin{aligned} k_0^2 \\ k_x^2 \end{aligned} \right\} = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \left( K_{zz} \right. \\ \left. K_{yy} + \frac{K_{xy}^2}{K_{xx}} \right) \quad \text{для } \theta = \frac{\pi}{2}, \quad (7.2)$$

где индексы  $l$  и  $r$  означают лево- и правостороннюю поляризацию волн, а индексы  $\theta$  и  $x$  — обыкновенную и необыкновенную волну соответственно.

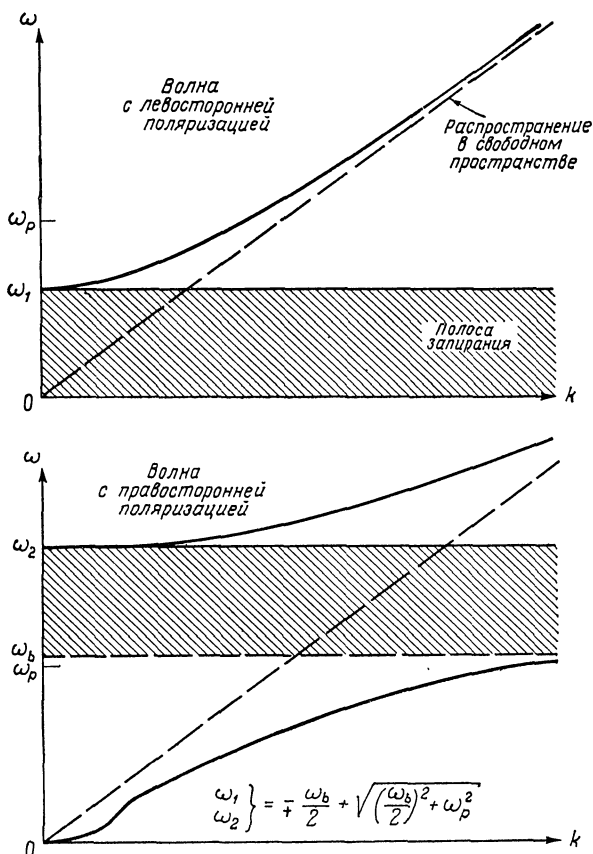
На фиг. 76а и 76б схематически показаны дисперсионные характеристики волн. В отсутствие столкновений волна не может распространяться в областях, отмеченных на диаграммах штриховкой, и плазма ведет себя как фильтр с полосами запираения и пропускания. Крайя полос характеризуются вполне определенными частотами (указанными на фигурах), при которых может иметь место следующее: либо при частотах  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_p$  постоянная распространения волн стремится к нулю, и эти области дисперсионной диаграммы соответствуют *отсечке*, либо частоты  $\omega_b$  и  $\omega_3$  связаны с волнами, постоянная распространения которых стремится к бесконечности, и эти области называются *резонансными*. С физической точки зрения поведение волн при отсечке и резонансе совершенно различное. Допустим, что плотность плазмы или магнитное поле является медленно меняющейся функцией координаты  $x$ . По мере распространения волны волновой вектор  $k(x)$  может принять нулевое значение. Решение волнового уравнения показывает, что входящая волна почти полностью отражается в точке, где  $k^2(x) \approx 0$ . Если же волна достигает области, в которой  $k^2(x) \rightarrow \infty$ , то она сильно поглощается (см. работы [294—296]).

Выражение для показателя преломления

$$n = \frac{c}{\omega} \operatorname{Re} k$$

и выражение для коэффициента поглощения

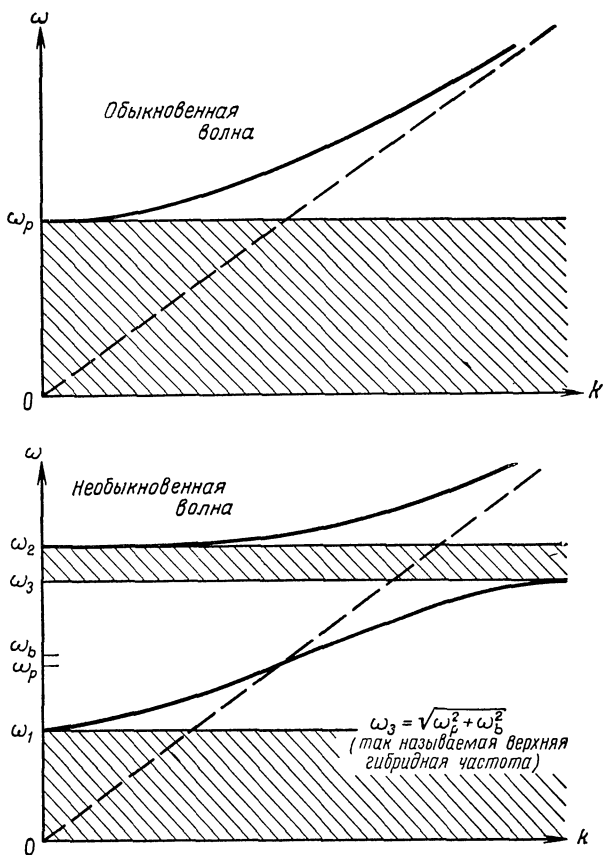
$$\alpha_\omega = -2 \operatorname{Im} k$$



Фиг. 76а. Дисперсионные характеристики волн в холодной плазме без учета движения ионов.

Если столкновения отсутствуют, то в заштрихованных областях распространение запрещено. На этой и на следующей фигуре представлены частотные характеристики тех волн, «поверхности фазовых скоростей» которых изображены на фиг. 11. Однако здесь мы ограничились только распространением вдоль  $V_0$ .

можно получить для различных волн из (7.2). На фиг. 77а показана зависимость показателя преломления  $n$  от магнитного поля для волн с лево- и правосторонней поляризацией при фиксированных значениях  $v/\omega$  и  $\omega_p/\omega$ . В резонансной точке обнаруживаются типичные дисперсионные характеристики волны с правосторонней поляризацией. На фиг. 77б показана зависимость коэффициента поглощения  $\alpha_\omega$  от  $\omega_b/\omega$ . При низких плотностях электронов линия поглощения почти симметрична и имеет лоренцеву форму. По мере увеличения отношения  $\omega_p/\omega$  линия становится несимметричной в области малых значений магнитного поля (т. е. больших частот);

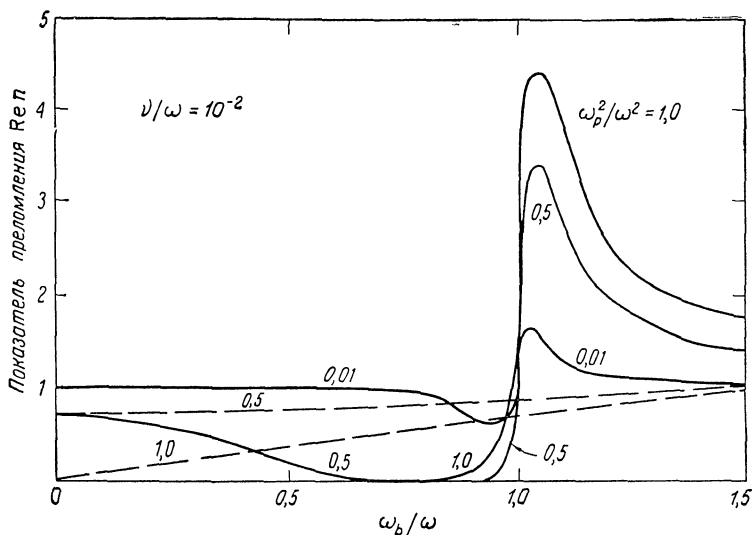


Фиг. 76б. Дисперсионные характеристики волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю.

когда частота  $\omega_p$  превышает  $\omega$ , среда сильно поглощает во всем диапазоне частот  $\omega_b \leq \omega$ . При магнитных полях, соответствующих  $\omega_b \geq \omega$ , поглощение резко уменьшается; это и есть область полосы пропускания, показанной на фиг. 76а. Поскольку волна с левосторонней поляризацией не имеет резонанса около электронной циклотронной частоты, ее коэффициент поглощения мал по сравнению с коэффициентом поглощения волны с правосторонней поляризацией.

Спектр коэффициента испускания  $j_\omega$  аналогичен приведенному на фиг. 77б, за исключением изменений, связанных с показателем преломления, входящим в формулу для  $j_\omega$ :

$$j_\omega = n_r^2 \frac{\omega^2}{8\pi^3 c^2} (\chi T) \alpha_\omega. \quad (7.3)$$



Фиг. 77а. Зависимость действительной части показателя преломления от магнитного поля при распространении вдоль магнитного поля (из работы Хилда и Уортона [98]).

Сплошные кривые — для волны с правосторонней поляризацией; пунктирные кривые — для волны с левосторонней поляризацией.

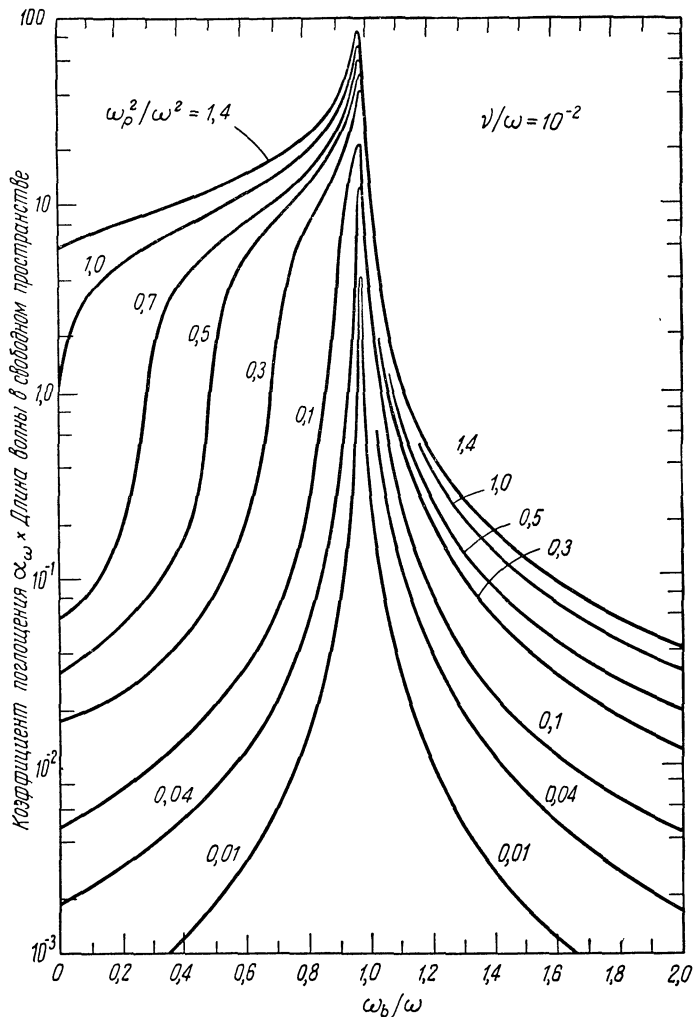
Выведенный таким образом коэффициент испускания  $j_\omega$  при  $\omega_p/\omega \rightarrow 0$  стремится к коэффициенту испускания от отдельной частицы в вакууме, уже полученному в гл. 6, см. (6.27). Отметим, что в приближении холодной плазмы испускание на гармониках  $\omega_b$  не возникает.

С помощью коэффициента поглощения  $\alpha_\omega$  можно предсказать спектр интенсивности излучения, выходящего под прямыми углами из однородного слоя плазмы толщиной  $L$ , находящегося в магнитном поле, направленном под прямым углом к слою; в этом случае интенсивность излучения определяется формулой

$$I_\omega = B_0(\omega, T) [1 - \exp(-\alpha_\omega L)].$$

В центре линии и вблизи от него оптическая толщина становится большой, и интенсивность  $I_\omega$  приближается к интенсивности черного тела. Спектр интенсивности излучения показан на фиг. 78 в виде зависимости  $I_\omega$  от магнитного поля. При расчете не учитывались отражения на границе плазма — вакуум.

Необходимо заметить, что вычисленное испускание является полной суммой циклотронного излучения и той части тормозного излучения, которая связана (в данном случае) с волной с правосторонней поляризацией. Вообще не представляется возможным



Фиг. 776. Зависимость коэффициента поглощения  $\alpha_\omega = -2 \text{Im}k$  для излучения с правосторонней поляризацией от  $\omega_b/\omega$  (из работ Хиршфилда и Брауна [289]).

разделить интенсивность излучения  $I_\omega$  на отдельные части, соответствующие различным механизмам испускания [см. рассуждения ниже формулы (6.24)].

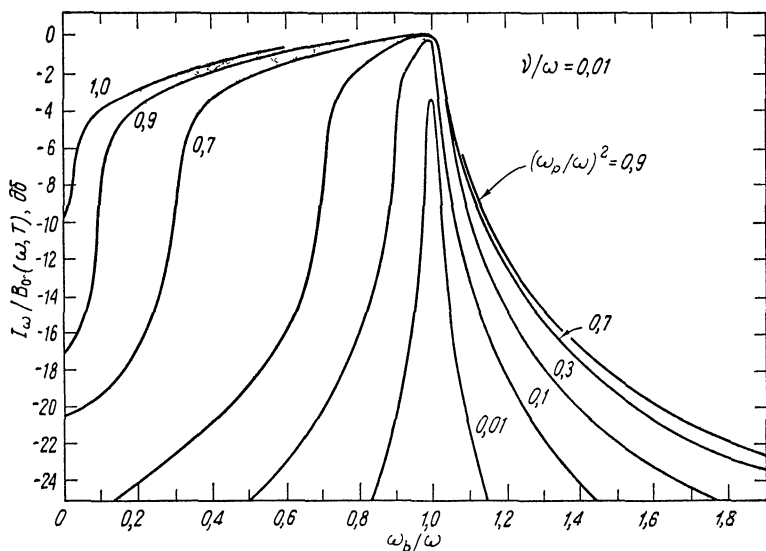
Электрический вектор необыкновенной волны в течение части периода совпадает по направлению с волновым вектором, что приводит к продольным колебаниям. Резонансная частота необыкновенной волны является поэтому функцией плотности плазмы. При

низких частотах столкновений резонанс возникает на так называемой верхней гибридной частоте:

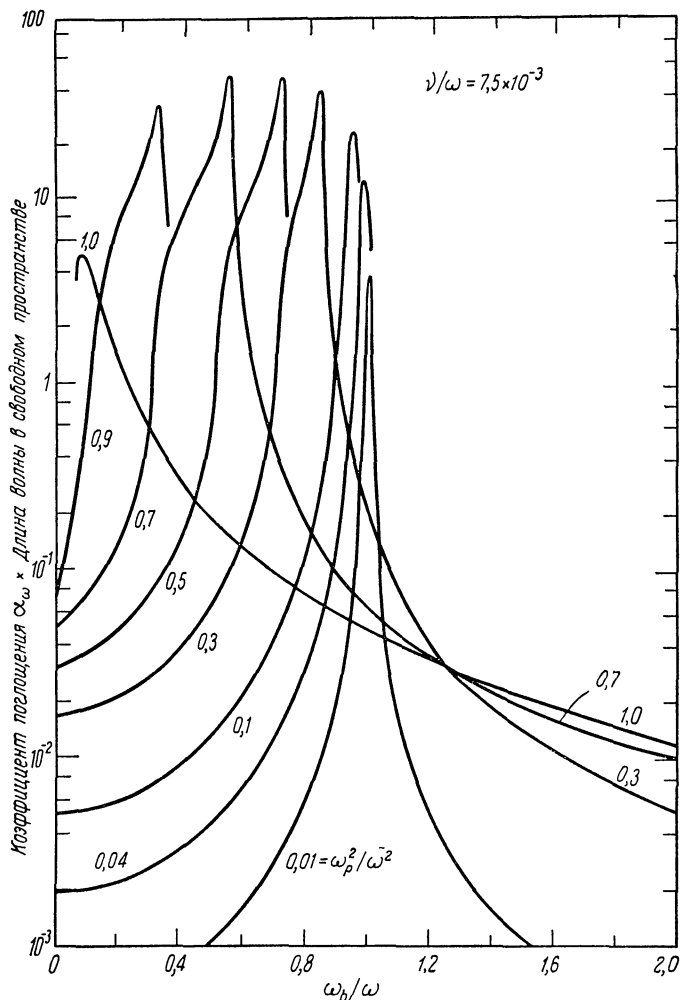
$$\omega^2 = \omega_p^2 + \omega_b^2 \quad \text{для} \quad \frac{\nu}{\omega} \ll 1; \quad (7.4)$$

на фиг. 76б она обозначена  $\omega_3$ . Свойства необыкновенной волны иллюстрируются на фиг. 79, где представлена зависимость коэффициента поглощения  $\alpha_\omega$  от  $\omega_b/\omega$ . На фиг. 80 показана соответствующая интенсивность испускания от слоя плазмы. Предполагается, что магнитное поле направлено вдоль плоской границы раздела, и рассматривается испускание под прямым углом к ней.

Измеряя испускание или поглощение необыкновенной волны, можно ясно увидеть смещение резонанса с увеличением плотности электронов [297]. На фиг. 81а представлен спектр поглощения, полученный Буксбаумом [297] от положительного столба разряда в гелии на постоянном токе. Частота сигнала составляла 5000 Мгц. Цилиндрический столб плазмы диаметром 1 см располагался вдоль оси цилиндрического микроволнового резонатора, в котором возбуждалась мода  $TE_{011}$ , соответствующая волнам, распространяющимся по направлению к оси цилиндра и от нее (см. работу [298]). Магнитное поле было параллельно оси плазменного столба. Поскольку плотность меняется по радиусу, то в соответствии



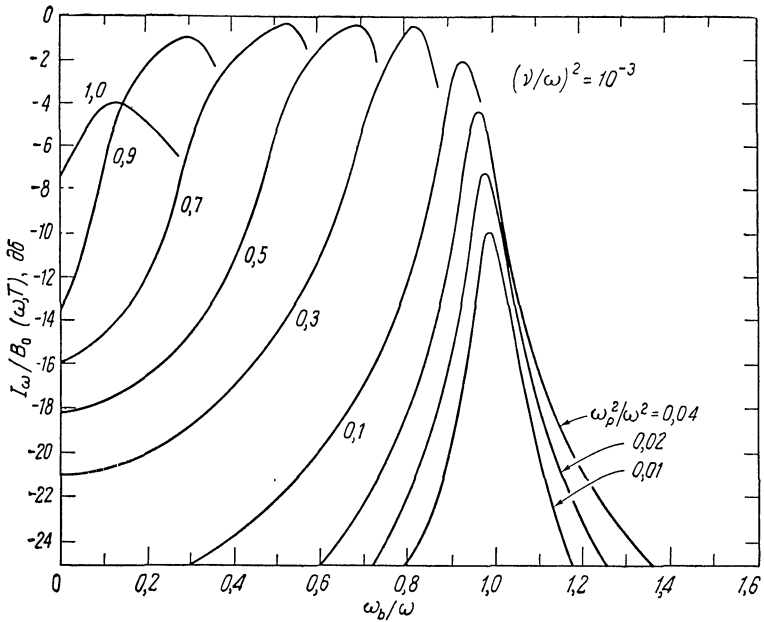
Фиг. 78. Интенсивность излучения с правосторонней поляризацией волны от слоя плазмы толщиной  $L = c/\sqrt{2} \omega$  (из работы Хиршфилда и Брауна [289]). Сравните приведенные здесь формы линий с показанными на фиг. 64.



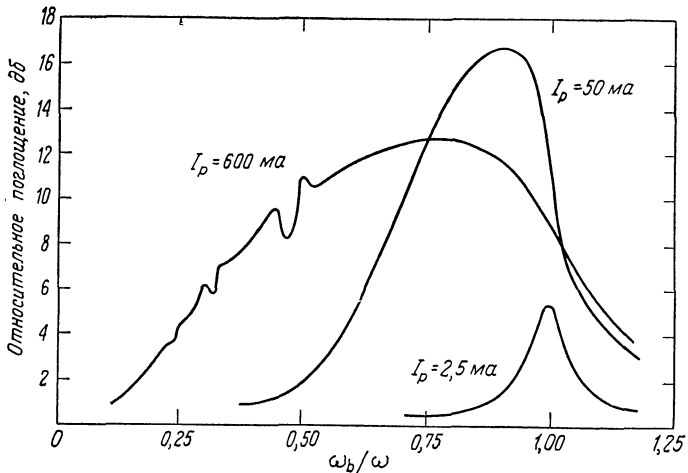
Фиг. 79. Зависимость коэффициента поглощения для необыкновенной волны, распространяющейся под прямыми углами к магнитному полю, от  $\omega_b/\omega$  (из работы Хиршфилда и Брауна [289]).

с формулой (7.4) различные кольцеобразные слои плазмы резонируют при разных значениях магнитного поля. Это вызывает размытие острых резонансов, предсказанных теорией для однородной плазмы (фиг. 79).

На фиг. 79 видно, что при малых магнитных полях поглощение начинается довольно резко. Значение  $\omega_b$  в точке начала поглощения соответствует максимальной величине  $\omega_p(r)$  в столбе. Обычно



Фиг. 80. Спектр испускания необыкновенной волны от слоя толщиной  $L = c/\sqrt{2} \omega$  (из работы Хиршфилда и Брауна [289]).



Фиг. 81а. Зависимость поглощения необыкновенной волны цилиндрическим столбом плазмы от  $\omega_b/\omega$  (из работы Бекефи, Кокколи и др. [297]).

Магнитное поле направлено вдоль оси столба. Частота  $\omega$  поддерживается постоянной, а магнитное поле меняется. Газ — гелий при давлении 0,5 торр,  $I_p$  — ток разряда. (Небольшие «пики» на кривой  $I_p = 600$  ма обсуждаются в § 5 настоящей главы.)



плотность электронов максимальна в центре при  $r = 0$  и монотонно падает по мере приближения к стеклянной оболочке. Поэтому определение частоты  $\omega_b$  (мин), при которой начинается поглощение, позволяет сделать заключение о плотности электронов в центре столба.

Волны, испускаемые на резонансной частоте

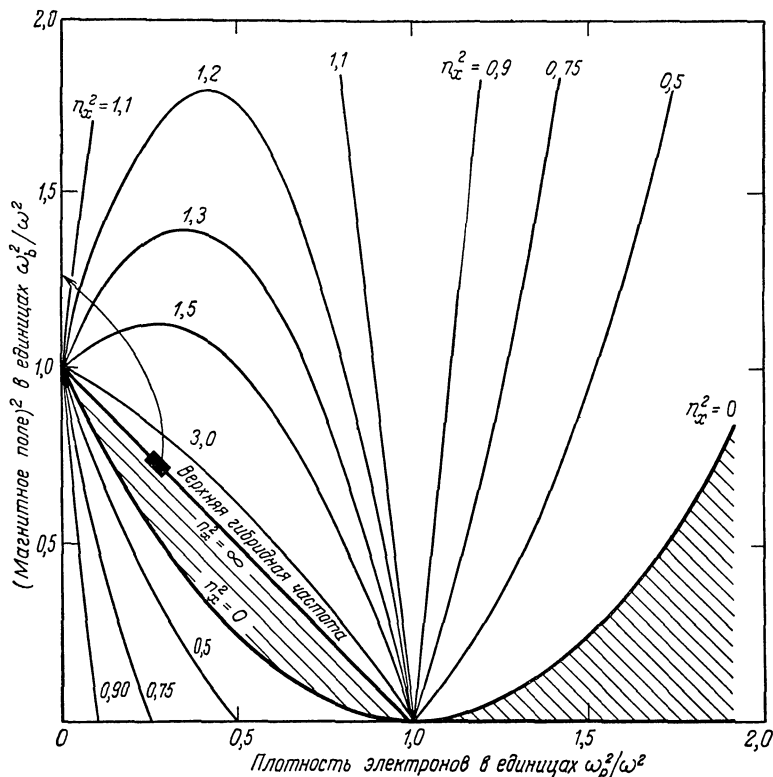
$$\omega^2 = \omega_p^2(r) + \omega_b^2,$$

вследствие радиального падения плотности должны встретить при своем распространении наружу полосу запираания  $\omega_3 < \omega < \omega_2$  (фиг. 76б), так что область резонансного испускания делается недоступной для наблюдения. Однако сильное излучение и поглощение, наблюдаемые в этих экспериментах, обуславливаются частично довольно высокой частотой столкновений, в результате чего становится возможным некоторое распространение сквозь полосу запираания, а частично «туннельным» прохождением волны через запрещенную область [294] даже в отсутствие столкновений. Можно ожидать, что это «туннельное» прохождение тем эффективнее, чем больше длина волны в свободном пространстве по сравнению с размером неоднородности плотности электронов. В вышеуказанных экспериментах длина волны в свободном пространстве в несколько раз превышала диаметр плазменного столба.

В работе [299] изучалось влияние полосы запираания на микроволновое излучение в диапазоне коротких длин волн (см. также работы [300, 301]). На Q-машине Q-3 наблюдалось излучение на частоте 35 000 Мгц (длина волны  $\sim 0,8$  см) от столба плазмы диаметром 3 см. В этой установке создается полностью ионизованная термическая плазма в парах цезия [302]. Обнаружено, что излучение в центре линии примерно в 4 раза меньше предсказанного теоретически по закону Планка при известной температуре электронов. Интенсивность принимает предсказанное значение при устранении области «недоступности». Последнее осуществляется путем наложения достаточно неоднородного магнитного поля, возрастающего по направлению к наблюдателю [296].

На фиг. 81б приведено семейство кривых, представляющих собой геометрические места постоянных значений показателя преломления  $n_x^2$  для необыкновенной волны, распространяющейся поперек  $\mathbf{V}_0$ ; из этих кривых видно, каким образом неоднородное магнитное поле делает доступным излучение вблизи верхней гибридной частоты. Когда  $|\mathbf{V}_0| = \text{const}$ , излучение встречается с полосой запираания, которая показана в виде заштрихованной области. Однако если  $|\mathbf{V}_0|$  возрастает достаточно быстро, то излучение может распространяться вдоль направления, указанного стрелкой.

Теперь целесообразно вкратце обсудить черенковское излучение. Мы увидим, что при возбуждении плазмы нерелятивистскими



Фиг. 816. Геометрическое место точек квадрата показателя преломления для необыкновенной волны, распространяющейся под прямыми углами к магнитному полю.

Движением ионов и столкновениями пренебрегается. В заштрихованных областях распространение запрещено (ср. фиг. 10).

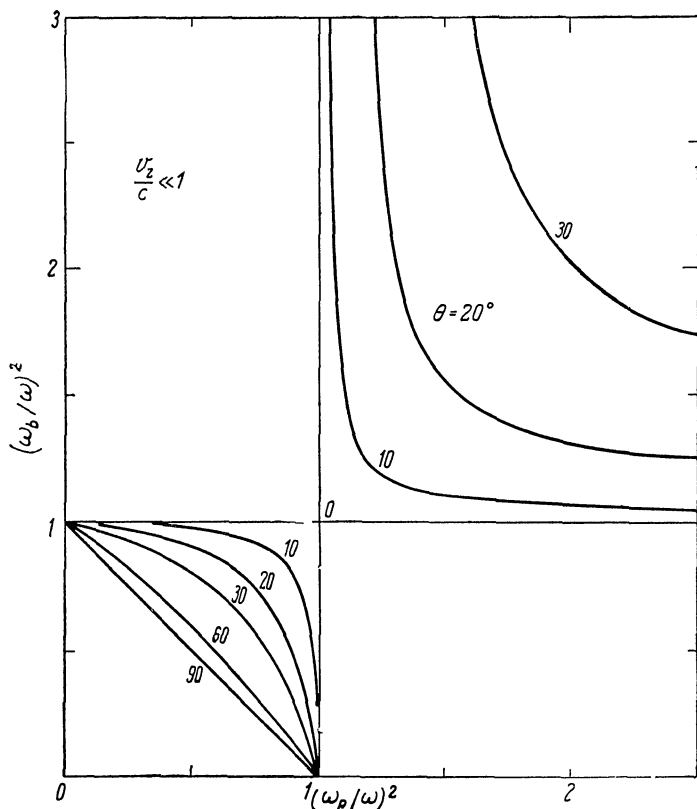
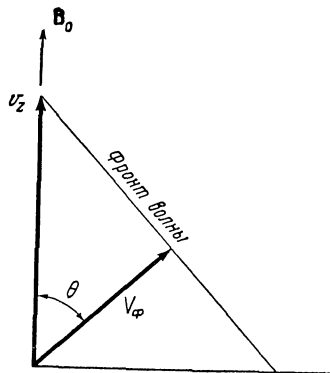
электронами оно имеет близкое сходство с циклотронным излучением.

**Черенковское излучение.** Рассмотрим электрон, равномерно движущийся со скоростью  $v_z$  по направлению внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ . Он испускает черенковское излучение, если удовлетворяется условие когерентности [156]

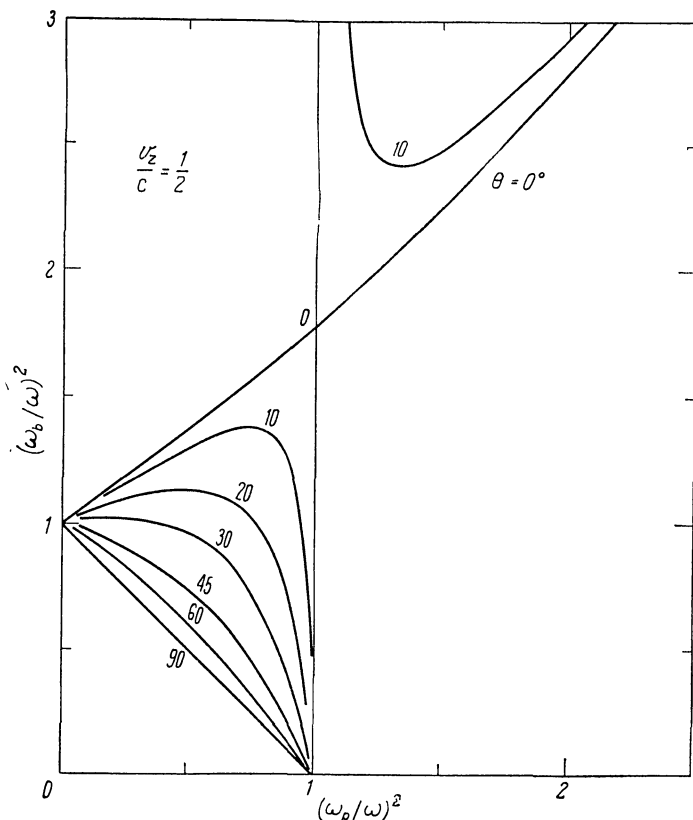
$$v_z \cos \theta = V_\phi = \frac{\omega}{k}. \quad (7.5)$$

Здесь  $\theta$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и направлением движения электрона, а  $V_\phi$  — фазовая скорость волны в среде (фиг. 82), причем  $V_\phi = k(\omega/k^2)$ .

Фиг. 82. Фронт волны черенковского излучения, возбуждаемого электроном, движущимся со скоростью  $v_z$  в направлении поля  $\mathbf{B}_0$ .



Фиг. 83а. Угол черенковского излучения  $\theta$  нерелятивистского электрона для различных параметров плазмы (из работы Хилда и Уортона [98] и Элиса, Буксбаума и Берса [3]).



Ф и г. 836. Угол черенковского излучения  $\theta$  умеренно релятивистского электрона (из работы Хилда и Уортона [98]).

В магнитоактивной плазме возможно испускание практически поперечных электромагнитных черенковских волн, поскольку для определенных мод и в определенном диапазоне параметров плазмы  $V_\Phi$  меньше скорости света  $c$  и можно удовлетворить условию (7.5). Для получения спектра черенковского излучения нужно решить (7.5) совместно с дисперсионным уравнением  $g(k, \omega, \theta) = 0$  для волн в среде. Такие расчеты проведены Коломенским [303] и Эйдманом [304] и в более поздних работах [305—308]. Авторы последних четырех работ интересовались, в первую очередь, черенковским механизмом как возможным источником низкочастотного излучения (от нескольких герц до  $\sim 30$  кгц), которое вызывается солнечными частицами, проходящими ионизованные области земной экзосферы.

Для нерелятивистского электрона,  $v_z/c \rightarrow 0$ , согласно условию (7.5), требуется, чтобы  $k(\theta) \rightarrow \infty$ . Это требование, налагаемое на  $k$ , является как раз требованием для возникновения резонанса, который обсуждался ранее в данном параграфе. Из дисперсионного соотношения легко найти, что резонансное условие для произвольного угла  $\theta$  имеет вид

$$\omega_p^2 \omega_b^2 \sin^2 \theta_{\text{рез}} = (\omega_p^2 - \omega^2)(\omega_b^2 - \omega^2), \quad (7.6)$$

где угол  $\theta_{\text{рез}}$  является также углом, под которым возникает черенковское излучение. На фиг. 83а приведены кривые зависимости  $(\omega_b/\omega)^2$  от  $(\omega_p/\omega)^2$  для различных черенковских углов.

Таким образом, видно, что в плазме с нерелятивистскими электронами черенковское излучение неотлично от циклотронного. Однако когда скорость  $v_z$  электрона становится сравнимой со скоростью света, черенковский угол существенно отклоняется от  $\theta_{\text{рез}}$ . Это проиллюстрировано на фиг. 83б для случая  $v_z/c = 1/2$ .

## § 2. Высокочастотная проводимость горячей бесстолкновительной плазмы

Учет того факта, что ларморовские орбиты вращающихся электронов конечны (т. е. электроны имеют конечную температуру), приводит к таким физическим явлениям, которые не возникают в теории холодной плазмы. Имеются два существенных эффекта. Когда длина волны колебания поперек магнитного поля порядка радиуса вращения, взаимодействие волны с плазмой носит резонансный характер не только вблизи циклотронной частоты, но также вблизи гармоник циклотронной частоты. Вторым проявлением конечной температуры является циклотронное затухание, механизм которого аналогичен затуханию Ландау продольных колебаний. Энергия отбирается от волны при резонансе между движением частицы и колебаниями ВЧ поля. Заряженные частицы, испытывающие колебания на частоте  $\omega^*$ , равной или кратной  $\omega_b$ , могут поглощать энергию волны. Поскольку частицы дрейфуют вдоль силовых линий магнитного поля, частота  $\omega^*$  отличается из-за доплеровского сдвига от частоты  $\omega$ , измеренной в лабораторной системе отсчета. Резонансное условие имеет вид

$$\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} = m \omega_b \quad (m = 1, 2, \dots),$$

где  $k_{\parallel}$  — компонента волнового вектора вдоль  $\mathbf{B}_0$ . Заметим, что резонансное условие удовлетворяется для электронов, движущихся вдоль  $\mathbf{B}_0$  со скоростью, равной модифицированной фазовой скорости  $(\omega - m \omega_b) k_{\parallel}$ . Такие электроны испытывают, в сущности, действие статического электрического поля, поэтому они ускоряются

на своих орбитах и движутся по скручивающимся или раскручивающимся спиральям вокруг магнитных силовых линий.

Излагаемый ниже метод вывода тензора диэлектрического коэффициента  $\mathbf{K}$  аналогичен описанному в § 5 гл. 4. Дополнительные математические трудности связаны с наличием статического магнитного поля. Отправной точкой является уравнение Власова. Поскольку задача для случая частиц с релятивистскими энергиями не представляет особого труда, рассмотрим ее, исходя из уравнения (1.11), причем столкновительный член положим равным нулю. Излагаемый метод аналогичен методу, предложенному Берсом [309].

Рассмотрим один сорт зарядов плазмы. Если предположить, что постоянное электрическое поле отсутствует, то линеаризируя уравнение (1.11), приходим к члену нулевого порядка,

$$\frac{e}{M} (\mathbf{p} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (7.7)$$

и к члену первого порядка

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{M} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{M} (\mathbf{p} \times \mathbf{B}_0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} + e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{B}}{M} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (7.8)$$

Здесь  $f(\mathbf{p})$  — функция невозмущенного распределения по импульсам,  $f_1(\mathbf{p}, t)$  — малое возмущение,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — ВЧ поля,  $\mathbf{B}_0$  — статическое магнитное поле,  $M$  — релятивистская масса:

$$M^2 = m_0^2 + \frac{p^2}{c^2} \equiv m_0^2 \gamma^2. \quad (7.9)$$

При выводе уравнения (7.7) подразумевалось, что функция  $f(\mathbf{p})$  является азимутально симметричной относительно  $\mathbf{B}_0$ . Пусть все ВЧ величины изменяются как  $\exp(j\omega t - j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ . Предположим, что волновой вектор лежит в плоскости  $xz$  декартовой системы координат и поле  $\mathbf{B}_0$  направлено вдоль оси  $z$  (см. фиг. 1); тогда можно записать

$$\mathbf{k} = \hat{\mathbf{x}}k_{\perp} + \hat{\mathbf{z}}k_{\parallel}, \quad (7.10)$$

где  $k_{\parallel}$  и  $k_{\perp}$  — компоненты волнового вектора вдоль и перпендикулярно  $\mathbf{B}_0$  соответственно. Используя те же индексы, запишем импульс частицы в виде

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{z}}p_{\parallel} + \hat{\mathbf{x}}p_{\perp} \cos \psi + \hat{\mathbf{y}}p_{\perp} \sin \psi. \quad (7.11)$$

Тогда из (7.8) находим

$$\frac{\partial f_1}{\partial \psi} + j \frac{\omega}{\omega_0} \left( 1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{\omega M} \right) f_1 = - \frac{e}{\omega_0} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \left( \mathbf{E} + \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E}}{\omega M} \right), \quad (7.12)$$

где  $\omega_0 = -eV_0/M$  — циклотронная частота по определению положительная для электронов и отрицательная для ионов. Последние два члена в уравнении (7.12) появились в связи с тем, что мы исключили  $\mathbf{V}$  из (7.8) при помощи уравнения Максвелла  $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{V}$ , а затем раскрыли произведение  $\mathbf{p} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E})$ .

Различные произведения векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}$ , возникающие в (7.12), вычисляются с помощью (7.10) и (7.11). Это приводит к однородному линейному уравнению первого порядка для  $f_1$  вида

$$\frac{\partial f_1}{\partial \psi} + P(\psi) f_1 = Q(\psi).$$

Вычисления очень длинные, и здесь мы их не проводим. Интегрируя по  $\psi$ , получаем ряд интегралов, выражающихся через функции Бесселя. Соответствующие соотношения приведены в книге [187]. Когда функция  $f_1$  найдена, плотность ВЧ тока можно получить из формулы (1.9). Тензор проводимости  $\sigma$ , связанный с  $\mathbf{K}$  соотношением

$$\mathbf{K} = \mathbf{1} + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon_0}, \quad (7.13)$$

имеет вид

$$\sigma = j\omega\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \int_0^\infty 2\pi p_\perp dp_\perp \int_{-\infty}^\infty dp_\parallel \sum_{m=-\infty}^\infty \frac{\gamma^{-1} \mathbf{S}}{\omega - k_\parallel v_\parallel - m\omega_0}, \quad (7.14)^1$$

где

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} v_\perp U \left(\frac{mJ_m}{x}\right)^2 & jv_\perp U \frac{mJ_m J'_m}{x} & v_\perp W \frac{mJ_m^2}{x} \\ -jv_\perp U \frac{mJ_m J'_m}{x} & v_\perp U [J'_m]^2 & -jv_\perp W J_m J'_m \\ v_\parallel U \frac{mJ_m^2}{x} & jv_\parallel U J_m J'_m & v_\parallel W J_m^2 \end{vmatrix}. \quad (7.15)$$

Параметр  $x$  определяется выражением

$$x = \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_0}; \quad (7.16)$$

он равен (с точностью до коэффициента  $2\pi$ ) отношению ларморовского радиуса электрона к длине волны колебания. Параметр  $x$  является аргументом функций Бесселя в (7.15). Отметим, что этот

<sup>1)</sup> В (7.14)

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m_0\epsilon_0},$$

где  $m_0$  — масса покоя. Множитель  $\gamma_r^{-1}$  учитывает влияние на плазменную частоту релятивистского изменения массы.

аргумент формально тот же самый, что и входящий в функции Бесселя, используемые в § 1 гл. 6 (также обозначенный через  $x$ ): оба они совпадают в пределе  $k_{\perp} \rightarrow (\omega/c) \sin \theta$ .

Функции  $U$  и  $W$  имеют вид

$$U = M\omega \frac{\partial f(p_{\parallel}, p_{\perp})}{\partial p_{\perp}} + k_{\parallel} \left( \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} p_{\perp} - \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} p_{\parallel} \right), \quad (7.17)$$

$$W = M\omega \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} - Mm \frac{\omega_0}{p_{\perp}} \left( \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} p_{\perp} - \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} p_{\parallel} \right).$$

Функция распределения  $f$  нормирована таким образом, что

$$\int f d^3p = 1.$$

Когда функция  $f$  изотропна, в (7.17) остается только первый член; в этом случае  $p_{\parallel} U = p_{\perp} W$ . Когда проводимость плазмы определяется несколькими сортами зарядов, правая часть (7.14) становится суммой членов, аналогичных написанному.

Дисперсионные характеристики различных мод распространения в горячей магнитоплазме можно получить, подставляя соотношения (7.13) и (7.14) в уравнение (1.36). Довольно очевидно, что числовые расчеты обычно весьма трудоемки и во многих случаях нужно использовать вычислительную технику. Различные аспекты этой проблемы подробно рассматриваются во многих работах, как, например, [4, 62, 187, 273, 310—317]. В работах [314, 317] проведен анализ с учетом столкновений. В последующих параграфах обсуждается несколько частных случаев.

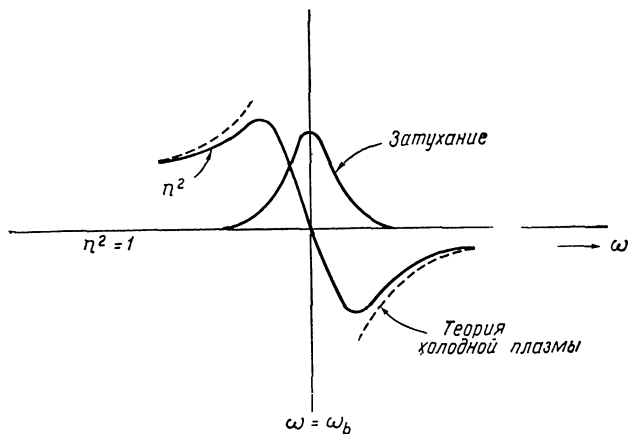
### § 3. Поперечные электромагнитные волны

В этом параграфе качественно рассматриваются быстрые, практически поперечные электромагнитные волны в теплой, но нерелятивистской плазме.

Для волн, распространяющихся вдоль направления магнитного поля ( $k_{\perp} = 0$ ), детерминантное уравнение (1.36) дает три независимых решения [при этом используются соотношения (7.13) и (7.14)]. Если пренебречь релятивистскими эффектами, то одно решение, определяемое соотношением  $K_{zz} = 0$ , отвечает продольным плазменным колебаниям, описанным в § 5 гл. 4. Два других решения соответствуют волнам с лево- и правосторонней поляризациями. Единственное существенное отклонение от дисперсионных соотношений для холодной плазмы возникает для волны с правосторонней поляризацией на частотах вблизи  $\omega_b$  [313—315, 317]:

$$\left. \begin{matrix} k_l^2 \\ k_r^2 \end{matrix} \right\} = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega (\omega \pm \omega_b)} \right]. \quad (7.18)$$





Фиг. 84. Схематическое изображение дисперсионных характеристик волны с правосторонней поляризацией в теплой плазме вблизи электронной циклотронной частоты (из работы Прадхана [315]).

В работе [315] показано, что при малой, но конечной электронной температуре квадрат показателя преломления  $n^2$  при  $\omega = \omega_b$  проходит через единицу, в то время как соотношение (7.18) предсказывает в этом случае для  $n^2$  бесконечное значение. Кроме того, волна обнаруживает циклотронное затухание, максимум которого имеет место при частоте  $\omega = \omega_b$ . На фиг. 84 приведены дисперсионные характеристики. Выражение для коэффициента поглощения имеет вид

$$\alpha_\omega \approx \frac{1}{n^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_p^2}{\omega c} \mu^{1/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\omega - \omega_b}{n\omega} \right)^2 \mu \right], \quad (7.19)$$

где  $\mu = m_0 c^2 / (\kappa T)$  и  $n$  — показатель преломления, который можно вывести из выражения

$$n^2 \approx 1 - (2\mu)^{1/2} \frac{\omega_p^2}{n\omega^2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \mu \left( \frac{\omega - \omega_b}{n\omega} \right)^2 \right] \times \\ \times \left\{ \left( \frac{\mu}{2} \right)^{1/2} \left( \frac{\omega - \omega_b}{n\omega} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{\mu}{2} \right)^{3/2} \left( \frac{\omega - \omega_b}{n\omega} \right)^3 + \dots \right\}.$$

Эти волны не имеют резонанса на гармониках  $\omega_b$ , что согласуется с одночастичными расчетами, проведенными в гл. 6. Для возникновения резонанса волновой вектор должен иметь компоненту в плоскости электронной орбиты, поскольку только тогда фаза волны меняется поперек орбиты. Иначе говоря, наблюдатель, принимающий излучение, видит волны, фаза которых модулирована

из-за того, что электрон попеременно то приближается, то удаляется от него. Такая модуляция фазы приводит к возникновению гармоник.

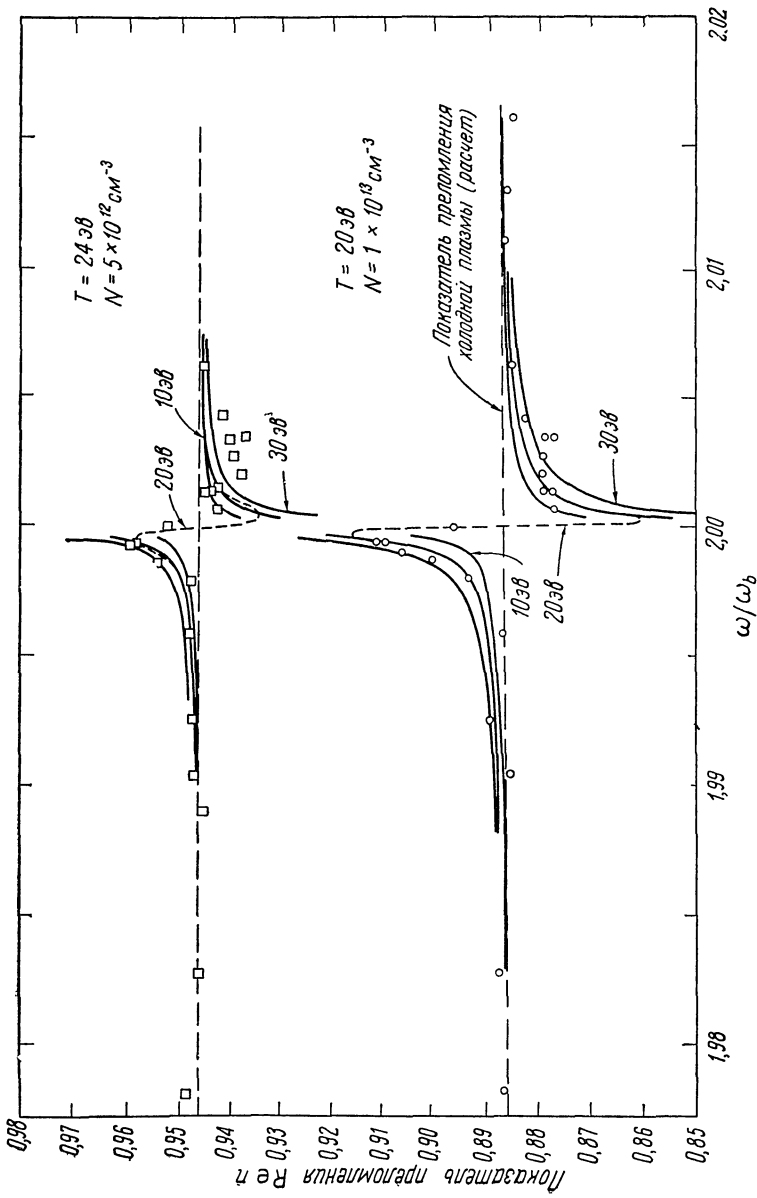
Распространение обыкновенной волны под прямыми углами к магнитному полю ( $k_{\parallel} = 0$ ) для случая теплой плазмы практически не отличается от распространения для случая холодной плазмы, см. (7.2); первому случаю соответствует особое решение дисперсионного уравнения для теплой плазмы. Необыкновенная волна, будучи частично продольной, связана с продольной плазменной волной, которая частично поперечная.

У необыкновенной волны обнаруживается гармоническая структура. Интенсивность последовательных гармоник уменьшается приблизительно в  $m_0 c^2 / (\kappa T)$  раз в полном соответствии с тем, что было найдено при одночастичных расчетах в § 2 гл. 6. Однако, в отличие от тех расчетов, теперь действительная часть  $k_{\perp}$  обнаруживает характерную резонансную дисперсию<sup>1)</sup> Это было предметом подробного экспериментального исследования в работах [318, 319]. Было обнаружено хорошее согласие с теорией теплой плазмы. Эксперимент проводился на плазме с высокой степенью ионизации, образованной в установке стелларатор-С. Плотность электронов была порядка  $10^{12} - 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , а их температура — между 5 и 25 эв. Измерялись показатель преломления и поглощение монохроматической волны ( $\lambda = 0,4 \text{ см}$ ). Результаты приведены на фиг. 85а и 85б. Видно, какими узкими являются резонансы. Когда угол распространения приближается к  $(\pi/2)$  ( $\cos \theta \rightarrow 0$ ), теория предсказывает, что

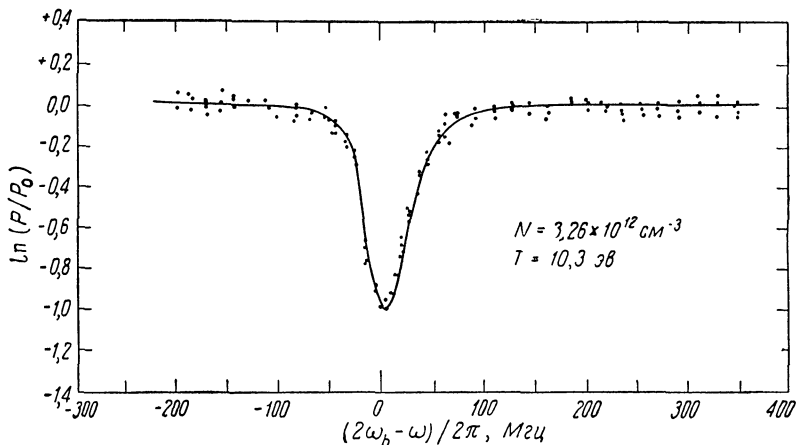
$$\ln \frac{P}{P_0} \sim \delta(\omega - 2\omega_0). \quad (7.20)$$

Наблюдаемая конечная ширина линии (фиг. 85б) частично обусловлена угловым расхождением пучка микроволн и частично — малой пространственной неоднородностью магнитного поля. Гармоники выше второй не наблюдались из-за малой величины  $\kappa T / (m_0 c^2)$ . Достопримечательно, что несмотря на обширные теоретические исследования, проведенные за последние десять лет, только этот эксперимент непосредственно подтверждает применимость теории теплой плазмы к поперечным волнам.

<sup>1)</sup> В одночастичных расчетах, проведенных в гл. 6, в действительности обнаруживается резонансная дисперсия, но это не является самоочевидным при примененном методе расчета. Возникновение резонансной дисперсии есть прямое следствие соотношений Крамера — Кронига (см. работу [5]), которые являются интегральными соотношениями между действительной и мнимой частями диэлектрического коэффициента для среды. Тогда, если известен коэффициент поглощения  $\alpha_{\omega} = -2\text{Im} k$  как функция частоты, можно найти показатель преломления  $n = (c/\omega)\text{Re} k$  (применительно к излучению на циклотронных гармониках см. работу [291]).



Фиг. 85а. Измеренные и рассчитанные дисперсионные характеристики необыкновенной волны, распространяющейся под прямыми углами к магнитному полю в теплой плазме (из работы Мессервея и Шлезингера [318]).  
 $\omega \approx 2\omega_b$ .



Фиг. 856. Поглощение необыкновенной волны вблизи второй гармоники электронной циклотронной частоты для волн, распространяющихся под прямыми углами к магнитному полю (из работы Арунасалама, Гурни, Месервея и Давидсона [319]).

$P/P_0$  — отношение микроволновой мощности, проходящей через плазму, к падающей мощности.

Когда отношение  $\omega^2/\omega_p^2 \gg 1$ , выражение для коэффициента поглощения (или испускания), полученное для необыкновенной волны, сводится к выражению, приведенному в § 4 гл. 6. Это было показано в работах [48, 273].

#### § 4. Диэлектрический коэффициент для продольных волн в магнитном поле

В § 5 гл. 4 был получен диэлектрический коэффициент  $K_L$  для продольных волн, распространяющихся в изотропной плазме. Диэлектрический коэффициент для продольных волн в магнитном поле, определяемый [см. (1.28)] выражением

$$K_L(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{k}}{k^2} = \frac{k_{\perp}^2 K_{xx} + 2k_{\perp} k_{\parallel} K_{xz} + k_{\parallel}^2 K_{zz}}{k^2}, \quad (7.21)$$

можно получить, используя соотношения (7.13) и (7.14). Пренебрегая релятивистскими эффектами (т. е. устремляя в соответствующих местах скорость света  $c$  к бесконечности), находим

$$K_L(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{|k|^2} \iint 2\pi dv_{\parallel} dv_{\perp} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m^2(k_{\perp} v_{\perp} / \omega_b)}{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel} - m\omega_b} \times \\ \times \left( k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial f}{\partial v_{\parallel}} + m\omega_b \frac{\partial f}{\partial v_{\perp}} \right). \quad (7.22)$$

Этот результат был получен Харрисом [320, 321], который вывел его более прямым путем при помощи уравнения Пуассона и нерелятивистского уравнения Власова.

Решение дисперсионного уравнения  $K_L = 0$  исследовалось многими авторами для различных функций распределения с учетом и без учета движения ионов, главным образом, с целью определения неустойчивости на этих волнах [320—327].

Мы рассмотрим два случая, в которых имеет место устойчивость по отношению к нарастающим волнам.

1. *Распределение, выражающееся с помощью функции распределения типа  $\delta$ -функций.*

Возьмем функцию распределения электронов в виде

$$f(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \frac{1}{2\pi v_{0\perp}} \delta(v_{\perp} - v_{0\perp}) \delta(v_{\parallel} - v_{0\parallel}); \quad (7.23)$$

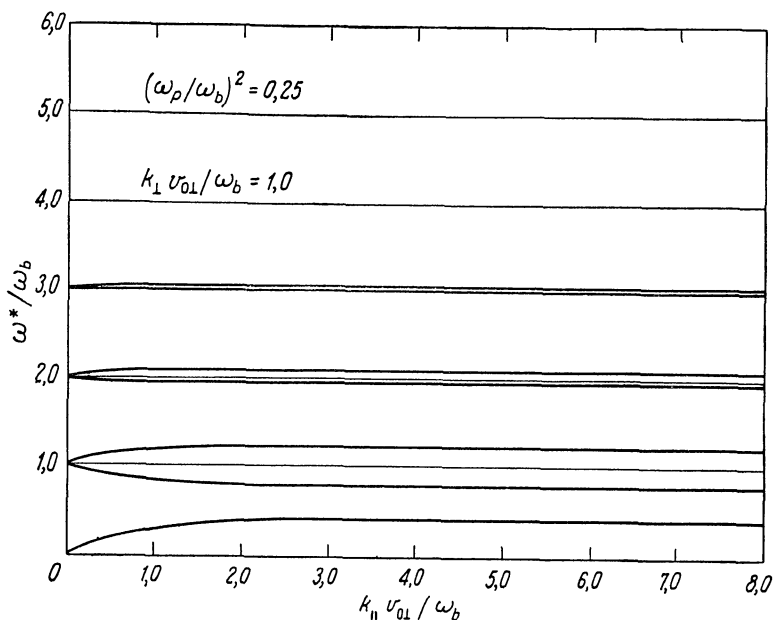
она представляет своего рода идеализированный электронный пучок бесконечного поперечного сечения, дрейфующий со скоростью  $v_{0\parallel}$  вдоль  $\mathbf{B}_0$ ; поперечная скорость каждого электрона равна  $v_{0\perp}$ . Для этой функции распределения выражение (7.22) принимает вид

$$K_L(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \sum_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{k_{\parallel}^2 J_m^2}{(\omega^* - m\omega_b)^2} + \frac{k_{\perp}^2 (J_{m-1}^2 - J_{m+1}^2)}{2\omega_b (\omega^* - m\omega_b)} \right], \quad (7.24)$$

где  $\omega^* = \omega - k_{\parallel} v_{0\parallel}$  — частота, сдвинутая за счет эффекта Доплера. Поскольку распределение по скоростям не имеет разброса по энергиям, при любых значениях  $k_{\parallel}$  отсутствует циклотронное затухание, так что диэлектрический коэффициент  $K_L$  — чисто действительная величина. Аргументом функции Бесселя является величина  $k_{\perp} v_{0\perp} / \omega_b$ . Когда  $v_{0\perp} \rightarrow 0$ , выражение (7.24) сводится к обычному соотношению для волны, распространяющейся вдоль пучка, в котором поперечная энергия электрона равна нулю:

$$K_L(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{k^2} \left( \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^{*2}} + \frac{k_{\perp}^2}{\omega^{*2} - \omega_b^2} \right). \quad (7.25)$$

Дисперсионные кривые для волн, определяемые выражением (7.24), приведены на фиг. 86. Вблизи каждого номера гармоники имеются две узкие полосы распространения, одна выше и одна ниже каждого целого кратного значения  $\omega_b$ . Протяженность полос пропускания соответствует примерно величине  $\pm \omega_p J_m$  в каждую сторону от  $m\omega_b$ . Они становятся все более узкими по мере увеличения номера  $m$ . Отметим мимоходом, что если допустить взаимодействие обсуждаемого электронного «пучка» с подходящим контуром или плазменной средой, то может развиваться неустойчивость,



Фиг. 86. Дисперсионные кривые для продольных волн в электронном пучке, распространяющихся под углом  $\theta = \text{arctg}(k_{\perp}/k_{\parallel})$  к направлению магнитного поля (из работ Берса и Грубера [326] и Крауфорда и Татарониса [356], см. также § 2 гл. 9).

$\omega^* = \omega - k_{\parallel} v_{0\parallel}$  — частота, сдвинутая за счет эффекта Доплера (кривые относятся к системе отсчета, связанной с дрейфующими электронами).

так как волны в среде будут взаимодействовать с волнами в «пучке». Это взаимодействие, приводящее к неустойчивости, происходит с каждой из нижних ветвей ряда кривых, представленных на фиг. 86 (см. § 2 гл. 9).

## 2. Максвелловское распределение скоростей.

Когда функция распределения является максвелловской, то интегрирование (7.22) по  $v_{\perp}$  можно проводить, используя следующее соотношение [250]:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} J_m^2(bx) x dx = \frac{1}{2a^2} e^{-b^2/2a^2} I_m\left(\frac{b^2}{2a^2}\right),$$

где  $I_m(x)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента. При последующем интегрировании по  $v_{\parallel}$  мы вводим плазменную дисперсионную функцию (см. работы [4, 141]

и § 5 гл. 4)

$$Z(\alpha) = j \sqrt{\pi} e^{-\alpha^2} \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{j\alpha} e^{-x^2} dx \right). \quad (7.26)$$

В конечном итоге получаем

$$K_L(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) v_0^2} \left[ 1 + \sum_m \alpha_0 Z(\alpha_m) I_m(\lambda) e^{-\lambda} \right], \quad (7.27)$$

где

$$\lambda = \left( \frac{k_{\perp} v_0}{\omega_b} \right)^2, \quad v_0^2 = \left( \frac{\kappa T}{m_0} \right), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (7.28)$$

$$\alpha_m = \frac{\omega - m \omega_b}{\sqrt{2} v_0 k_{\parallel}}.$$

Затухание волны определяется мнимой частью функции  $Z$ . Для действительного аргумента

$$\text{Im } Z(\alpha_m) = \sqrt{\pi} e^{-\alpha_m^2}. \quad (7.29)$$

Затухание Ландау представлено множителем  $Z(\alpha_0)$ . Циклотронное затухание представлено множителем  $Z(\alpha_m)$ ,  $m \neq 0$ , и происходит вблизи гармоник циклотронной частоты. Это затухание является слабым при

$$|\omega - m \omega_b|^2 \gg 2k_{\parallel}^2 v_0^2. \quad (7.30)$$

Отсюда можно ожидать, что для наблюдения гармонической структуры при поглощении или излучении  $k_{\parallel}$  должно иметь малые значения; это означает, что углы распространения волн сильно ограничены и близки к  $90^\circ$  (относительно направления магнитного поля).

У волн, которые распространяются точно под прямыми углами к магнитному полю и для которых теперь  $K_L = K_{xx}$ , затухание отсутствует. Уравнение (7.27) принимает вид

$$K_L(k_{\perp}, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{k_{\perp}^2 v_0^2} \left[ 1 - \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(\lambda) e^{-\lambda} \left( \frac{\omega}{\omega - m \omega_b} \right) \right]. \quad (7.31)$$

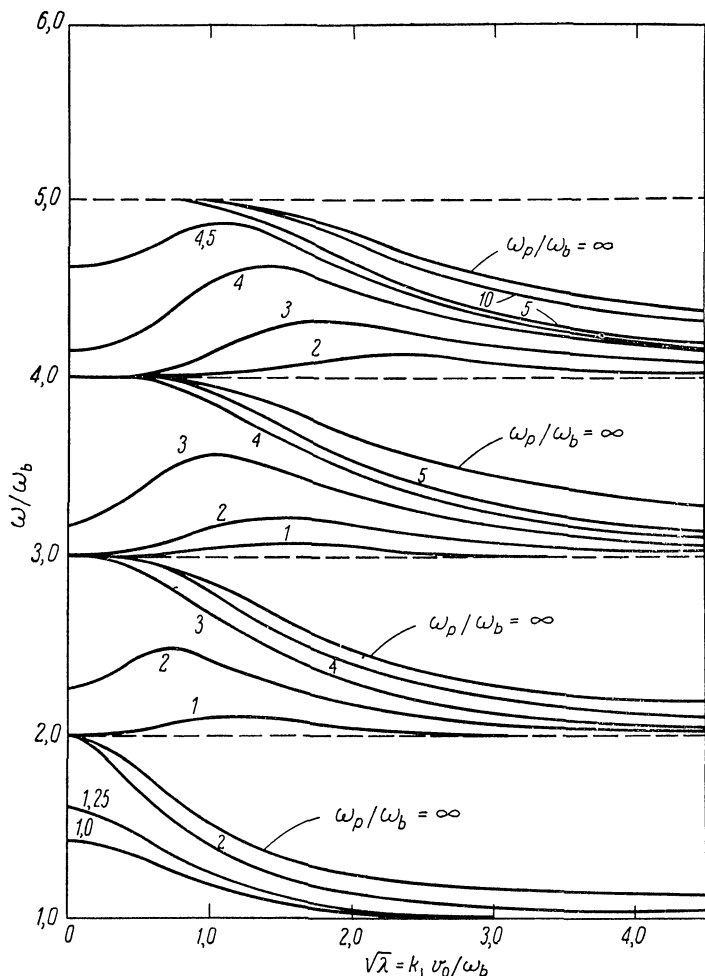
Уравнение (7.31) можно преобразовать с помощью тождества

$$\sum_{-\infty}^{\infty} I_m(\lambda) e^{-\lambda} = 1.$$

В результате будем иметь

$$K_L(k_{\perp}, \omega) = 1 - 2 \left( \frac{\omega_p}{\omega_b} \right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} I_m(\lambda) \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \frac{m^2}{(\omega/\omega_b)^2 - m^2}; \quad (7.32)$$

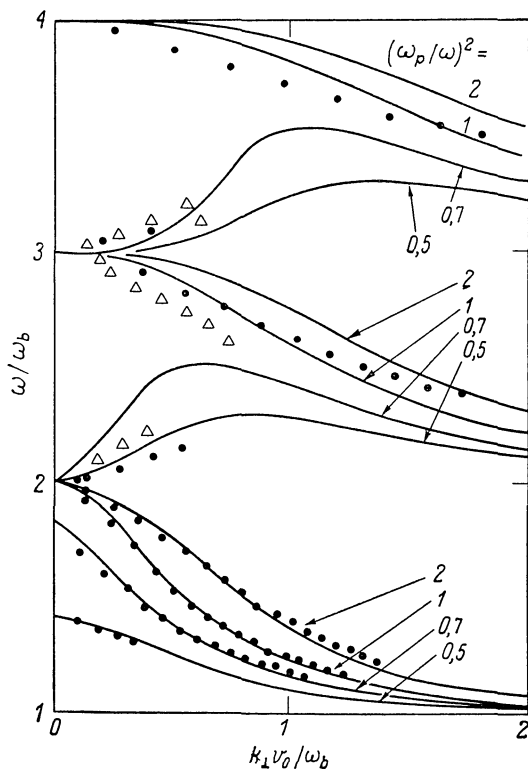
это уравнение получил Бернштейн [311].



Фиг. 87а. Дисперсионные кривые для продольных волн, распространяющихся под прямыми углами к магнитному полю в термически равновесной плазме (из работ Стоне и Ауера [328] и Крауфорда и Татарониса [357]).

На фиг. 87а приведены решения уравнения  $K_L = 0$  для нескольких значений  $(\omega_p/\omega_b)^2$ , полученные [328, 329] на основании (7.32). В области частот  $\omega < \omega_b$  решения отсутствуют. При больших значениях  $k_\perp$  кривые приближаются со стороны высоких частот к значениям частоты гармоник  $m\omega_b$ . Однако при малых значениях  $k_\perp$  частота может быть (в зависимости от плотности электронов) чуть выше частоты данной гармоники или чуть ниже частоты





Фиг. 876. Дисперсионные кривые для продольных волн, распространяющихся под прямыми углами к магнитному полю (из работы Мантей [330]).  
Экспериментальные данные сравниваются с теоретическими.

следующей, более высокой гармонике. При  $k_{\perp} = 0$  частота становится равной верхней гибридной частоте холодной плазмы, определяемой выражением (7.4). Видно, что при малых значениях плотности  $\omega_p/\omega_b \leq 1$  волны существуют внутри узких полос пропускания вблизи (и выше) значения частоты каждой гармонике. Для данной плотности и температуры ширина полосы уменьшается с увеличением  $m$ . В определенных диапазонах параметров плазмы групповая скорость волн отрицательная.

На фиг. 87а приведена теоретическая дисперсионная кривая; ее экспериментально подтвердил Мантей [330] при измерениях распространения синусоидального сигнала между двумя проволочными антеннами, помещенными в *однородный* разряд низкого давления на постоянном токе (влияние границ и неоднородностей электронной плотности обсуждается в § 5 настоящей главы).

На фиг. 87б экспериментальные данные сравниваются с теоретическими.

Разложим (7.32) в ряд по  $\lambda$ . Это эквивалентно решению задачи путем использования метода моментов в уравнении Больцмана (ср. стр. 198). Удерживая только члены первого порядка по температуре, находим следующее дисперсионное соотношение:

$$(4\omega_b^2 - \omega^2)(\omega_b^2 + \omega_p^2 - \omega^2) = 3\omega_p^2 k_{\perp}^2 v_0^2. \quad (7.33)$$

Этот результат хорош только в окрестности второй гармоники; для получения решения, применимого вблизи третьей гармоники, необходимо удержать последующие члены более высокого порядка по  $T$  и т. д. для следующей гармоники.

Соотношение (7.33) показывает, что истинное распространение ( $k_{\perp}^2 > 0$ ) может иметь место в двух различных диапазонах параметров плазмы:

$$\sqrt{\omega_b^2 + \omega_p^2} > \omega, \quad \omega < 2\omega_b \quad (7.34)$$

и

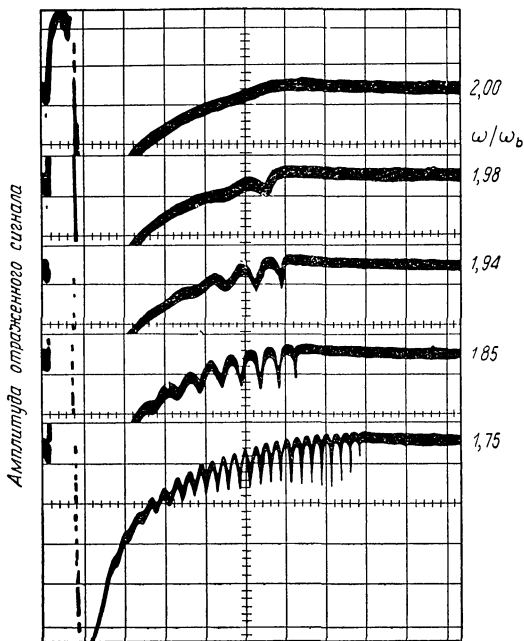
$$\sqrt{\omega_b^2 + \omega_p^2} < \omega, \quad \omega > 2\omega_b. \quad (7.35)$$

В первом диапазоне распространение волн происходит на частотах ниже точного значения частоты гармоники, в то время как во втором диапазоне распространение волн возможно на частотах, превышающих значение частоты гармоники  $\omega = 2\omega_b$ . Это также ясно видно из фиг. 87а и 87б.

Преыдущие результаты важны для продольных колебаний в ограниченной плазме; этот вопрос мы рассмотрим в следующем параграфе.

## § 5. Продольные колебания в ограниченной плазме

При измерениях спектра микроволнового испускания, поглощения или рассеяния на плазменном столбе в присутствии продольного магнитного поля выявилась резонансная структура вблизи каждой электронной циклотронной гармоники  $m > 1$ . Приведенные на фиг. 81а пики, наложенные на спектральный фон, являются примером гармоник, наблюдаемых при поглощении. С ростом номера гармоники интенсивность пика меняется не очень сильно, что особенно заметно при наблюдении излучения [297, 331]; было обнаружено целых сорок последовательных гармоник. В исследуемой плазме энергия электронов составляла самое большее несколько десятков электронвольт ( $kT/m_0c^2 \sim 10^{-4}$ ), поэтому гармоники могут не иметь отношения к резонансам, предсказанным в § 3 настоящей главы при обсуждении поперечных электромагнитных волн в безграничной однородной плазме. Причина заключается в том, что сильные резонансы на высоких гармониках возникают только тогда, когда фазовая скорость волны сравнима



Фиг. 88. Резонансы продольной волны, возбуждаемые по радиусу посредством полосковой линии и наблюдаемые при отражении (из работы Шмитта, Мелтца и Фрайхайта [216]).

Магнитное поле направлено вдоль оси плазменного цилиндра. Газ — неон при давлении 0,02 торр. Измерения проводились в послесвечении на частоте 400 Мгц. Масштаб времени по горизонтальной оси — 0,2 мсек на 1 деление. Отметим, что резонансы возникают ниже второй гармоники электронной циклотронной частоты. Аналогичная тонкая структура резонансов наблюдается вблизи третьей, четвертой и т. д. гармоник.

со скоростью излучающего или поглощающего электрона, отсюда ясно, что это условие не имеет места для поперечных волн, распространяющихся с большой скоростью. Поэтому Каннобио и Кроки [347] предположили, что причиной наблюдаемой гармонической структуры является возбуждение (медленных) продольных волн, которые связаны с поперечными волнами из-за плазменных неоднородностей (т. е. градиентов плотностей). Рассмотрим теперь доказательство этого утверждения.

Тщательное обследование данной гармоники (более высокой, чем первая  $m = 1$ ) показывает, что во многих, но не во всех экспериментах, она включает в себя тонкую структуру тесно расположенных линий, расстояние между которыми для данной геометрии зависит от отношений  $\omega_p/\omega$  и  $\omega_b/\omega$  [216, 332, 333]. На фиг. 88 приведен прекрасный пример тонкой структуры на частоте  $\omega$  вблизи  $2\omega_b$ . Наблюдения проводились в позднем послесвечении импульсного разряда, причем использовалась та же экспериментальная

система, что и при исследовании резонансов Тонкса — Датнера, описанная в § 6 гл. 5. Как в этом, так и во всех других экспериментах, в которых используются резонаторы, волноводы или антенны, мода волны должна быть такова, чтобы векторы поляризации ВЧ электрического поля составляли прямые углы со статическим магнитным полем, а волновой вектор был практически перпендикулярен  $\mathbf{B}_0$ .

Буксбаум и Хазегава [333] впервые показали, что наблюдаемую тонкую структуру можно интерпретировать как стоячую продольную волну.

Рассмотрим слой плазмы конечной толщины в направлении  $x$  и бесконечный в направлениях  $y$  и  $z$ . Статическое магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ . Плотность электронов меняется вдоль оси  $x$ : она максимальна в центре и уменьшается к границам. Предполагается, что волна распространяется только вдоль оси  $x$ . В этом случае, как и при резонансах Тонкса — Датнера, рассмотренных в § 6 гл. 5, возможны стоячие продольные плазменные волны. Однако в отличие от резонансов Тонкса — Датнера, при которых волны «захватываются» в потенциальную яму вблизи стенок (см. фиг. 52), теперь волны существуют внутри плазменного слоя при условии, что локальная плотность плазмы  $\omega_p(x)$  удовлетворяет [см. (7.33)] соотношению

$$[\omega_b^2 + \omega_p^2(x)]^{1/2} > \omega.$$

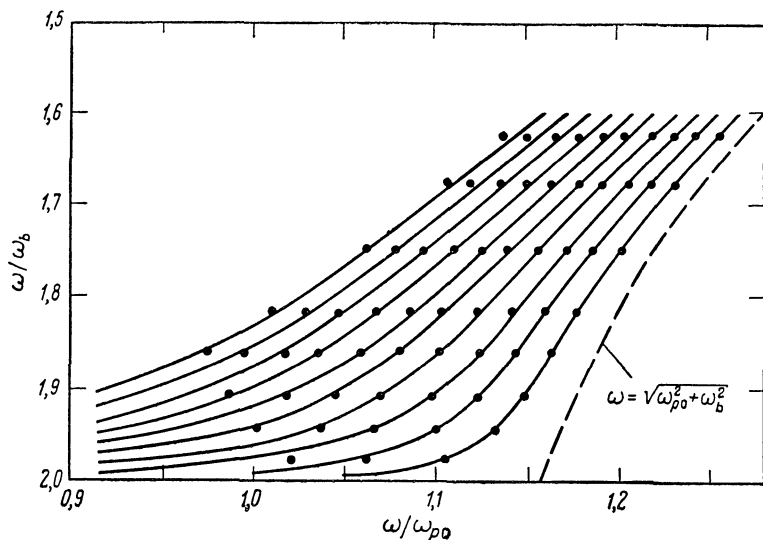
Когда длина волны колебаний и радиус вращения электрона малы по сравнению с характерным размером неоднородности плазмы, волну можно рассматривать локально как плоскую волну, волновой вектор которой  $k$  определяется из соотношения (7.33). Дисперсионное соотношение для стоячих волн можно получить с помощью метода ВКБ, который дает искомое условие «квантования» для фазы [ср. (5.90) и (5.91)]. Для цилиндрического плазменного столба получаем

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[ k^2(r) - \frac{(s + 1/2)^2}{r^2} \right]^{1/2} dr = \left( m + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (7.36)$$

где  $r_1$  — точка поворота вблизи поверхности цилиндра, в этой точке  $\omega_p(r_1) \approx (\omega^2 - \omega_b^2)^{1/2}$ , и  $r_2$  — точка поворота вблизи центра  $r \approx 0$ . Для дипольного возбуждения столба  $s = 1/2$ ; для квадрупольного возбуждения  $s = 3/2$ .

В позднем послесвечении импульсной плазмы радиальный профиль плотности электронов хорошо аппроксимируется функцией Бесселя:

$$N \sim J_0\left(\frac{2,4r}{R}\right).$$



Фиг. 89. Положения резонансов, наблюдаемых на фиг. 88 (из работы Шмитта, Мелтца и Фрайхайта [216]).

Сплошные кривые — теоретические. Пунктирная кривая соответствует верхней гибридной частоте;  $\omega_{p0}$  — максимальная плазменная частота в центре плазменного столба.

В работе [216] проведен числовой расчет уравнения (7.36) для такого распределения плотности электронов в предположении дипольного возбуждения<sup>1)</sup>. Было найдено хорошее согласие с экспериментом (фиг. 89). Необходимо отметить, что поскольку эти резонансы возникают внутри плазмы, их поведение почти не зависит от условий в плазменной оболочке. Это прямо противоположно случаю резонансов Тонкса — Датнера, и весьма удобно для плазменной диагностики.

В особом случае монополярного возбуждения ( $E$  является функцией только радиальной координаты  $r$ ) уравнения Власова и Пуассона можно решить формально [334, 335]. В предположении, что плотность электронов меняется как

$$\omega_p^2(r) = \frac{\omega_{p0}^2}{1 + \gamma (r/r_0)^2} \equiv \omega_{p0}^2 g(r), \quad (7.37)$$

<sup>1)</sup> Шмитт, Мельтц и Фрайхайт [216] провели расчеты для дипольного возбуждения, используя вектор  $k$ , определяемый из соотношения (7.33). Однако последнее строго применимо только к азимутально независимому возбуждению. В этом заключается приближение, справедливость которого необходимо в дальнейшем проверить.

получим уравнение типа уравнения Шредингера [ср. (5.88)]:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left( \frac{\mathcal{E} - 1}{\lambda^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{\gamma}{\lambda^2} \frac{r^2}{r_0^2} \right) \right] g(r) E(r) = 0, \quad (7.38)$$

где

$$\mathcal{E} = \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2 - \omega_b^2}, \quad (7.39)$$

$$\lambda^2 = \frac{3\omega_{p0}^2 v_0^2}{(\omega^2 - \omega_b^2)(4\omega_b^2 - \omega^2)}.$$

Это уравнение справедливо для частот вблизи второй гармоники; его можно свести к уравнению Уиттекера. Так как в начале координат,  $r = 0$ , требуется регулярность уравнения (7.38), то отбираются следующие решения, выраженные через вырожденные гипергеометрические функции  ${}_1F_1(a; 2; c)$ :

$$g(r) E(r) = A \frac{\gamma^{1/2}}{\lambda} \left( \frac{r}{r_0} \right) e^{-(\gamma^{1/2} r^2 / 2\lambda r_0)} {}_1F_1 \left( 1 - K; 2; \frac{\gamma^{1/2} r^2}{\lambda r_0} \right), \quad (7.40)$$

где

$$K = \frac{r_0}{\lambda} \frac{\mathcal{E} - 1}{4\gamma^{1/2}}.$$

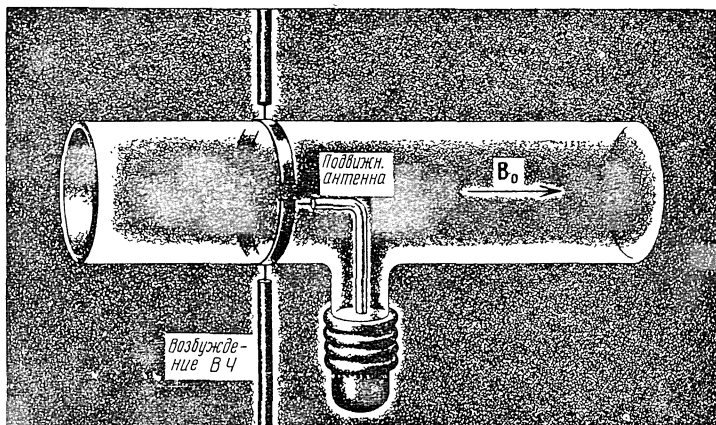
Функция  ${}_1F_1$  табулирована в работах [336, 337].

Дисперсионные характеристики колебаний получаются при наложении граничных условий на стенке  $r = r_0$ . Соответствующее граничное условие должно налагаться на функцию распределения по скоростям  $f(v)$ , и эта задача полностью не решена. Часто применяется полуэмпирическое макроскопическое граничное условие: радиальный ВЧ ток равен нулю при  $r = r_0$ . Вместо этого (без большого изменения окончательного результата) можно не принимать во внимание наличие контейнера и предположить, что выражение для  $\omega_p$ , найденное из (7.37), справедливо вплоть до  $r = \infty$ . Теперь ограничение состоит в том, что (7.40) должно быть квадратично-интегрируемым, для этого  $2K - 1$  должно быть положительным числом (или нулем), что приводит к следующему дисперсионному соотношению:

$$(4\omega_b^2 - \omega^2)(\omega_b^2 + \omega_{p0}^2 - \omega^2) \left( \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2 - \omega_b^2} - 1 \right) = 4(m+1)^2 3\gamma \omega_{p0}^2 \frac{v_0^2}{r_0^2}. \quad (7.41)$$

Это соотношение качественно имеет тот же самый вид, что и (7.33) для однородной плазмы, если в последнем величина  $k = 2\pi/\lambda$  соответствующим образом «квантована».

Дополнительное подтверждение того факта, что резонансы связаны с коротковолновыми продольными колебаниями, следует из

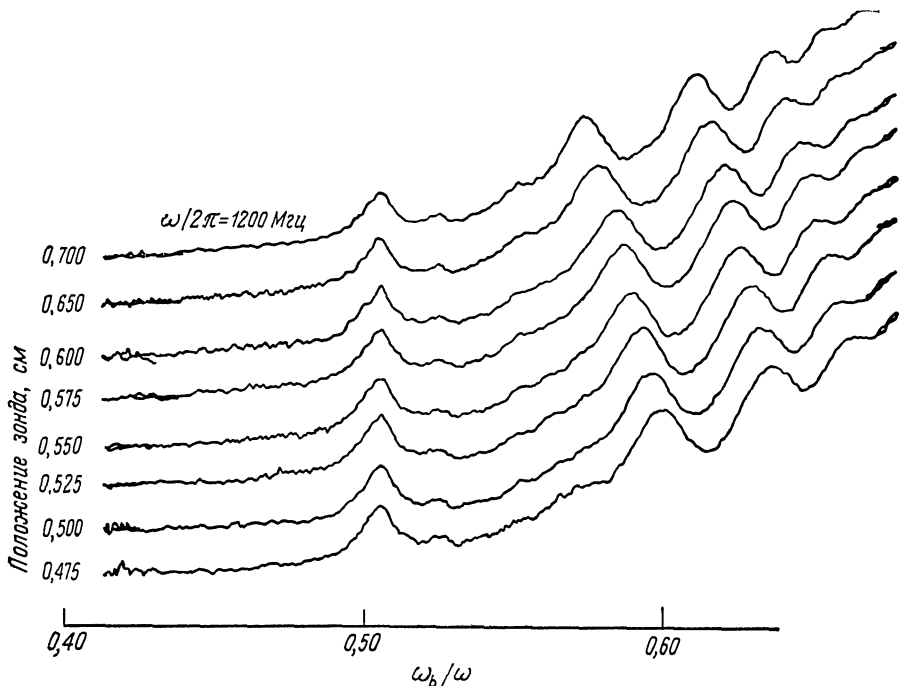


Фиг. 90. Схематическое изображение прибора для измерений продольных колебаний посредством подвижной антенны (из работы Грубера и Бекефи [340]) Антенна полностью закрыта оболочкой из пирекса и может перемещаться по радиусу при сжатии металлического сильфона.

измерений, проведенных внутри самого столба плазмы [338—340]. На фиг. 90 показано экспериментальное устройство, примененное в работе [340]. Колебания возбуждаются полосковой линией, расположенной вне столба, а ВЧ сигнал измеряется малой приемной антенной.

ВЧ сигнал на приемной антенне снимается в зависимости от напряженности аксиального магнитного поля при различном положении антенны по радиусу плазменного цилиндрического столба. На фиг. 91 приведена часть данных, полученных при магнитном поле вблизи второй гармоники электронной циклотронной частоты. Разные кривые соответствуют различным радиальным положениям зонда. Для наглядности кривые смещены относительно друг друга. Наблюдаемые сигналы являются синусоидальными колебаниями, наложенными на монотонно возрастающий фон. Изменение сигнала вдоль радиуса можно получить разрезав фиг. 91 при фиксированном значении  $\omega_b/\omega$ . Это изменение сигнала вдоль радиуса показано на фиг. 92а для одного значения  $\omega_b/\omega$ . Видно, что длина волны колебаний возрастает с увеличением расстояния по радиусу от оси разряда, как и можно было ожидать в связи с уменьшением электронной плотности. При достижении стенки сосуда длина волны колебания начинает превышать характерный размер изменения плотности. Здесь нельзя больше говорить о длине волны. На фиг. 92б<sup>1)</sup> показано распределение радиального электрического

<sup>1)</sup> S. G r u b e r, частное сообщение.



Фиг. 91. Зависимость сигнала, принятого антенной, от магнитного поля для различных положений антенны по радиусу (из работы Грубера и Бекефи [340]). Газ — неон при давлении 0,03 торр. Ток разряда — 40 ма.

поля, вычисленного из выражения (7.40). Видно, что колебания исчезают в той точке плазмы, где

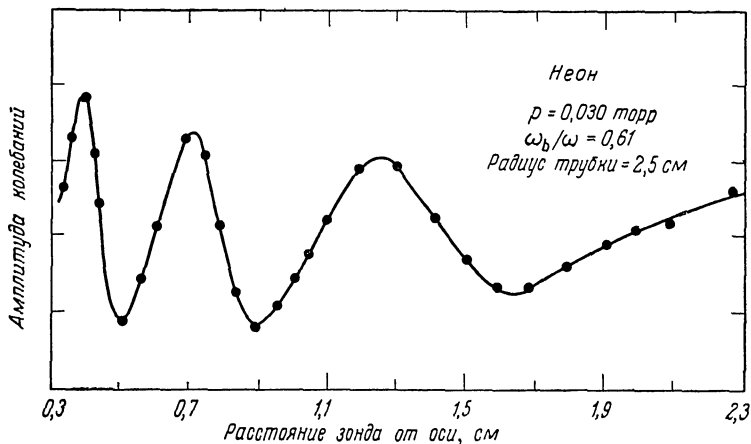
$$\omega_p^2(r) \approx \omega^2 - \omega_b^2.$$

Кроме внутренних резонансов наблюдаются также резонансы в поверхностном слое плазмы, где распространение волны допускается соотношением (7.33). В поверхностном слое плазмы имеется, в сущности, два типа спектров. При очень малых магнитных полях резонансы имеют близкое сходство с резонансами Тонкса — Даттнера. По мере увеличения отношения  $\omega_b/\omega$  они сдвигаются к меньшим значениям  $\omega_p^2/\omega^2$  [203]. Когда  $\omega_b/\omega_p \ll 1$ , волновой вектор этих волн [ср. (5.78)] определяется из соотношения

$$\omega^2 - [\omega_p^2(r) + \omega_b^2] \approx 3k^2 v_0^2. \quad (7.42)$$

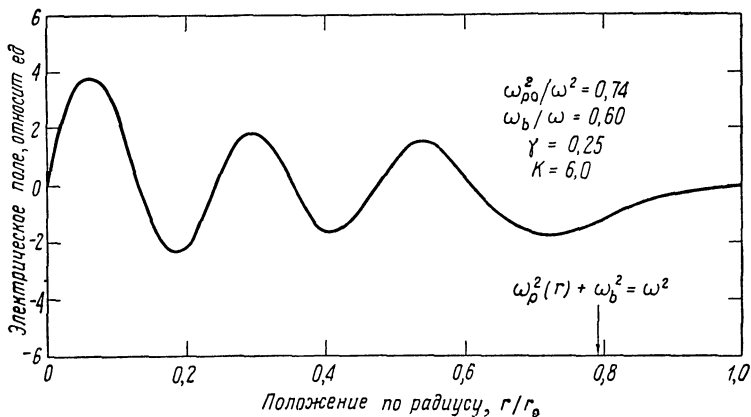
При дальнейшем увеличении частоты  $\omega_b$  достигается режим, в котором радиус вращения  $\rho$  становится сравнимым с характерным





Фиг. 92а. Измеренное радиальное распределение амплитуды продольных колебаний для фиксированных значений  $\omega$ ,  $\omega_b$  и  $\omega_p$  (из работы Грубера и Бекефи [340]).

Кривая построена на основе таких данных, как приведенные на фиг. 91; монотонно возрастающий фон вычитался.



Фиг. 92б. Распределение радиального электрического поля, вычисленное по формуле (7.40).

размером изменения плотности  $l = N/\nabla N$ . Здесь резонансы начинают исчезать и появляется новый набор резонансов [216]. По мере дальнейшего увеличения магнитного поля до таких значений, при которых  $\omega \approx m\omega_b$ , этот новый набор резонансов приближается к предсказанному соотношению (7.33).

Для области  $\rho \approx l$  до сих пор не разработана удовлетворительная теория. Трудность заключается в том, что радиальное поле  $E_0$  постоянного пространственного заряда приводит к появлению в линеаризованном уравнении Власова члена порядка

$$\frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \approx \omega_b v_0 \left( \frac{\rho}{l} \right) \left( \frac{\partial f_1}{\partial v} \right)$$

и в рассматриваемом режиме ( $\rho \approx l$ ) его величина становится сравнимой с остальными членами уравнения. В упомянутых внутренних резонансах отношение  $\rho/l$  достаточно мало, и влиянием постоянного пространственного заряда можно пренебречь с относительно малой ошибкой (как сделано в работах [333, 335]). Детальное исследование этой задачи проведено в работах [341, 342].

Для написанных выше дисперсионных соотношений принципиальным является электростатическое приближение  $c \rightarrow \infty$ . Оно справедливо для волн, фазовая скорость которых мала по сравнению с  $c$  ( $k \gg \omega/c$ ), и это хорошо выполнялось во всех описанных экспериментах. Однако наблюдения электронных циклотронных гармоник, возбуждаемых в ионосфере [343, 344] специальным излучателем, установленным снаружи спутника, показывают, что в данном случае волновые числа, по-видимому, сравнимы со значениями  $\omega/c$  для свободного пространства [345]. Это означает, что при расчетах нужно использовать полную систему уравнений Максвелла, а не просто уравнение Пуассона, и в (7.15) следует удерживать члены порядка  $v^2/c^2$  [346].

Из фиг. 87а видно, что когда волновые числа порядка  $\omega/c$  (т. е. применимы вышеупомянутые рассуждения), частоты гармоник очень близки к целым кратным значениям  $\omega = m\omega_b$ . Действительно, находим, что при

$$\frac{|\omega - m\omega_b|}{\omega} \gg \frac{v_0^2}{c^2},$$

обычно справедливо квазиэлектростатическое приближение, использованное в данном параграфе.

## § 6. Генерация продольных волн электронами плазмы

В предыдущем параграфе нас интересовала в основном зависимость положения спектральных линий продольных колебаний от частот  $\omega$ ,  $\omega_p$  и  $\omega_b$ ; интенсивность и формы линий не обсужда-

лись. Задача об энергии соответствующей данной линии является весьма важной, особенно при изучении колебаний при испускании. Здесь ставится следующий вопрос: если имеется плазма с определенной плотностью электронов и распределением их по скоростям, то можно ли теоретически рассчитать наблюдаемый уровень излучения на циклотронных гармониках? Эта задача является достаточно сложной, и можно получить только частичный ответ. Трудность состоит в том, что между продольными и электромагнитными волнами, которые используются для их наблюдения, имеется связь, но механизм связи еще полностью не выяснен. Поэтому мы сузим свою задачу и вычислим только скорость выделения энергии продольными колебаниями. Это даст верхнюю границу для любого сравнения с экспериментом. Дополнительно сделаем предположение, что плазма однородна и бесконечна. Вследствие этого в данном анализе не будет рассматриваться тонкая структура, обусловленная стоячими волнами и обсужденная в § 5 настоящей главы.

Скорость генерации продольных волн можно рассчитать с помощью флуктуационно-диссипативной теоремы точно таким же образом, как это мы делали в § 4 и 6 гл. 4 для колебаний в отсутствие магнитного поля. Нам необходимо определить спектральную плотность мощности  $P(\mathbf{k}, \omega)$  [ср. (4.52) или (4.110)]. Поскольку для магнитоплазмы эта величина нам не известна, мы непосредственно вычислим интенсивность испускания методом, о котором упоминалось в тексте после формулы (4.78); тем самым попутно вычислим  $P(\mathbf{k}, \omega)$ . Расчеты проведены в работах [328, 347].

Испускание возникает в результате замедления быстрых электронов при их взаимодействии с окружающей плазмой в процессах типа эффекта Черенкова. Для расчета электрического поля вращающегося заряда используем приближение одетой пробной частицы (§ 6 гл. 4); энергия, теряемая этим зарядом при создании поля, переходит в энергию продольных волн. Полное излучение можно получить, суммируя по ансамблю всех пробных зарядов, имеющих определенную функцию распределения по скоростям. С физической точки зрения распределение по скоростям пробных частиц совпадает с распределением по скоростям зарядов плазмы.

Пробный заряд

$$\rho_s = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad (7.43)$$

движется по траектории  $\mathbf{r}_i(t)$  и создает электрическое поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , определяемое уравнением Пуассона

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}. \quad (7.44)$$

Для случая электростатических полей электрическое поле  $\mathbf{E}$  можно найти, зная потенциал  $\phi(\mathbf{r}, t)$ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{r}, t) \quad (7.45)$$

Анализ Фурье уравнений (7.44) и (7.45) по времени и пространству дает

$$k^2 K_L(\mathbf{k}, \omega) \phi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\rho_s(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon_0},$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{K}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega),$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = j\mathbf{k}\phi(\mathbf{k}, \omega)$$

и

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{j\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2 \varepsilon_0 K_L(\mathbf{k}, \omega)} \rho_s(\mathbf{k}, \omega). \quad (7.47)$$

Здесь  $K_L$  — диэлектрический коэффициент, определяемый выражением (7.22), а вектор  $\mathbf{K}$  связан с  $K_L$  соотношением (7.21).

Выражение для коэффициента Фурье  $\rho_s(\mathbf{k}, \omega)$  плотности заряда  $\rho_s(\mathbf{r}, t)$  имеет вид

$$\rho_s(\mathbf{k}, \omega) = e \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-j\omega t + j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i(t)}. \quad (7.48)$$

Мгновенное положение  $\mathbf{r}_i(t)$  пробного заряда, движущегося по спирали, определяется правой частью второго уравнения (6.3), если положить частоту  $\omega_0$  равной  $\omega_b$  (здесь рассматриваются нерелятивистские частицы). Подставив выражение для  $\mathbf{r}_i(t)$  в экспоненту в (7.48) и вычислив интеграл, получим

$$\rho_s(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi e \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_b}\right) \delta(\omega - n\omega_b - k_{\parallel} v_{\parallel}), \quad (7.49)$$

где  $k_{\parallel}$ ,  $v_{\parallel}$  и  $k_{\perp}$ ,  $v_{\perp}$  — компоненты волнового вектора и скорости вдоль и перпендикулярно статическому магнитному полю  $B_0(z)$  соответственно. Подставив (7.49) в (7.47) и проведя обращение преобразования Фурье, найдем электрическое поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , генерируемое пробным одетым зарядом.

Мгновенная скорость потерь энергии пробным зарядом определяется уравнением

$$\frac{dW}{dt} = e\mathbf{E}(\mathbf{r}_i, t) \cdot \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}. \quad (7.50)$$

Усредненная по времени мощность потерь получается путем усреднения по всему времени оборота  $2\pi/\omega_b$ . После довольно длинных вычислений находим

$$\begin{aligned} \langle \frac{dW}{dt} \rangle &= \frac{e^2}{(2\pi)^3 \varepsilon_0} \int \int \frac{d^3 k}{|\mathbf{k}|^2} d\omega \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{K_L(\mathbf{k}, \omega)} \right] \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2\left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_b}\right) \delta(\omega - n\omega_b - k_{\parallel} v_{\parallel}). \end{aligned} \quad (7.51)$$

Уравнение (7.51) определяет скорость генерации продольных волн одним пробным электроном, скорость которого имеет компоненты  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$ . По принципу суперпозиции для одетых пробных частиц полная интенсивность испускания равна просто сумме по всем электронам, взвешенной с помощью функции распределения по скоростям  $f(\mathbf{v})$ .

Проинтегрировав правую часть (7.51) по ансамблю электронов, имеющих некоторую функцию распределения по скоростям  $f(\mathbf{v})$ , можно определить коэффициент испускания  $j_L(\mathbf{k}, \omega)$  [по прямой аналогии с (4.77)] как скорость генерации волн на единицу объема на  $d\omega$ . Это испускание компенсируется поглощением  $u(\mathbf{k}, \omega) \alpha(\mathbf{k}, \omega) d^3k / (2\pi)^3$ , где  $u$  — искомая плотность энергии волн и  $\alpha = -2\omega \text{Im} K_L$  — скорость поглощения энергии (во времени). Отсюда следует

$$u(\mathbf{k}, \omega) = \frac{Ne^2}{2\epsilon_0} \int \sum_n \frac{1}{|k|^2 |K_L(\mathbf{k}, \omega)|^2} J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_b} \right) \delta(\omega - n\omega_b - k_{\parallel} v_{\parallel}) f(\mathbf{v}) d^3v, \quad (7.52)$$

где функция  $f(\mathbf{v})$  нормирована на единицу. Однако

$$\int \int u(\mathbf{k}, \omega) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} d\omega = \frac{1}{2} \epsilon_0 \langle E^2(\mathbf{r}, t) \rangle \quad (7.53)$$

и усредненное значение  $E^2$  связано со спектральной плотностью мощности с помощью уравнения (4.51):

$$\langle E^2(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int d^3k d\omega P(\mathbf{k}, \omega). \quad (7.54)$$

Следовательно,

$$P(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2u(\mathbf{k}, \omega)}{\epsilon_0},$$

отсюда

$$P(\mathbf{k}, \omega) = \frac{Ne^2}{|k|^2 \epsilon_0^2 |K_L(\mathbf{k}, \omega)|^2} \int \sum_n J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_b} \right) \delta(\omega - n\omega_b - k_{\parallel} v_{\parallel}) f(\mathbf{v}) d^3v. \quad (7.55)$$

Выражение (7.55) формально то же самое, что и (4.110) для спектральной плотности мощности в отсутствие статического магнитного поля.

**Испускание одним пробным электроном в максвелловской плазме.**

Интенсивность испускания одним пробным электроном (на единичный частотный интервал  $d\omega$ , на единичный телесный угол  $d\Omega$ ), излучающим в элементарный конус, ось которого составляет угол  $\theta$  с магнитным полем, можно получить, интегрируя (7.51) по волновым векторам  $\mathbf{k}$ . Если использовать соотношение  $d^3k = k^2 dk / d\Omega$ ,

то непосредственно следует:

$$\left\langle \frac{dW}{dt d\omega d\Omega} \right\rangle = \frac{e^2 \omega}{(2\pi)^3 \varepsilon_0} \sum_n \frac{1}{v_{\parallel} \cos \theta} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{K_L(k', \omega)} \right] J_n^2 \left( \frac{k', v_{\perp}}{\omega_b} \sin \theta \right), \quad (7.56)$$

где  $k'$  принимает значение, определяемое условием Допплера:

$$k' = \frac{\omega - n\omega_b}{v_{\parallel} \cos \theta}. \quad (7.57)$$

Рассмотрим случай слабо затухающих продольных волн, поскольку только тогда их, по-видимому, можно наблюдать экспериментально. Теперь при определенных дискретных значениях  $k'$  и  $\omega$ , для которых  $K_L(k', \omega) \approx 0$ , возникает сильное испускание из-за наличия члена  $|K_L|^2$  в знаменателе (7.55). С помощью соображений, аналогичных использованным в § 4 гл. 4, находим

$$\operatorname{Im} \frac{1}{K_L(k', \omega)} \approx \frac{\pi}{2} k_0 \delta(k' - k_0), \quad (7.58)$$

где волновой вектор  $k_0$  удовлетворяет дисперсионному соотношению  $\operatorname{Re} K_L(k_0, \omega) = 0$ .

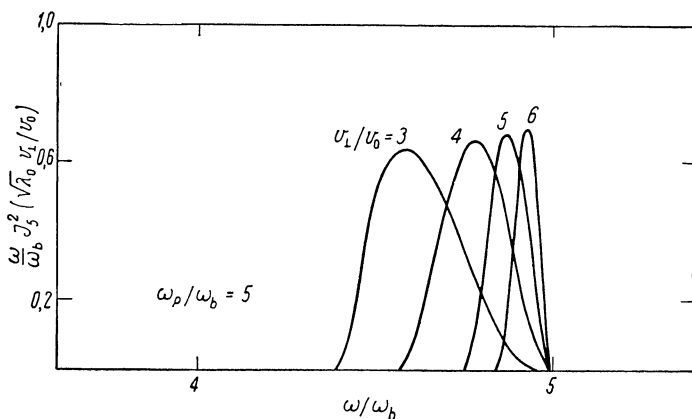
Как указывалось ранее, усредненную интенсивность испускания можно получить, суммируя правую часть (7.56) по ансамблю электронов плазмы. Такой шаг не сделан из-за математических трудностей. Вместо этого рассмотрим испускание одного (или более) моноэнергетических электронов, излучающих в максвелловской плазме, диэлектрический коэффициент которой определяется теперь выражением (7.27).

Чтобы затухание было слабым, должно выполняться неравенство (7.30). Это означает, что  $\cos \theta \ll 1$ , т. е. испускание ограничено узким конусом, ось которого составляет прямой угол с  $\mathbf{V}_0$ . Тогда с хорошим приближением  $k_0$  можно определить из дисперсионного соотношения (7.32) для перпендикулярного распространения.

Интегрируя (7.56) по телесному углу с учетом (7.57) и используя (7.58), находим, что интенсивность испускания вблизи данной гармоники  $\omega = s\omega_b$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) можно представить выражением

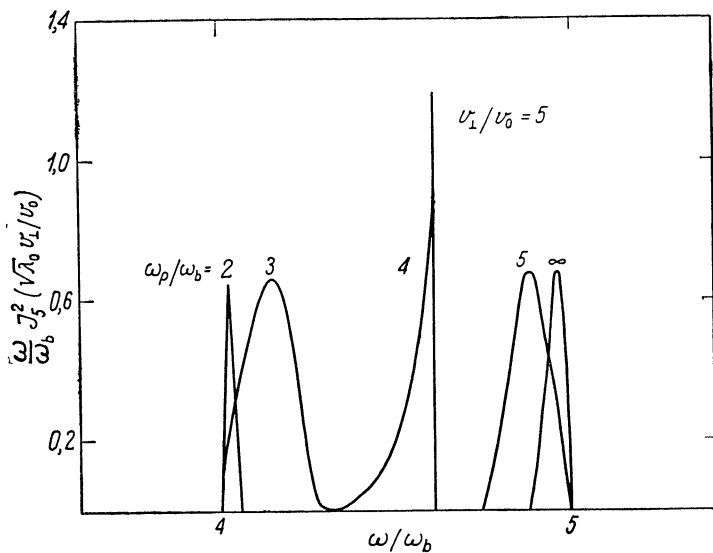
$$\left\langle \frac{dW}{dt d\omega} \Big|_{\omega \approx s\omega_b} \right\rangle = \frac{e^2 \omega}{8\pi \varepsilon_0} \frac{1}{v_{\parallel}} J_s^2 \left( \sqrt{\lambda_0} \frac{v_{\perp}}{v_0} \right). \quad (7.59)$$

Здесь  $v_0^2 = \kappa T/m$  — среднеквадратичная скорость плазменного электрона,  $\lambda = (k_{\perp} v_0 \omega_b)^2$  и  $\lambda_0$  — решение дисперсионного уравнения (7.32),  $K_L(\lambda = \lambda_0; \omega) = 0$ . (Дисперсионные характеристики проиллюстрированы на фиг. 87а.)



Фиг. 93. Зависимость спектральной мощности продольных волн в диапазоне частот между четвертой и пятой гармониками, возбуждаемых электронами с различными поперечными скоростями (из работы Стоуна и Ауера [328]).

На других гармониках результаты аналогичные.



Фиг. 94. Зависимость спектральной мощности возбужденных продольных волн от  $\omega/\omega_b$  при различных плотностях плазмы (из работы Стоуна и Ауера [328]).

Чтобы излучение на данной гармонике  $s$  было сильным, аргумент функции Бесселя должен быть порядка или больше  $s$ , т. е.

$$\lambda_0 \left( \frac{v_{\perp}}{v_0} \right)^2 \gtrsim s^2. \quad (7.60)$$

Тогда при  $\lambda_0 \approx 1$  (это — приемлемая величина для многих экспериментов) излучение на высоких гармониках вызывается быстрыми надтепловыми электронами ( $v_{\perp} \gg v_0$ ). Оказывается, что для объяснения наблюдаемых интенсивностей требуется очень большое число таких электронов [64, 297, 331, 348]. В максвелловском распределении по скоростям не содержится достаточного количества таких частиц, и обычно для расчета наблюдаемых интенсивностей нужно постулировать наличие группы быстрых электронов [348].

На фиг. 93 и 94 приведены расчетные кривые, полученные на основании выражения (7.59). Эти кривые представляют зависимость величины, пропорциональной интенсивности испускания от частоты для волн между четвертой и пятой гармониками. Отметим следующую типичную особенность: по мере уменьшения отношений  $v_{\perp}/v_0$  и  $\omega_p/\omega_b$  центр линии излучения смещается к более низким частотам. Большой пик на фиг. 94 при  $\omega_p/\omega_b$  не является типичным;  $\lambda_0$  уменьшается именно тогда, когда групповая скорость становится равной нулю (см. фиг. 87а), и тогда нет переноса энергии. Ширина линии излучения по частоте в основном определяется шириной первого пика функции Бесселя, входящей в выражение (7.59).

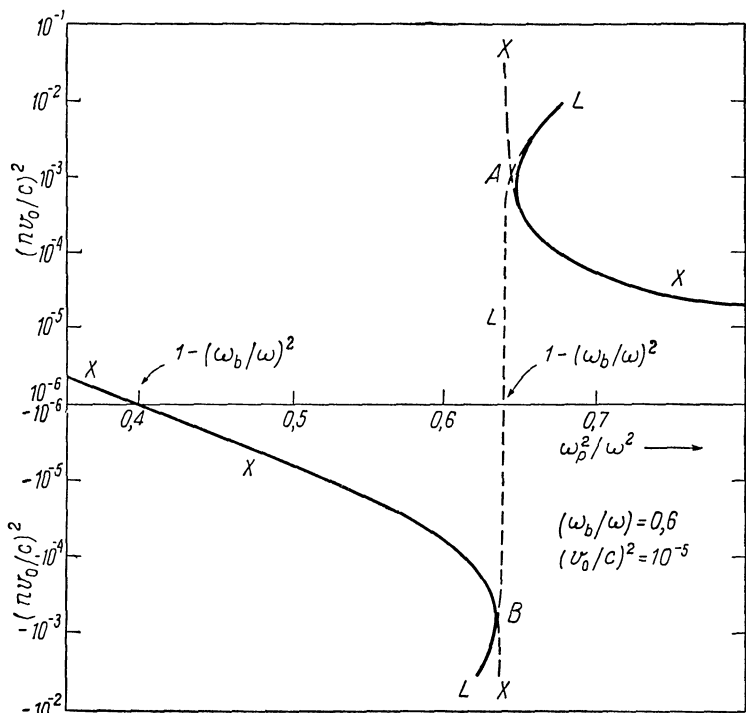
**Связь продольных и поперечных волн.** Большой интерес вызывает характер связи продольной волны с электромагнитным излучением, которое в конечном итоге детектируется антенной, расположенной вне плазмы. Драйсер [64] экспериментально продемонстрировал, что излучение на гармониках наблюдается только в том случае, если где-нибудь вдоль радиального профиля плотности плазмы удовлетворяется условие резонанса с верхней гибридной частотой:

$$\omega_p^2(r) + \omega_b^2 = \omega^2;$$

это, в общем, согласуется с тем фактом, что связь, действительно, возникает вблизи верхней гибридной частоты. Здесь у необыкновенной волны обнаруживается резонанс ( $k \rightarrow \infty$ ) и она становится практически продольной волной с  $k \parallel E$ ; у продольной волны обнаруживается отсечка ( $k \rightarrow 0$ ).

Связь этих двух волн качественно проиллюстрирована на фиг. 95, где приведена зависимость квадрата показателя преломления  $n^2$  для необыкновенной  $X$  и продольной  $L$  волн, распространяющихся перпендикулярно  $B_0$ , от плотности электронов. Выбран-





Фиг. 95. Зависимость квадрата показателя преломления необыкновенной  $X$  и продольной  $L$  волн от плотности электронов (из работы Ацеведо [351]).

Пунктирными линиями показаны характеристики несвязанных волн. Связь возникает около точек  $A$  и  $B$  и сплошные линии приблизительно иллюстрируют, как осуществляется связь между волнами.

ные значения  $\omega_b/\omega$  и  $(v_0/c)^2 \equiv \kappa T/(mc^2)$  являются типичными для экспериментов. Зависимость  $n^2(X)$  от  $\omega_p^2/\omega^2$  построена для приближения холодной плазмы (7.2), а зависимость  $n^2(L)$  от  $\omega_p^2/\omega^2$  на основании соотношения (7.33). Связь возникает около точек пересечения двух кривых. Сплошные кривые демонстрируют дисперсионные свойства связанных волн, а пунктирные — характеристики отдельных волн  $X$  и  $L$ . Как видно, связь возникает очень близко к верхней гибридной частоте. Ширина области между точками  $A$  и  $B$  на фиг. 95 в единицах  $\alpha^2$  определяется приближенной формулой

$$\frac{\Delta\alpha^2}{\alpha^2} \approx \frac{2\sqrt{3}\beta}{\sqrt{4\beta^2-1}} \left(\frac{v_0}{c}\right) \quad \text{для} \quad \frac{\Delta\alpha^2}{\alpha^2} \ll 1,$$

где

$$\alpha^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\omega_b}{\omega}.$$

Отметим, что необыкновенная волна отсекается (величина  $n^2$  отрицательная) в заметном диапазоне значений  $\omega_p^2(r)/\omega^2$ , и поэтому, после того как возникла связь  $X$  и  $L$ , необыкновенная волна должна путем туннельного перехода проходить запрещенную область (см. § 1 настоящей главы и фиг. 81б). Математическое обсуждение этой задачи проведено в работах [349—352].

Связь с электромагнитными волнами может также возникать на микроскопическом уровне из-за процессов рассеяния. В работе [353] теоретически исследовалось рассеяние продольных волн на ионных флуктуациях.

**Другие механизмы испускания на гармониках.** Генерация продольных волн надтепловыми электронами с последующим преобразованием этих волн в электромагнитные — не единственный механизм генерации на циклотронных гармониках. В ограниченной неоднородной плазме возможны другие механизмы, и два таких механизма были предложены.

Саймон и Розенблют [354] теоретически показали, что заметное излучение *поперечных* волн на гармониках возникает вблизи стенок и оболочек. Когда вращающийся электрон ударяется о стенку, он не совершает полного ларморовского оборота и при анализе Фурье пути электрона обнаруживается излучение, содержащее много гармоник. Аналогичный спектр возникает и в том случае, когда орбита электрона пересекает крутой градиент постоянного электрического поля, например в плазменной оболочке.

Кукес и Даусон [355] считают, что излучение обусловлено электронами с высокой энергией, вращающимися в «холодной плазме», играющей роль фоновой среды. Некоторые из вращающихся электронов проходят область верхней гибридной частоты, в которой электрическое поле почти полностью продольное ( $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$ ). Если верхняя гибридная область достаточно хорошо определена в пространстве (из-за неоднородности плотности), так что ее эффективная ширина меньше электронного ларморовского радиуса, то развиваются интенсивные плазменные колебания и возникает излучение на гармониках.

Необходимо упомянуть, что в настоящее время нет хорошего доказательства того, играет ли существенную роль в обсужденных экспериментах какой-либо из этих механизмов. Например, в экспериментах, проведенных с трубками весьма различных диаметров, в которых плазма как полностью, так и не полностью заполняла трубку, и в которых предполагалось возникновение весьма различных оболочек, излучение на гармониках оставалось в основном неизменным.

## Рассеяние электромагнитных волн на флуктуациях плотности

До сих пор мы пренебрегали эффектом *некогерентного* рассеяния волн на частицах плазмы. Хотя величина этого эффекта очень мала, мы, тем не менее, определяя спектр и угловое распределение рассеянного излучения, получаем большую информацию о плазме. В принципе такие измерения позволяют найти плотности электронов и ионов, их распределение по скоростям и спектральную плотность энергии флуктуаций в среде. Ниже предположим, что плазма является достаточно ионизованной, поэтому рассеянием излучения на нейтральных частицах можно пренебречь. Таким образом, рэлеевское и комбинационное рассеяние на атомах и молекулах не рассматриваются. Единственными существенными центрами рассеяния являются только электроны. Однако, поскольку движения электронов и ионов связаны между собой, ионы могут в некоторых случаях полностью определять спектр рассеянного излучения.

### § 1. Общая теория рассеяния

Рассмотрим вначале рассеяние на отдельном покоящемся заряде  $e$ . Под действием плоской монохроматической волны, электрический вектор которой

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 e^{i\omega_i t - i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}, \quad (8.1)$$

заряд испытывает ускорение

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \mathbf{E}_i. \quad (8.2)$$

Предполагается, что величина  $|\mathbf{E}_0|$  достаточно мала, а, значит, скорость заряда не достигает релятивистских значений.

Переизлученные (рассеянные) электрическое и магнитное поля на большом расстоянии  $R^1$ ) от заряда  $e$  определяются по

<sup>1)</sup> На всем протяжении этой книги мы предполагаем, что наблюдения проводятся в дальней или френгоферовой зоне области рассеяния, где происходит главным образом интерференция и дифракция волн, переизлученных отдельными рассеивателями. Такое допущение обычно называется приближением Борна.

формулам (3.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} [\hat{\mathbf{q}} \times (\hat{\mathbf{q}} \times \dot{\mathbf{v}})]_{t'}, \\ \mathbf{B}_s &= \frac{1}{c} \hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{E}_s, \\ t' &= t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\rho}}{c}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

где  $\hat{\mathbf{q}}$  — единичный вектор в направлении распространения (фиг. 18 и 96). Частота и длина волны рассеянного излучения совпадают с частотой и длиной волны падающего излучения. Если подставить (8.1) и (8.2) в (3.10), то получим энергию, рассеянную за 1 сек в единичный телесный угол  $d\Omega$ :

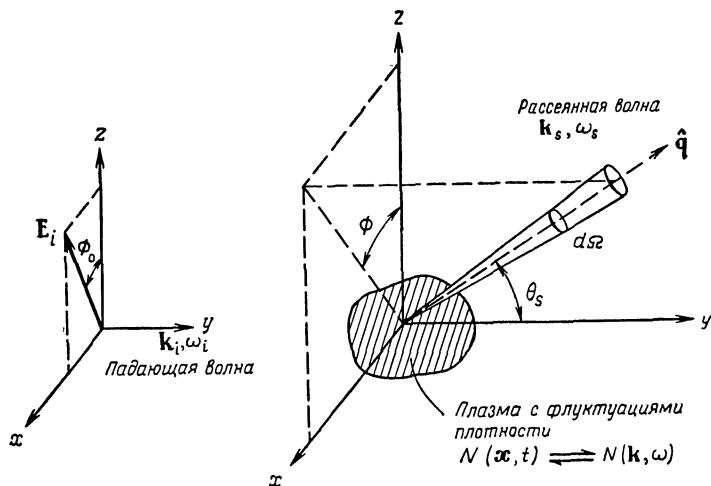
$$\frac{dW}{dt d\Omega} = |\mathbf{S}_i| r_0^2 \left| \hat{\mathbf{q}} \times \left( \hat{\mathbf{q}} \times \frac{\mathbf{E}_0}{|E_0|} \right) \right|^2. \quad (8.4)$$

Здесь  $|\mathbf{S}_i|$  — модуль вектора Пойнтинга падающей волны и  $r_0^2$  — квадрат классического радиуса электрона:

$$r_0^2 = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 = 7,94 \times 10^{-30} \text{ м}^2. \quad (8.5)$$

Отметим, что рассеяние на ионе меньше в  $(M/m)^2$  раз, поэтому необходимо рассматривать рассеяние только на электронах.

Двойное векторное произведение (квадрат его модуля) в выражении (8.4) описывает угловую зависимость рассеянного излу-



Фиг. 96. Система координат, используемая при расчетах рассеяния излучения на плазме.

чения. В системе координат, представленной на фиг. 96, его можно записать следующим образом:

$$\left| \hat{\mathbf{q}} \times \left( \hat{\mathbf{q}} \times \frac{\mathbf{E}_0}{|E_0|} \right) \right|^2 = 1 - \left| \hat{\mathbf{q}} \cdot \frac{\mathbf{E}_0}{|E_0|} \right|^2 = 1 - \sin^2 \theta_s \cos^2 (\phi_0 - \phi). \quad (8.6)$$

Двойное векторное произведение под знаком модуля определяет направление электрического поля рассеянной волны. Угол  $\theta_s$  называется углом рассеяния. Теперь выражение (8.4) принимает вид

$$\frac{dW}{dt d\Omega} = |S_i| \sigma_T (\theta_s), \quad (8.7)$$

где  $\sigma_T$  — томсоновское дифференциальное эффективное сечение рассеяния:

$$\sigma_T (\theta_s) = r_0^2 [1 - \sin^2 \theta_s \cos^2 (\phi_0 - \phi)]. \quad (8.8)$$

Видно, что  $\sigma_T$  не зависит от частоты. Когда падающая волна обладает хаотической поляризацией, множитель в квадратных скобках в (8.8) следует заменить на величину  $(1 + \cos^2 \theta_s)/2$ . Интегрируя по всем телесным углам  $d\Omega$ , получаем полное эффективное сечение

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 6,65 \times 10^{-29} \text{ м}^2. \quad (8.9)$$

В плазме с такой большой плотностью электронов как  $10^{19} \text{ см}^{-3}$  средний свободный пробег до рассеяния  $(N\sigma_T)^{-1}$  будет порядка 1 км! Это указывает на то, что вероятность множественного рассеяния в лабораторной плазме весьма мала, и требуются достаточно эффективные источники света для предотвращения «забивания» слабого рассеянного сигнала спонтанным излучением от плазмы; кроме того, сигнал должен быть достаточно интенсивным, чтобы его можно было измерять имеющимися в наличии детекторами.

Эти вычисления относятся к рассеянию на отдельном покоящемся электроне. На первый взгляд из них следует, что если имеется  $NV$  электронов, хаотически распределенных по всему объему  $V$ , то мощность рассеянного излучения просто равна  $NVS_i\sigma_T$ . Такое заключение является, однако, ошибочным и в действительности полная мощность рассеянного излучения равна нулю. Это легко продемонстрировать следующим образом. Возьмем очень тонкий плоский слой электронов, граница которого перпендикулярна вектору  $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s)$ . Все электроны в этом случае излучают в направлении  $\mathbf{k}_s$  в одной фазе. Теперь выберем второй слой, параллельный первоначальному и отстоящий на расстоянии  $\pi/|\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s|$ . Если оба слоя содержат одинаковое число электронов, то сигналы в точности погашаются. Это справедливо для любой пары таких слоев.

Тот факт, что рассеяние имеет место, всецело обусловлен флуктуациями плотности, которые приводят к неравенству числа

электронов в соответствующих слоях. Имеется, грубо говоря, два типа флуктуаций: «хаотические» флуктуации плотности, для которых корень квадратный из среднеквадратичного значения (см. работу [7]) вычисляется по формуле

$$\sqrt{\langle N^2(x, t) \rangle} \approx \sqrt{\frac{N}{V}}, \quad (8.10)$$

и флуктуации, вызванные коллективным возбуждением продольных плазменных волн. С иллюстративной целью рассмотрим только первые. Если  $V$  — объем каждого из двух слоев, разность их электронных «населенностей» равна  $\sqrt{N/V}$  и поэтому результирующая амплитуда рассеянного сигнала пропорциональна  $\sqrt{N/V}$ . Мощность рассеянного излучения пропорциональна квадрату этой величины и, следовательно, пропорциональна средней плотности электронов  $N$ . Движение зарядов приводит к «размазыванию» частоты рассеянного излучения и изучение этого спектра является основной задачей как теории, так и эксперимента. Детали спектральных характеристик излучения обсуждаются в последующих разделах. Сейчас наша задача — вывести общую формулу, связывающую спектр мощности рассеянного излучения со спектром флуктуаций плотности.

Изотропная плазма освещается монохроматической волной, описываемой выражением (8.1); предполагается, что частота волны  $\omega_i$  значительно больше электронной плазменной частоты, что обеспечивает проникновение. Электроны распределены в пространстве с плотностью

$$N(\rho, t) = \sum_n \delta(\rho - \rho_n(t)), \quad (8.11)$$

где  $\rho_n(t)$  — координата  $n$ -го электрона. Тогда, используя (8.1) — (8.3) и (8.11) для электрического поля рассеянной волны, имеем

$$\mathbf{E}_s = \frac{r_0}{R} \int d^3\rho N(\rho, t) e^{i(\omega_i t' - \mathbf{k}_i \cdot \rho)} [\hat{\mathbf{q}} \times (\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{E}_0)], \quad (8.12)$$

где суммирование по частицам заменено интегрированием. Для получения мгновенного вектора Пойнтинга рассеянного излучения нужно векторно перемножить  $\mathbf{E}_s$  и  $\mathbf{H}_s$ . Спектр мощности можно затем найти, усредняя по времени, как описано в § 4 гл. 2 и § 1 гл. 3. Тогда получим, что усредненная по времени мощность рассеянного излучения на единичный телесный угол  $d\Omega$  на единичный интервал круговых частот  $d\omega_s$  (взятый для положительных частот) определяется уравнением

$$\left\langle \frac{dW}{dt d\Omega d\omega_s} \right\rangle = \epsilon_0 c r_0^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} \left| \iint dt d^3\rho N(\rho, t) e^{i(\omega_i - \omega_s) t - i(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \rho} \times \right. \\ \left. \times [\hat{\mathbf{q}} \times (\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{E}_0)] \right|^2. \quad (8.13)$$

Здесь  $\omega_i$ ,  $\mathbf{k}_i$  и  $\omega_s$ ,  $\mathbf{k}_s$  — частоты и волновые векторы падающей и рассеянной волн соответственно (если  $\omega_i \gg \omega_p$ , то  $|\mathbf{k}_i| = \omega_i/c$  и  $|\mathbf{k}_s| = \omega_s/c$ ).

Флуктуирующую электронную плотность  $N(\mathbf{r}, t)$  можно подвергнуть временному и пространственному анализу Фурье:

$$N(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int d^3k d\omega N(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (8.14)$$

где  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  — частота и волновой вектор компоненты плоской волны флуктуации. Подставив (8.14) в (8.13) и проинтегрировав, придем к выражению

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dW}{dt d\Omega d\omega_s} \right\rangle &= \epsilon_0 c r_0^2 |\hat{\mathbf{q}} \times (\hat{\mathbf{q}} \times \mathbf{E}_0)|^2 \times \\ &\times \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi T} |N(\mathbf{k} = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i; \omega = \omega_s - \omega_i)|^2. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Теперь можно записать этот результат [по аналогии с (8.7)] в виде

$$\left\langle \frac{dW}{dt d\Omega (d\omega/2\pi)} \right\rangle = NV |\mathbf{S}_i| \sigma(\omega, \theta_s). \quad (8.16)$$

Здесь  $N$  — средняя плотность и  $\sigma$  — поперечное сечение рассеяния, определяемое выражением

$$\sigma(\omega, \theta_s) = r_0^2 (1 - \sin^2 \theta_s \cos^2(\phi_0 - \phi)) S(\mathbf{k}, \omega) = \sigma_T(\theta_s) S(\mathbf{k}, \omega), \quad (8.17)$$

где

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} \frac{2}{TV} \frac{|N(\mathbf{k}, \omega)|^2}{N} \quad (8.18)$$

— спектральная плотность электронных флуктуаций. Этим завершаются расчеты. Выводы подобного рода имеются, например, в работах [359, 360]. Отметим, что частоты и волновые векторы должны удовлетворять условиям, выражающим сохранение энергии и импульса, соответственно:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_s - \omega_i, \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Зная  $S(\mathbf{k}, \omega)$  для данной системы и используя (8.19), можно полностью определить угловое распределение и спектр частот рассеянного излучения.

В вышеприведенном выводе были опущены два эффекта. Когда частоты  $\omega_i$  и  $\omega_s$  близки к плазменной частоте  $\omega_p$ , диэлектрическое экранирование изменяет данные результаты. Дополнительно мы предположили, что изменение частоты при рассеянии,  $\Delta\omega = |\omega_s - \omega_i|$ , мало по сравнению с  $\omega_i$ . Показано (см., например,

работу [165]), что оба ограничения снимаются, если умножить правую часть (8.17) на величину

$$\frac{\omega_s^2}{\omega_i^2} \frac{n(\omega_s)}{n(\omega_i)},$$

где

$$n(\omega_s) = \left[ 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega_s} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{и} \quad n(\omega_i) = \left[ 1 - \left( \frac{\omega_p}{\omega_i} \right)^2 \right]^{1/2}$$

— показатели преломления рассеянной и падающей волн соответственно. Заметим также, что теперь модуль вектора Пойнтинга падающей волны, входящий в (8.16), содержит показатель преломления и имеет вид

$$|\mathbf{S}_i| = \frac{c}{2} \varepsilon_0 n(\omega_i) |\mathbf{E}_0|^2.$$

**Коэффициенты «поглощения» и «испускания» для рассеяния.** Эффект множественного рассеяния может играть существенную роль в телах астрономических размеров. Интенсивность излучения вдоль данного луча лучше всего вычислять с помощью уравнения переноса (1.133). Для этого нужно определить соответствующие коэффициенты поглощения и испускания для рассеяния.

В процессе рассеяния энергия не уходит из поля излучения, хотя теряется из пучка излучения. Пучок излучения, падающий на элемент объема, только отклоняется от своего первоначального направления распространения, что воспринимается наблюдателем как уменьшение интенсивности луча. Для определения уменьшения интенсивности луча, проходящего в направлении  $\mathbf{s}$ , нужно проинтегрировать эффективное сечение рассеяния по всем углам рассеяния. Результат можно записать в виде

$$dI_\omega = -\alpha_s I_\omega ds,$$

где

$$\alpha_s = N \int_{4\pi} \sigma(\Theta) d\Omega$$

— коэффициент «поглощения» для рассеяния; его размерность —  $m^{-1}$ ;  $\sigma$  — эффективное сечение рассеяния и  $\Theta$  — угол между падающим и рассеянным пучками излучения<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Здесь мы пренебрегаем эффектами поляризации рассеянного излучения, которые следует учитывать при более полном рассмотрении проблемы. Это удобно сделать с помощью параметров Стокса, обсужденных в § 4 гл. 1 (см. работы [39, 361]). Здесь мы также пренебрегаем малым изменением частоты рассеянной волны [см. (8.19)], которое вызывает смещение излучения в другие интервалы частот.



В процессе рассеяния не только теряется энергия из пучка излучения, но одновременно увеличивается интенсивность излучения, так как излучение, отклоненное от других направлений, попадает в исследуемый пучок. Легко показать с помощью формулы (8.16), что эффективный коэффициент испускания  $j_s$  определяется выражением

$$j_s = N \int_{4\pi} \sigma(\Theta) I_\omega(\Theta) d\Omega.$$

Размерность  $j_s$  —  $\text{вт}/\text{м}^3$  на единичный интервал круговых частот  $d\omega$  на единичный телесный угол  $d\Omega$  [ср. с (1.132)].

Из приведенных выражений видно, что испускание является по существу поглощением, усредненным по всем направлениям. Сколько среда «испускает», столько и «поглощает». Поэтому если  $j_s$  и  $\alpha_s$  подставить в уравнение переноса (1.133) и определить с помощью формулы (1.101) поток  $F_\omega$ , то найдем, как и ожидали,

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_\omega = 0.$$

Функция источника

$$S_s \equiv \frac{j_s}{\alpha_s} = \frac{\int \sigma(\Theta) I_\omega(\Theta) d\Omega}{\int \sigma(\Theta) d\Omega}$$

для среды, в которой преобладает рассеяние, как видно, по характеру совершенно отлична от функции источника (2.37) для среды, в которой излучение спонтанно возникает и имеется истинное поглощение веществом. В последнем случае отношение  $j/\alpha$  определяется законом Кирхгофа и в термически равновесной среде это отношение является универсальной функцией частоты и температуры. Однако в чисто рассеивающей среде отношение  $j/\alpha$  представляет собой функцию интенсивности излучения в рассматриваемой точке (более подробное рассмотрение приведено в книге [39]).

Хорошим примером рассеяния в астрономическом объекте является солнечная корона. Часть наблюдаемого спектра испускания обусловлена рассеянием солнечного света на электронах. Здесь мы находим, что член  $\alpha_s I_\omega$ , описывающий «поглощение» в уравнении переноса, пренебрежимо мал по сравнению с членом, описывающим «испускание», так что интенсивность излучения на Земле получается путем интегрирования  $j_s$  вдоль направления луча:

$$I_\omega = \int j_s ds.$$

Это уравнение и данные, связанные с измерениями яркости света короны, используются для определения распределения плотности электронов в короне (см., например, работу [362]).

## § 2. Спектр флуктуаций плотности $S(\mathbf{k}, \omega)$

Многие авторы рассчитывали спектр флуктуаций электронной плотности как в термически равновесной, так и в неравновесной плазме. Первые работы [363—365] относились в основном к флуктуациям в термически равновесной плазме. Исторически эти исследования были стимулированы измерениями обратного рассеяния радиолокационных сигналов от ионосферы, проведенными Боулесом [366]. В результатах его измерений содержалась существенная особенность: доплеровское уширение рассеянного сигнала характеризовало тепловое движение ионов, а не тепловое движение электронов, хотя рассеяние происходило на электронах. В работе Гордона [367], в которой такой эксперимент впервые был предложен, подобная особенность не ожидалась и ее нельзя объяснить рассеянием на незранированных электронах.

Введем спектральную функцию  $S(\mathbf{k}, \omega)$  для изотропной бесстолкновительной плазмы, состоящей из электронов и ионов одного сорта, с произвольной функцией распределения частиц по скоростям. Будем придерживаться приближения «одетой» пробной частицы (§ 6 гл. 4), введенного Томпсоном (см. работу [368]).

Как было показано в § 6 гл. 4, пробный заряд  $q_i$  (электрон или ион), распределенный с плотностью

$$\rho_i(\mathbf{r}, t) = q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)), \quad (8.20)$$

создает продольное электрическое поле, фурье-компонента которого имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{jk}{|k|^2 \varepsilon_0 K_L(k, \omega)} \rho_i(\mathbf{k}, \omega), \quad (8.21)$$

где  $\rho_i(\mathbf{k}, \omega)$  — компонента спектральной плотности заряда; она вычисляется по формуле

$$\rho_i(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi q_i \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i) e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0i}}. \quad (8.22)$$

Тогда полное электрическое поле, создаваемое всеми зарядами плазмы в некоторой точке, определяется выражением

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{jk}{|k|^2 \varepsilon_0 K_L(k, \omega)} \sum_i 2\pi q_i \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i) e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0i}}. \quad (8.23)$$

Однако это «поляризационное» поле оказывает обратную реакцию на заряды и вызывает дополнительное возмущение. Если подставить (8.23) в (4.80), то получим возмущение функции распределения электронов по скоростям:

$$f_1 = - \frac{(-e/m) [\mathbf{k} \cdot \partial f(\mathbf{v}) / \partial \mathbf{v}]}{|k|^2 \varepsilon_0 K_L(k, \omega)} \frac{\sum_i 2\pi q_i \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i) e^{j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0i}}}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}, \quad (8.24)$$

где  $f(\mathbf{v})$  — функция невозмущенного распределения.

Для фурье-спектра флуктуаций электронной плотности имеем

$$N(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi \sum_{\text{Электроны}} \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0i}} + \int f_1 d^3v, \quad (8.25)$$

где первый член — просто вклад от неэкранированных электронов, а второй член обусловлен экранированием.

Подставим теперь (8.24) в (8.25) и разделим сумму по  $i$  на члены, обусловленные пробными электронами и пробными ионами одного сорта с зарядом  $+e$ . Используем знак «+» для обозначения величин, связанных с ионами. Тогда результат будет удобно записать через параметр  $\mathcal{P}(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{\omega_p^2}{k^2} \int d^3v \frac{\mathbf{k} \cdot \partial f(v)/\partial v}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}, \\ \mathcal{P}^+(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{\omega_p^{+2}}{k^2} \int d^3v^+ \frac{\mathbf{k} \cdot \partial f^+(v)/\partial v^+}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}^+}, \quad (\omega_p^+)^2 = \frac{Ne^2}{M\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Отсюда для  $N(\mathbf{k}, \omega)$  находим

$$\begin{aligned} N(\mathbf{k}, \omega) &= 2\pi \left[ \frac{1 + \mathcal{P}^+}{1 + \mathcal{P} + \mathcal{P}^+} \right] \sum_i \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0i}} + \\ &+ 2\pi \left[ \frac{\mathcal{P}}{1 + \mathcal{P} + \mathcal{P}^+} \right] \sum_i \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i^+) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0i}^+}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Здесь используется то обстоятельство, что продольный диэлектрический коэффициент (4.83) определяется формулой

$$K_L(k, \omega) = 1 + \mathcal{P} + \mathcal{P}^+. \quad (8.28)$$

Отсюда ясно, что параметры  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}^+$  — электрические восприимчивости свободных электронов и свободных ионов соответственно. На первый взгляд видна резко выраженная асимметрия в формуле (8.27): кажется, что эти восприимчивости видоизменяют по-разному вклады от электронов и ионов в величину  $N(\mathbf{k}, \omega)$ . Однако это различие, действительно, — скорее кажущееся, чем реальное, поскольку член в первых квадратных скобках в (8.27) можно также записать в виде

$$1 - \frac{\mathcal{P}}{1 + \mathcal{P} + \mathcal{P}^+}.$$

Это указывает на существенное сходство между двумя множителями в квадратных скобках. Член «1» связан с флуктуациями в отсутствие экранирования.

Спектр флуктуаций электронной плотности  $N(\mathbf{k}, \omega)$  можно интерпретировать так, как будто он обусловлен движением пробных

электронов, окруженных своими экранирующими облаками из электронов и ионов, и движением пробных ионов, окруженных своими облаками из электронов и ионов. Однако рассеяние обусловлено только электронами.

Попутно отметим, что если бы вычислялся спектр флуктуаций положительного заряда  $N^+(\mathbf{k}, \omega)$ , то мы получили бы то же самое выражение, как (8.27), но только с переставленными электронным и ионным членами. Тогда полную плотность заряда

$$\rho_{\text{полн}}(\mathbf{k}, \omega) = -eN(\mathbf{k}, \omega) + eN^+(\mathbf{k}, \omega) \quad (8.29)$$

можно записать в виде

$$\frac{\rho_{\text{полн}}(\mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi}{\varepsilon_0 K_L(k, \omega)} \sum_i \left[ -e\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0i}} + e\delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i^+) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{0i}^+} \right]. \quad (8.30)$$

Подставив (8.30) в уравнение Пуассона

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{полн}}}{\varepsilon_0},$$

получим электрическое поле, определяемое (8.23), что указывает на самосогласованность расчетов.

Спектральную плотность мощности  $S(\mathbf{k}, \omega)$  можно получить из формулы (8.18), зная  $|N(\mathbf{k}, \omega)|^2$ . До сих пор при вычислении сумм, стоящих в правой части формулы (8.27), мы предполагали статистическую независимость одетых пробных частиц (§ 6 гл. 4). Далее, используя также то, что для заданной функции  $\chi(\mathbf{v})$

$$\sum_i \chi(\mathbf{v}) = NV \int d^3v \chi(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}), \quad (8.31)$$

окончательно получаем

$$(4\pi)^{-1} S(\mathbf{k}, \omega) = \left| \frac{1 + \mathcal{P}^+}{1 + \mathcal{P} + \mathcal{P}^+} \right|^2 \int f(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d^3v + \left| \frac{\mathcal{P}}{1 + \mathcal{P} + \mathcal{P}^+} \right|^2 \int f^+(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}^+) d^3v^+, \quad (8.32)$$

где интегралы  $\int f d^3v$ , в которые входят функции распределения по скоростям, нормированы на единицу. Все члены в правой части уравнения (8.32) можно (в принципе) вычислить для данной произвольной функции распределения электронов и ионов. В работе [359] имеется формальный вывод уравнения (8.32) на основе теории Боголюбова — Борна — Грина — Кирквуда — Ивона. Даугерти и Фарлей в работе [363] привели изящный вывод для термодинамически равновесной плазмы, в котором используется теорема

Найквиста (§ 1 гл. 4). Они показали, что при одинаковой температуре  $T$  электронов и ионов

$$(4\pi)^{-1} S(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\kappa T}{4\pi\omega} \frac{k^2 \epsilon_0}{Ne^2} \operatorname{Im} \left[ \frac{\mathcal{P}(1 + \mathcal{P}^+)}{1 + \mathcal{P} + \mathcal{P}^+} \right]; \quad (8.32a)$$

этот результат сразу следует из уравнения (8.32), если считать, что  $f$  и  $f^+$  — максвелловские функции распределения, и использовать (4.120). Пренебрегая движением ионов (в этом случае  $\mathcal{P}^+ \rightarrow 0$ ), получаем спектр флуктуаций плотности в «электронной» плазме, который уже обсуждался в § 5 гл. 4 (фиг. 38). Тогда множитель  $\operatorname{Im} [ \ ]$ , входящий в формулу (8.32a), сводится к обычному множителю  $-\operatorname{Im} [1/K_L(k, \omega)]$ . Следует также отметить, что формула (8.32a) справедлива только для низкочастотных флуктуаций  $\hbar\omega \ll \kappa T$ . Для получения точной формулы, применимой также и в квантовом пределе, необходимо в (8.32a) произвести следующую замену (см. работу [163] и формулы (4.28) и (4.30)):

$$\frac{\kappa T}{\omega} \rightarrow \frac{\hbar}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2\kappa T}.$$

Эти расчеты не справедливы при наличии магнитного поля. Однако формальная аналогия между спектральной плотностью мощности при наличии и при отсутствии магнитного поля [ср. (4.110) и (7.55)] позволяет предположить, что подобная аналогия может иметь место и для спектральной плотности флуктуаций  $S(\mathbf{k}, \omega)$ . Розенблют и Ростокер [359] показали, что это действительно так. Уравнение (8.32) сохраняет свой вид, если

$$\int f(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d^3v \rightarrow \int \sum_n J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_b} \right) \delta(\omega - n\omega_b - k_{\parallel} v_{\parallel}) f(\mathbf{v}) d^3v, \quad (8.33)$$

а параметры  $\mathcal{P}$ , входящие в выражение для  $K_L$ , можно заменить соответствующими величинами из (7.22). Аналогичная замена делается и в ионных членах уравнения (8.32).

В следующем параграфе обсуждается спектр  $S(\mathbf{k}, \omega)$  для некоторых специальных случаев в термически равновесной и неравновесной плазме.

### § 3. Рассеяние на неэкранированных электронах

Рассмотрим плазму, в которой электроны и ионы имеют приблизительно максвелловское распределение по скоростям. Параметры  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}^+$ , входящие в выражение (8.27), по порядку величины равны  $|\mathbf{k}L_D|^{-2}$ , где  $L_D$  — дебаевский радиус, а  $\mathbf{k}$  — волновой вектор продольных колебаний [напомним, что вектор  $\mathbf{k}$  связан

с волновыми векторами падающей и рассеянной волн, см. выражение (8.19)]. Если величина  $\beta$ , определяемая как

$$\beta \equiv \frac{1}{|kL_D|} \approx \frac{1}{|2k_{\perp}L_D \sin(\theta/2)|}, \quad (8.34)$$

много меньше единицы, в плазме не могут развиваться коллективные колебания. Выражение для спектральной функции  $S(\mathbf{k}, \omega)$  принимает простой вид

$$S(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi \int f(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) d^3v. \quad (8.35)$$

Отсюда непосредственно следует, что при максвелловской функции распределения электронов по скоростям форма спектра рассеянного излучения является гауссовой [ср. (6.25)]:

$$S(\mathbf{k}, \omega) = S_0(\omega = 0) e^{-\omega^2/\Delta^2}, \quad (8.36)$$

где

$$S_0(\omega = 0) = \frac{V\sqrt{8\pi}}{kv_0},$$

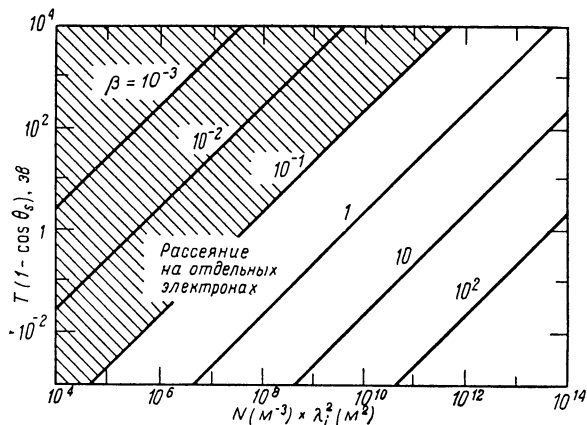
$$\int_0^{\infty} S(k, \omega) d\frac{\omega}{2\pi} = 1,$$

$$\Delta = 2\sqrt{2}v_0 \left(\frac{\omega_i}{c}\right) \sin\frac{\theta_s}{2}, \quad v_0^2 = \frac{\kappa T}{m}.$$

Это именно то, что и ожидалось при доплеровском уширении рассеянного излучения отдельными незранированными электронами. Полное эффективное сечение рассеяния, проинтегрированное по частоте (но не по телесному углу), является классической величиной, определяемой формулой (8.8).

Как уже упоминалось, такой тип спектра возникает, когда величина  $\beta$  [см. (8.34)] много меньше единицы. На фиг. 97 показан диапазон электронных плотностей и температур, в котором возникает такое рассеяние (заштрихованная область). Вне заштрихованной области существенную роль начинают играть коллективные эффекты. Отметим, что коллективные эффекты сильнее проявляются при малых, чем при больших углах рассеяния, поэтому, сделав  $\theta_s$  достаточно малым, можно наблюдать коллективное рассеяние даже в довольно разреженной плазме. Экспериментальные трудности препятствуют измерениям при углах, много меньших  $1^\circ$ .

Вероятно, первое наблюдение рассеяния на свободных электронах в лабораторных условиях провели Фиоко и Томпсон [369], которые детектировали свет от рубинового лазера, рассеянный на  $\theta_s = 90^\circ$  электронным пучком (ток 100 ма и энергия 2 кэв). С тех пор многие исследователи сообщали об экспериментах, выполненных на лабораторной плазме. На фиг. 98 показана типичная эк-



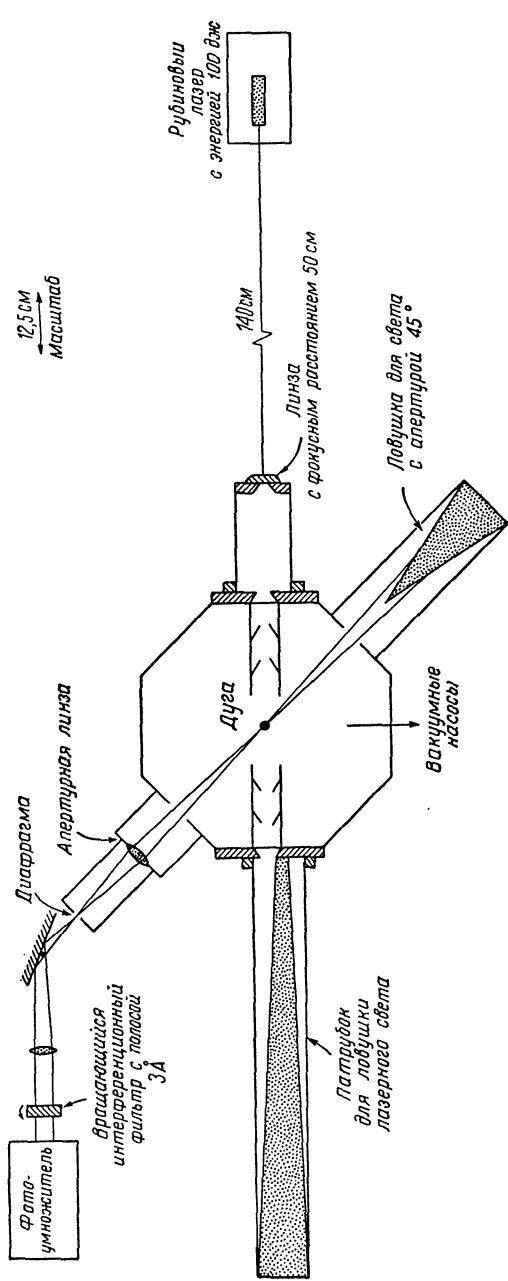
Фиг. 97. Зависимость  $T(1 - \cos \theta_s)$  от  $N \lambda_i^2$  для различных постоянных значений  $\beta \equiv 1/|kL_D|$  (из работы Джерри и Роуза [370]).

$T$  — электронная температура;  $\theta_s$  — угол рассеяния;  $N$  — плотность;  $\lambda_i$  — длина волны падающего излучения.

спериментальная установка [370]. В качестве источника плазмы здесь использовался [371] дуговой разряд с полым катодом. Разряд образовывал столб высокоионизованной плазмы диаметром около 1 см с плотностью электронов от  $10^{13}$  до  $10^{14}$  см<sup>-3</sup> и температурами электронов от 2 до 10 эв. Столб был помещен в аксиальное магнитное поле около 500 гс.

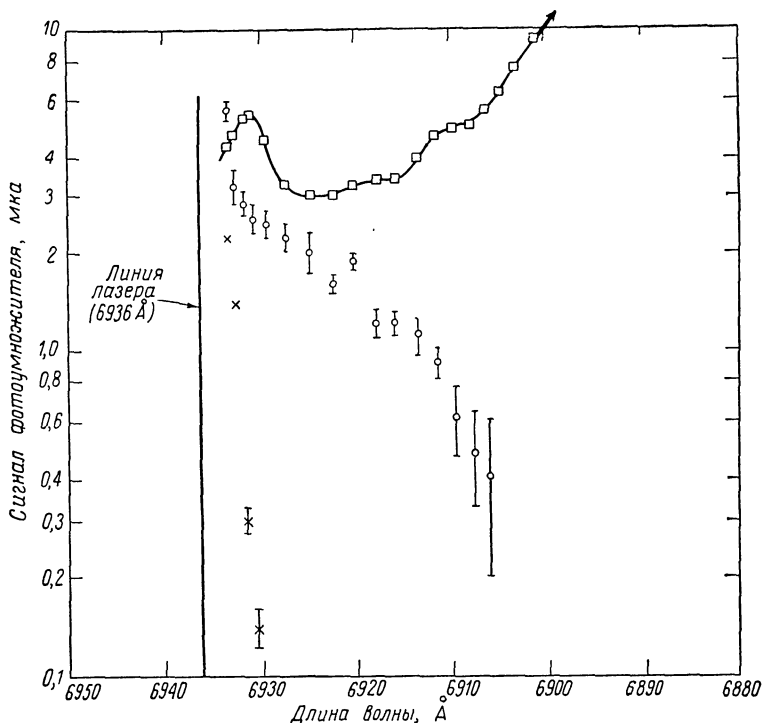
Параллельный пучок света от рубинового лазера с энергией 100 дж фокусировался в дуговом столбе и рассеянный свет после прохождения узкополосного фильтра варьруемой частоты принимался фотоумножителем. Необходимо соблюдать различные меры предосторожности для сведения к минимуму паразитного рассеяния света. Для этой цели используются «световые ловушки», показанные на фигуре. Для дальнейшего увеличения отношения сигнала к шуму используется поляризатор, расположенный перед фильтром (на фигуре не показан). Абсолютная калибровка всей аппаратуры осуществляется путем измерения рэлеевского рассеяния на атомах; с этой целью экспериментальная камера наполняется нейтральным газом.

Типичные экспериментальные результаты приведены на фиг. 99. Крестиками представлены результаты измерений паразитного света в отсутствие плазмы или газа, квадратиками — спонтанное световое излучение ионизованного газа. Вычитая нежелательные сигналы, получаем хорошее согласие с предсказанной доплеровской формой линии. Поскольку абсолютную величину мощности рассеянного излучения мы определили, можно вычислить как



Ф и г. 98. Схема эксперимента, в котором исследовалось томсоновское рассеяние (из работы Джерри и Роуза [370]).  
 Ось плазменного столба перпендикулярна плоскости рисунка. Ловушки лазерного света выполнены в виде конусов из зачерненного алюминия.





Фиг. 99. Необработанные данные по рассеянию (из работы Джерри и Роуза [370]).

$\beta \ll 1$  и коллективные эффекты не существенны. Кружочки — сигнал при наличии плазмы; крестики — сигнал в отсутствие плазмы; квадратики — фон излучения от плазмы.

плотность электронов, так и их температуру. Примечательно, что такая диагностическая техника позволяет измерять  $N$  и  $T$  практически в отдельной точке плазмы, в отличие от большинства других методов, в которых получают усредненные (по достаточно большому объему или по длине) значения этих величин.

Из выражений (8.19) и (8.35) видно, что электрон, имеющий скорость  $v$ , рассеивает на частоте

$$\omega_s = \omega_i - (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s) \cdot \mathbf{v}. \quad (8.37)$$

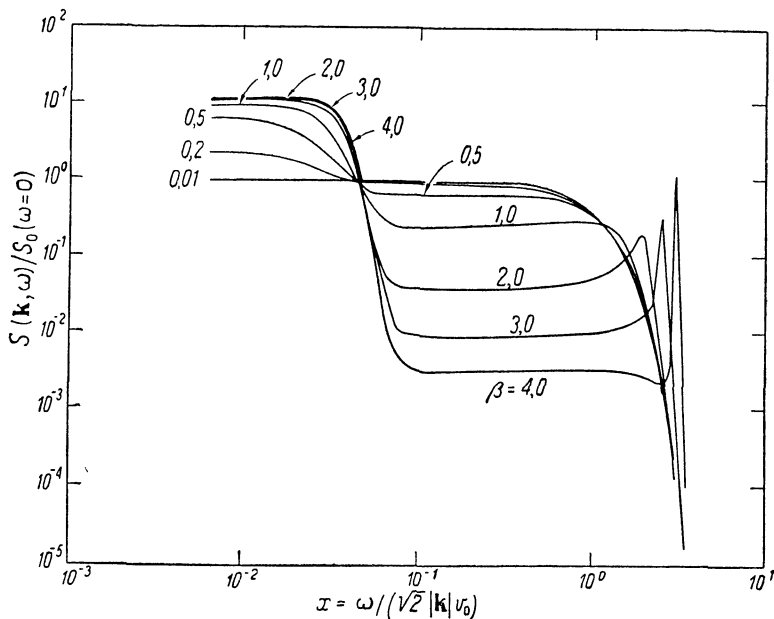
Для выбранного направления наблюдения мы получаем информацию относительно скоростей только в направлении  $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s)$ . Для определения анизотропии функции распределения электронов по скоростям требуется поэтому проводить измерения при нескольких различных углах рассеяния  $\theta_s$ .

Результаты измерений рассеяния в лабораторной плазме приведены в работах [372—377]. В большинстве из этих экспериментов исследуемая плазма была короткоживущей и имела относительно большую плотность — от  $10^{15}$  до  $10^{17}$   $\text{см}^{-3}$ . В некоторых случаях достигались значения  $\beta \gtrsim 1$ , и в спектре проявлялись коллективные эффекты, рассматриваемые в следующем параграфе.

#### § 4. Коллективные эффекты при рассеянии в термически равновесной плазме

Определим *здесь* термически равновесную плазму, как такую плазму, в которой электроны и ионы имеют максвелловское распределение, но не обязательно равные температуры.

Когда величина  $\beta = 1/|kL_D|$  порядка единицы или больше, у спектра появляется основная особенность, заключающаяся в том, что ширина линии теперь характеризует в большей степени тепловое движение иона, чем тепловое движение электрона (см.



Фиг. 100. Спектр рассеянного излучения, вычисленный по уравнению (8.32) для термически равновесной водородной (H) плазмы при равных температурах электронов и ионов (из работы Джерри и Патрика [378]).

Острые резонансы возникают на частотах и волновых числах, определяемых (приближенно) дисперсионным соотношением Бома и Гросса (5.78), которое можно записать в виде  $2x^2 = 3 + \beta^2$ . Плато на промежуточных частотах ( $0.1 \leq x \leq 1$ ) является частью электронной ветви, которая на низких частотах постепенно переходит в преобладающую ионную ветвь. Это плато и острый пик на высоких частотах, обусловленные электронными флуктуациями, те же самые, что и на фиг. 38.

§ 3 настоящей главы) и, следовательно, наблюдаемая линия более узкая (для  $T^+ \leq T$ ). Эта особенность объясняется тем, что рассеяние на частотах, близких к частоте падающей волны, обусловлено пробными частицами (окруженными своими экранирующими облаками), имеющими нулевые скорости [последнее следует из наличия  $\delta$ -функций в уравнении (8.32)]. Однако эффект от таких пробных ионов перевешивает эффект от пробных электронов в  $(M/\kappa T^+)^{1/2}/(m/\kappa T)^{1/2}$  раз. Поскольку (для  $\beta \approx 1$ ) поляризационные члены в (8.32) под знаком модуля теперь порядка единицы, второй член преобладает над первым, и поэтому спектральная линия является характеристикой ионных скоростей.

Числовой расчет спектральной функции  $S(\mathbf{k}, \omega)$  проведен в нескольких работах. На фиг. 100 приведены результаты расчетов [378] для водородной плазмы, состоящей из ионов  $H^+$ , причем температуры ионов и электронов одинаковые. По оси ординат отложена функция  $S(\mathbf{k}, \omega)$ , нормированная на  $S_0(\omega = 0)$ , где  $S_0(\omega = 0)$  — нормировочная постоянная, входящая в (8.36). Вдоль оси абсцисс отложен нормированный сдвиг частоты:

$$x = \frac{\omega}{\sqrt{2} |\mathbf{k}| v_0} = \frac{|\omega_i - \omega_s|}{\sqrt{2} |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s| v_0}, \quad v_0^2 = \frac{\kappa T}{m}; \quad (8.38)$$

это — та же самая величина, которая входит в выражение для диэлектрического коэффициента  $K_L(k, \omega)$  [см. (4.87)].

По мере увеличения  $\beta$  от очень малых значений форма основной части спектра изменяется от практически доплеровской линии, уширение которой определяет скорости электронов, до линии (при больших  $\beta$ ), характеризующей скорости ионов и имеющей ширину

$$\Delta\omega \approx |\mathbf{k}| v_0^+, \quad (v_0^+)^2 = \frac{\kappa T^+}{M}, \quad (8.39)$$

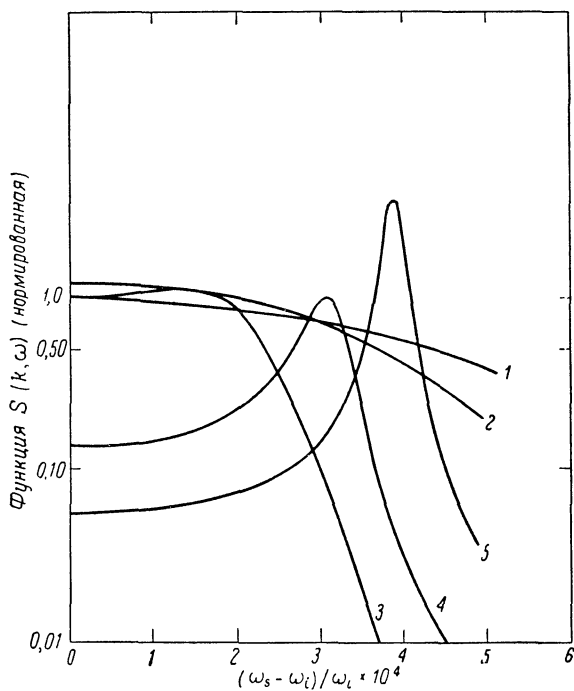
или

$$\omega_i - \omega_s \approx |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s| v_0^+.$$

Острый пик в дальнем конце спектра возникает вблизи и чуть выше электронной плазменной частоты

$$|(\omega_i - \omega_s)| \approx \omega_p;$$

он обусловлен возбуждением моды электронных плазменных колебаний. Появление этого пика совпадает с обращением в нуль величины  $\text{Re } K_L(k, \omega)$ , т. е. реальной части диэлектрического коэффициента  $K_L$ , квадрат модуля которого входит в знаменатели членов уравнения (8.32). Причина возникновения пика та же самая, которая уже обсуждалась в § 4 гл. 4 и § 1 гл. 5 в связи с тормозным излучением. Вклад этого пика приблизительно равен эффективному сечению рассеяния, умноженному на  $|\mathbf{k}L_D|^2$ , и поскольку



Фиг. 101а. Спектр рассеянного излучения для водородной плазмы при различных отношениях температуры электрона к температуре ионов (из работы Розенблюта и Ростокера [359]).

$N = 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ,  $k_l = 3,76 \text{ см}^{-1}$ ,  $\theta_s = \pi/2$ ,  $(\omega_p/\omega_i)^2 = 0,25$ . Электронные плазменные резонансы, показанные на фиг. 100, находятся далеко за пределами диапазона частот, представленного на данной фигуре. Функция рассеяния  $S(k, \omega)$  нормирована на  $S(k, \omega = 0)$  для плазмы с  $T = T^+$ .

Кривая	1	2	3	4	5
$T, \text{ эв}$	5	5	5	25	50
$T^+, \text{ эв}$	50	25	5	5	5

в большинстве экспериментов величина  $|kL_D|$  мала, его трудно заметить (см., однако, § 5 настоящей главы и недавние эксперименты [373, 379]).

Отметим, что спектр является симметричным относительно частоты падающей волны  $\omega_i$ . На фигуре показана только одна половина спектра падающей волны.

В спектре наблюдаются интересные изменения, если температуры электронов и ионов различаются. Когда  $T^+ > T$ , общий вид спектра существенно не изменяется. Однако при  $T^+ < T$  возникают дополнительные резонансы, как показано на фиг. 101а. Они появляются вблизи частоты и волнового числа, характеризующих ионно-звуковую моду колебания. Эта мода сильно затухает при  $T^+/T \geq 1$ , и, следовательно, она не проявляется при таких отношениях температур. Приближенное дисперсионное соотношение для этой волны можно записать в виде

$$\omega^2 = (\omega_p^+)^2 \frac{(kL_D)^2}{1 + (kL_D)^2}, \quad (8.40)^1$$

где  $L_D$  — по-прежнему дебаевский радиус для электронов и

$$(\omega_p^+)^2 = \frac{Ne^2}{Me_0}.$$

Таким образом, резонанс в рассеянном спектре возникает примерно на частоте

$$\omega_s \approx \omega_i + (\omega_p^+) |k| L_D = \omega_i + 2 \left( \frac{\omega_i}{c} \right) \sin \left( \frac{\theta_s}{2} \right) \omega_p^+ L_D. \quad (8.41)$$

Полное эффективное сечение рассеяния, проинтегрированное по всем частотам [380, 381], весьма приближенно определяется выражением

$$\sigma \approx \sigma_T \left\{ 1 - \frac{1}{1 + (kL_D)^2} + \frac{1}{1 + (kL_D)^2} \left[ 1 + \frac{T}{T^+} + (kL_D)^2 \right]^{-1} \right\}, \quad (8.42)^2$$

<sup>1</sup>) Этот результат получен при вычислении интегралов в (4.83) для электронов и ионов одного сорта в низкочастотном пределе. Соотношение справедливо только в области  $v_0^+ \ll \omega/k \ll v_0$ , где  $v_0$  и  $v_0^+$  — тепловые скорости электронов и ионов соответственно. Частота  $\omega$ , входящая в соотношение (8.40), имеет также малую мнимую часть, которая обусловлена затуханием Ландау на электронах. Скорость затухания  $\gamma$  (т. е. мнимая часть  $\omega$ ) определяется как

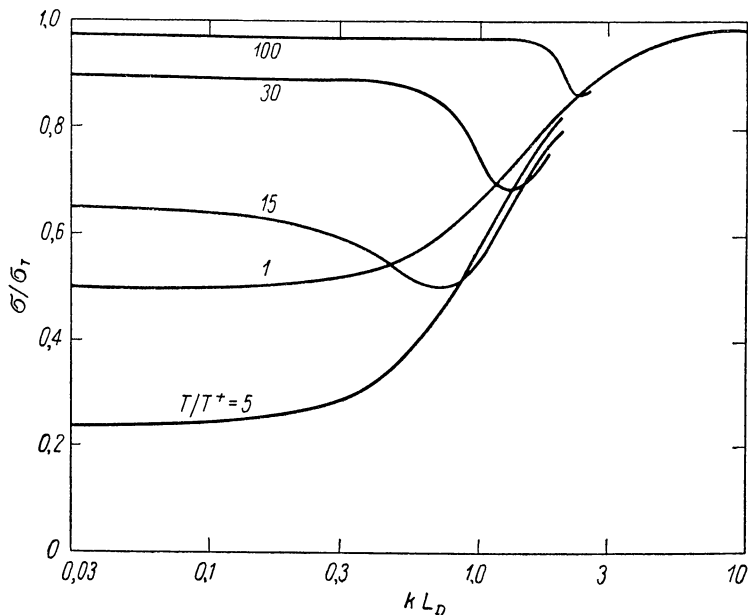
$$\gamma = \text{Re } \omega \left[ \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{m}{M^+}} \frac{1}{\{1 + (kL_D)^2\}^{3/2}} \right],$$

где  $\text{Re } \omega$  можно найти из соотношения (8.40).

<sup>2</sup>) Выражение (8.42) является точным при  $T = T^+$  и тогда оно принимает вид

$$\frac{\sigma}{\sigma_T} = \frac{1 + (kL_D)^2}{2 + (kL_D)^2}.$$

Когда  $T \neq T^+$ , уравнение является хорошим приближением при достаточно больших  $kL_D$ .



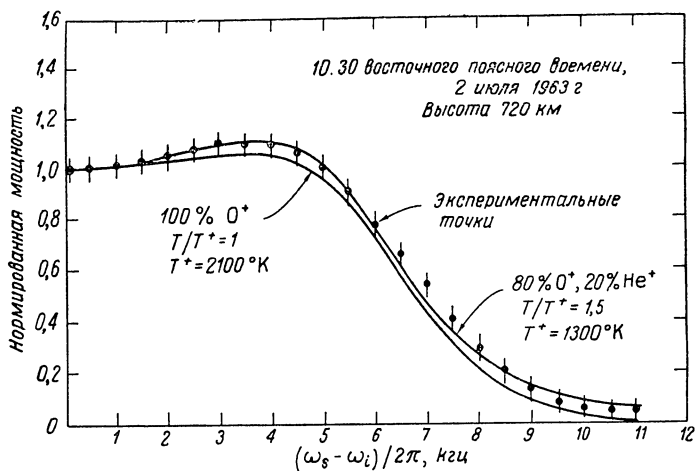
Фиг. 1016. Зависимость эффективного сечения рассеяния для водородной плазмы, проинтегрированного по частоте, от  $kL_D$  (из работы Муркрофта [381]):  $\sigma_T$  — томсоновское эффективное сечение рассеяния на отдельном электроны. Отметим, что с ростом отношения  $T/T^+$  эффективное сечение вначале уменьшается, а затем возрастает.

и имеет следующие предельные значения:

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \sigma_T, & (kL_D)^2 &\gg 1, \\ \sigma &\rightarrow \frac{\sigma_T}{1 + (T/T^+)}, & (kL_D)^2 &\ll 1. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Видно, что при  $T = T^+$  сечение  $\sigma$  равно половине классического эффективного сечения Томпсона. На фиг. 1016 приведены точные значения  $\sigma$ .

Вероятно, наиболее убедительные и удовлетворительные измерения проведены Ивэнсом и Ловенталем [382] при наблюдении обратного рассеяния от ионосферы. В экспериментах использовались параболическая антенна диаметром 70 м, направленная вертикально на ионосферу, и радар с мощностью в импульсе 2,5 Мвт и частотой 440 Мгц. На фиг. 102 приведен наблюдавшийся спектр. Отношение  $T^+/T$  можно определить, сопоставляя экспериментальную и теоретическую формы линий. Если известен состав ионов, то, измерив полную ширину линии, можно получить значение  $T^+$ .



Фиг. 102. Зависимость принимаемой мощности от разности частот  $\omega_s - \omega_i$  при обратном рассеянии от ионосферы (из работы Ивэнса и Лоевенталя [382]). Сплошные кривые — теоретические.

Рассеянный спектр становится более сложным в присутствии магнитного поля, особенно, если направление наблюдения  $\mathbf{k}_s$  перпендикулярно или почти перпендикулярно направлению  $\mathbf{B}_0$ . (Спектр не меняется, когда вектор  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s$  точно параллелен  $\mathbf{B}_0$ , поскольку тогда электрическое поле, связанное с продольными колебаниями, также ориентировано вдоль  $\mathbf{B}_0$ .) При определенных условиях можно обнаружить пики в интенсивности рассеяния, сдвинутые по частоте на величину, кратную электронной циклотронной частоте. Кроме того, резонансы могут возникать на ионной циклотронной частоте и на гибридной частоте  $(\omega_b \omega_b^+)^{1/2}$ . Теоретическое изучение таких эффектов проведено в работах [383—387].

Влияние на спектр электрон-атомных и электрон-ионных столкновений теоретически исследовано в работах [365, 388, 389].

В работе [390] приведена теория рассеяния с учетом релятивистских эффектов.

### § 5. Рассеяние на усиленных флуктуациях

В спектрах рассеянного излучения обнаруживается резонансное поведение на частотах и волновых числах, соответствующих естественным модам возбуждения плазмы [ $\text{Re } K(\mathbf{k}, \omega) = 0$ ]. Поэтому можно ожидать, что относительно малое отклонение распределения частиц по скоростям от максвелловского или малые возмущения системы на резонансных частотах вполне могут привести

к многократному усилению мощности рассеянного излучения. Такое усиление весьма желательно, поскольку мы вынуждены иметь дело с малым эффективным сечением рассеяния. Ниже описываются некоторые наблюдения такого усиления.

**«Электронная плазменная линия»** ( $\omega_s \approx \omega_i \pm \omega_p$ ). Электронная плазменная линия (см. фиг. 100) протестирована в серии экспериментов [391] по обратному рассеянию от ионосферы, проведенных в ионосферной обсерватории в Аресибо. В экспериментах использовались мощный передающий радар и большая антенна. Вертикально вверх излучался импульс мощностью 2,1 Мвт и длительностью 100 мксек; частота составляла 430 Мгц.

На фиг. 103 показана зависимость принятого сигнала (выраженного в единицах температуры, см. гл. 10) от высоты. Видны два пика; они соответствуют двум высотам с одинаковой плотностью электронов. Как хорошо известно, плотность с высотой вначале возрастает, а затем спадает; максимум находится на высоте примерно 270 км. Измерение частоты рассеянного сигнала — прекрасный способ определения плотности электронов при помощи дисперсионного соотношения Бома и Гросса, которое теперь записывается в виде

$$(\omega_i - \omega_s)^2 = \omega_p^2 + 3 |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s|^2 v_0^2 \approx \omega_p^2 + 12\omega_i^2 \left(\frac{v_0}{c}\right)^2. \quad (8.44)$$

Учет магнитного поля Земли приводит к малым поправкам [см. (7.42)].

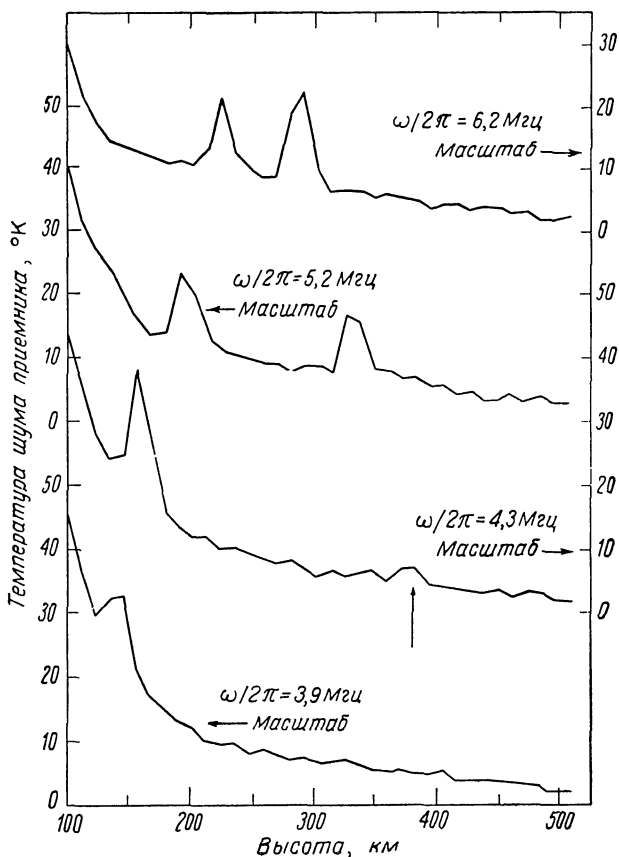
Полная энергия, соответствующая плазменной резонансной линии, более чем в 50 раз превышает энергию, которую можно было бы ожидать при максвелловском распределении скоростей. (Как указывалось в § 4 настоящей главы, эффективное сечение рассеяния для плазменной линии примерно равно полному эффективному сечению, умноженному на  $|kL_D|^2$ ; в этом эксперименте  $|kL_D|^2 \approx \approx 10^{-2}$ .) Такое усиление энергии рассеянного излучения приписывается избытку надтепловых электронов в хвосте распределения по сравнению с тем, что мы имеем в хвосте максвелловского распределения. Избыток электронов обусловлен фотоионизацией, вызванной ультрафиолетовым излучением Солнца.

Тот факт, что спектральная функция  $S(\mathbf{k}, \omega)$  вблизи резонанса очень чувствительна к распределению скоростей, связан с наличием в членах уравнения (8.32) величины  $|K_L(k, \omega)|^{-2}$ . Используя (4.75) и (4.120), видим, что функция

$$S(\mathbf{k}, \omega) \sim \frac{F(\omega/k)}{F'(\omega/k)} \delta(\omega - \omega_0), \quad (8.45)$$

где  $F(u)$  — одномерная функция распределения по скоростям,  $F'(u)$  — ее производная по скорости  $u$  и  $\omega_0$  — резонансная частота.





Фиг. 103. Зависимость принимаемой мощности от высоты при обратном рассеянии от ионосферы (из работы Перкинса, Салпетера и Янгвессона [391]).  
 $\omega$  — сдвиг частоты пиков относительно падающей частоты (430 МГц); пики возникают на высотах, где частота  $\omega$  равна частоте резонансной электронной плазменной линии.

Таким образом, очень плоский хвост у функции распределения  $F(u)$  при больших скоростях может приводить к большому увеличению  $S(k, \omega)$ . Данная ситуация аналогична задаче усиления тормозного излучения, рассмотренной в § 3 гл. 5.

Усиления рассеянного сигнала в плазменной линии можно также достигнуть при искусственном возбуждении колебаний большой амплитуды. Это можно сделать в лабораторных условиях путем впрыскивания электронного пучка в плазму или посредством возбуждения плазмы высокочастотными волнами. В работе [392] возбуждались резонансы Тонкса — Даттнера (§ 6 гл. 5) поперек

столба плазмы на одной частоте  $\omega \approx \omega_p (= 2,6 \times 2\pi \times 10^9 \text{ рад/сек})$ , затем плазма просвечивалась на второй частоте  $\omega_i (= 10,5 \times 2\pi \times 10^9 \text{ рад/сек})$ , и наблюдалось усиление рассеянного сигнала на частоте  $\omega_s = \omega_i - \omega$  всякий раз, когда резонансное плазменное колебание возбуждалось при соответствующем значении  $\omega_p$  (последнее изменялось).

Зависимость колебаний электронной плотности от координат и времени имеет вид

$$N(r, t) \sim f(r) \cos \theta \exp(j\omega t),$$

где  $f(r)$  — изменение величины  $N(r, t)$  вдоль радиуса столба, а  $\cos \theta$  свидетельствует о дипольной моде возбуждения. Зная значение  $f(r)$  из расчетов Паркера, Никеля и Гоулда [204], можно вычислить фурье-спектр  $N(k, \omega)$  и из него — спектральную функцию  $S(k, \omega)$ . Эксперимент хорошо согласуется с теорией. Подобного рода эксперименты описаны в работе [393].

Другим методом усиления продольных колебаний в плазме является нелинейная связь двух интенсивных поперечных электромагнитных волн, причем частоты каждой из волн могут значительно превышать  $\omega_p$ . Теоретическое рассмотрение этой задачи проведено в работе [394]. Если  $\mathbf{k}_1, \omega_1$  — волновой вектор и частота одной волны, а  $\mathbf{k}_2, \omega_2$  — волновой вектор и частота другой, то возможно нелинейное смешение при условии, что

$$\begin{aligned} \omega_1 - \omega_2 &\approx \omega_p, \\ |\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2| L_D &\leq 1. \end{aligned} \quad (8.46)$$

Используя бесстолкновительное уравнение Власова, вычисляем возмущение  $f_1$  функции распределения. Это приводит к выражению (4.80), где  $\mathbf{E}$  — векторная сумма электрических полей двух электромагнитных волн. Для следующего более высокого порядка возмущения функции  $f(\mathbf{v})$  проводится вторая итерация, и тогда из (1.10) мы получаем  $N(k, \omega)$ . Отсюда находим спектральную функцию  $S(\mathbf{k}, \omega)$  в виде

$$\begin{aligned} S(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{(4\pi\epsilon_0)^2}{128\pi^2 m^2 N} \frac{k^4 |\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2|^2}{(\omega_1 \omega_2)^2 |K_L(k, \omega)|^2} \times \\ &\times [\delta(\omega + \Delta\omega) \delta(\mathbf{k} - \Delta\mathbf{k}) + \delta(\omega - \Delta\omega) \delta(\mathbf{k} + \Delta\mathbf{k})], \end{aligned} \quad (8.47)$$

где  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  — амплитуды электрических полей,  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$  и  $\Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$ . Наличие резонансного знаменателя в (8.47) [т. е. величины  $|K_L(k, \omega)|^2$ ] снова указывает на возможность большого увеличения  $S(\mathbf{k}, \omega)$ . Как видно, резонансные процессы возможны при  $\omega = \pm \Delta\omega$ ,  $\mathbf{k} = \pm \Delta\mathbf{k}$ . Теперь рассеяние можно наблюдать, освещая плазму третьим пучком и измеряя его рассеянное излучение. Другая возможность — наблюдать рассеянный свет любого

из первоначальных пучков. Источниками первичного света могут быть рубиновые лазеры с модулированной добротностью; когда их свет фокусируется в точку, легко можно достигнуть электрических полей порядка  $10^8$  в/см.

Подобного рода теоретические исследования проведены в работах [395—398]. В этих работах расчеты выполнялись в квантовомеханическом приближении.

Были начаты эксперименты по проверке теоретических предсказаний Кролла, Рона и Ростокера [394]. В работе [399] используется специальный рубиновый лазер с модулированной добротностью с одним охлажденным и одним неохлажденным рубиновыми стержнями в одном оптическом резонаторе. Разность температур достаточна для создания двух лазерных пучков, разделенных по длине волны на несколько ангстрем. Этими двумя пучками просвечивается дуговой импульсный разряд. Угол между волновыми векторами пучков очень мал. Результирующий сдвиг оптического сигнала, вызванный индуцированными плазменными колебаниями, регистрируется интерферометром Фабри — Перо. В работе [392] описан эксперимент, в котором используется микроволновое излучение на двух различных частотах.

**«Ионно-звуковая линия»** ( $\omega_s \approx \omega_i \pm \omega_p^+ |k| L_D$ ). Немаксвелловское распределение по скоростям может повысить уровень ионно-звуковых колебаний точно так же, как и в случае «электронной плазменной линии». Рассмотрим пример, когда ионы имеют максвелловское распределение, задаваемое одномерной функцией распределения [см. (4.117)]:

$$F^+(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_0^+} e^{-v^{+2}/2(v_0^+)^2}, \quad (v_0^+)^2 = \frac{\kappa T^+}{M}, \quad (8.48)$$

а дрейф электронов относительно ионов описывается функцией

$$F(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} v_0} e^{-(v-v_d)^2/2v_0^2}, \quad v_0^2 = \frac{\kappa T}{m}, \quad (8.49)$$

где  $v_d$  — скорость дрейфа электрона.

Простую оценку увеличения уровня флуктуаций можно получить, если подставить (8.49) в (8.45) и сравнить значения  $S(k, \omega)$  при наличии и в отсутствие дрейфа:

$$\frac{S(k, \omega; v_d)}{S(k, \omega; v_d=0)} \approx \frac{v_p}{v_p - v_d}. \quad (8.50)$$

Здесь  $v_p = \omega/k$  — фазовая скорость ионно-звуковой волны. Видно, что амплитуда колебаний становится очень большой, когда скорость дрейфа приближается к фазовой скорости волны. Когда  $v_p = v_d$ , волна находится только на грани неустойчивости; она становится нарастающей волной при  $v_p < v_d$ . Уравнение (8.32)

для функции  $S(k, \omega)$  неприменимо к области  $v_p \leq v_d$ . Подобным образом увеличивается энергия на моду продольных колебаний:

$$u(k, \omega) \approx \kappa T \left( \frac{v_p}{v_p - v_d} \right), \quad (8.51)$$

что не является неожиданным, поскольку  $u$  и  $S$  тесно связаны друг с другом.

Критическая дрейфовая скорость  $v_c$ , выше которой волны становятся неустойчивыми, определяется из дисперсионного соотношения (8.40) при подстановке в него  $v_p = v_c$ :

$$v_c \approx v_0 \left( \frac{m}{M} \right)^{1/2}, \quad kL_D \ll 1, \quad (8.52)$$

отсюда видно, что для начала «двухпоточковой» неустойчивости достаточно относительно небольшой дрейфовой скорости. Выражение (8.52) является, однако, грубым приближением, которое справедливо при достаточно больших значениях отношения  $T/T^+$ . При точном определении дрейфовой скорости  $v_c$  было найдено [400—402], что она очень сильно зависит от отношения  $T/T^+$ . Граница между затухающими и нарастающими волнами (т. е. область на краю устойчивости) определяется из условия

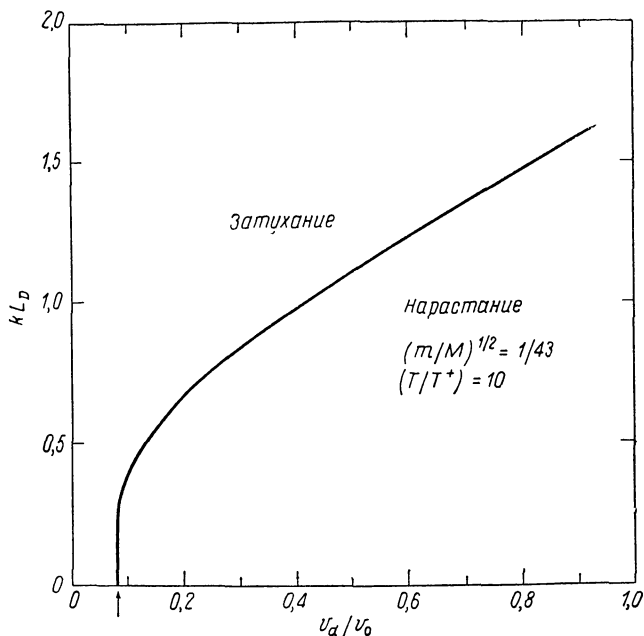
$$\text{Im } K_L(k, \omega) = 0.$$

Диэлектрический коэффициент  $K_L$  возьмем для двухкомпонентной плазмы, состоящей из электронов и ионов одного сорта [см. (4.83)]. Тогда вместо (8.52) найдем более правильный результат:

$$\frac{v_c}{v_0} \approx \frac{1}{\sqrt{1 + (kL_D)^2}} \left\{ \left( \frac{m}{M} \right)^{1/2} + \left[ \left( \frac{T}{T^+} \right)^3 \right]^{1/2} \exp \left[ - \frac{T/T^+}{2(1 + (kL_D)^2)} - \frac{3}{2} \right] \right\}. \quad (8.53)$$

При  $T/T^+ \approx 1$  для развития неустойчивости требуется очень большая дрейфовая скорость порядка 0,14 от тепловой скорости электрона. Однако когда  $T/T^+ \gg 1$ , критическая скорость имеет величину только порядка ионно-звуковой скорости. На фиг. 104 показана граница между устойчивым и неустойчивым состояниями водородной плазмы, для которой  $(m/M)^{1/2} = 1/43$  и  $T/T^+ = 10$ . Видно, что когда плазма приближается к границе из области устойчивости, минимальная скорость дрейфа, необходимая для развития неустойчивости, составляет  $v_d/v_0 \approx 0,08$  (показана на фиг. 104 стрелкой) и связана с критическим волновым числом  $k_c \approx 0$ .

На фиг. 105 показан спектр  $S(k, \omega)$  для различных значений дрейфовой скорости  $Y \equiv v_d/v_0$  [при  $(m/M)^{1/2} = 1/43$ ,  $T/T^+ = 10$ ,  $T = 50$  эв]. Направление волнового вектора колебаний  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_s$  совпадает с направлением дрейфовой скорости. Усиление спектра



Фиг. 104. Граница между затухающими и нарастающими ионно-звуковыми волнами (из работы Арунасалема и Брауна [403]).  
 $v_d$  — дрейфовая скорость электрона. Плазма — бесстолкновительная.

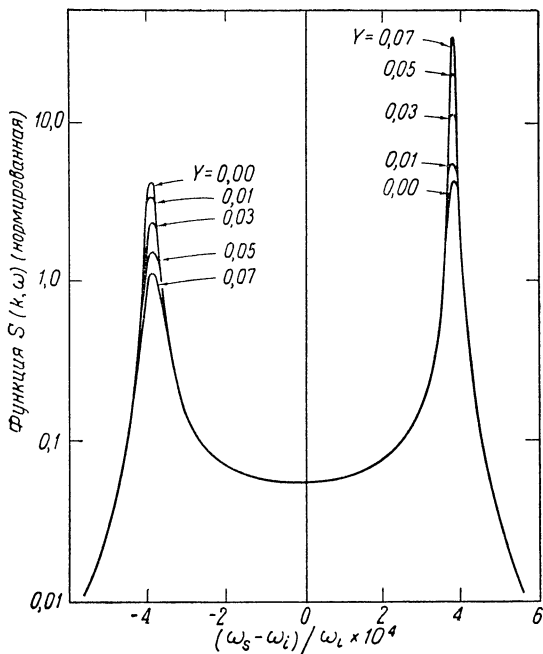
флуктуаций  $S(\mathbf{k}, \omega)$  находится из сравнения данной кривой с кривой, обозначенной  $Y = 0$ , которая относится к термически равновесной плазме (см. также § 4 настоящей главы). При  $Y = v_d/v_0 \approx 0,08$  функция  $S(\mathbf{k}, \omega)$  стремится к бесконечности. Видна асимметрия в амплитудах двух пиков.

В работах [401, 403] детально исследовалось поведение функции  $S(\mathbf{k}, \omega)$  в ближайшей окрестности критической точки  $v_d = v_c$ . В частности, был сделан точный расчет функции  $S(\mathbf{k}, \omega)$  для случая, когда волна с  $k = k_c = 0$  нарастает первой при увеличении скорости  $v_d$  до ее критического значения. Показано, что при  $T/T^+ \gg 1$

$$S(\omega) \approx \psi\left(\frac{T}{T^+}; \frac{m}{M}\right) \left[ \left(\frac{\omega_p^+}{\omega}\right)^2 - 1 \right] = \psi\left(\frac{T}{T^+}; \frac{m}{M}\right) \left[ \frac{(\omega_p^+)^2}{(\omega_i - \omega_s)^2} - 1 \right], \quad (8.54)$$

где функция  $\psi$  определяется выражением

$$\frac{1}{\psi} = \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \left[ \left(\frac{T}{T^+}\right)^5 \right]^{1/2} \left\{ \exp\left(-\frac{T}{2T^+} - \frac{3}{2}\right) \right\} - 1, \quad (8.55)$$



Фиг. 105. Спектр рассеянного излучения около ионно-звуковой линии в плазме с различной величиной электронного дрейфа  $Y \equiv v_d/v_0$  (из работы Розенблюта и Ростокера [359]).

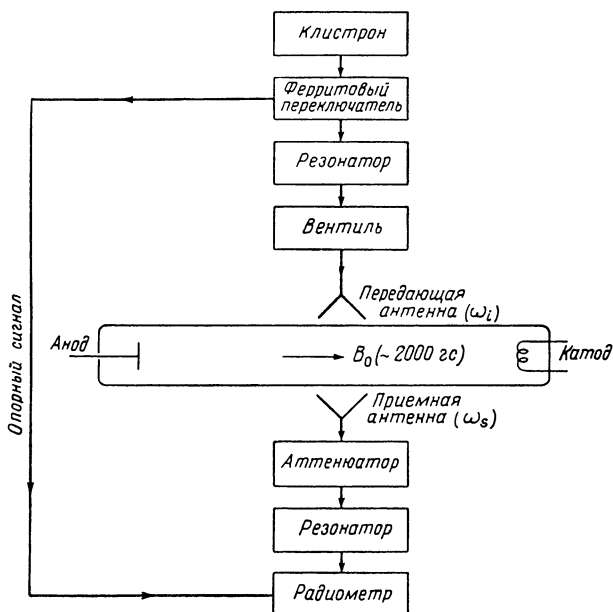
Водородная плазма при  $T^+ = 5$  эв,  $T = 50$  эв. Остальные параметры те же, что и указанные в подписи к фиг. 101а.

(Допускаются только такие отношения  $T/T^+ \gg 1$ , при которых  $\psi > 0$ .)

Отметим, что «ионно-звуковая линия» имеет свой (бесконечно большой) пик, центрированный на частоте падающей волны ( $\omega_s = \omega_i$ ). Это связано с тем обстоятельством, что  $k_c = 0$ .

Предсказания формулы (8.54) были подтверждены серией экспериментов Арунасалама и Брауна [403]. На фиг. 106 приведена блок-схема аппаратуры. Положительный столб разряда постоянного тока (0,1—1 а) низкого давления (0,03—0,50 торр) просвечивался микроволнами на частоте примерно 9000 Мгц (мощность падающего сигнала приблизительно равна  $10^{-3}$  вт). Рассеянный вперед сигнал измерялся радиометром (гл. 10). Падающий сигнал был модулирован по амплитуде с частотой 100 гц; сигнал этой частоты использовался в качестве опорного и подавался на синхронный детектор.

Уровень мощности рассеянного сигнала составлял от  $10^{-10}$  до  $10^{-14}$  вт в пределах ширины полосы детектора, 3 Мгц. На фиг. 107



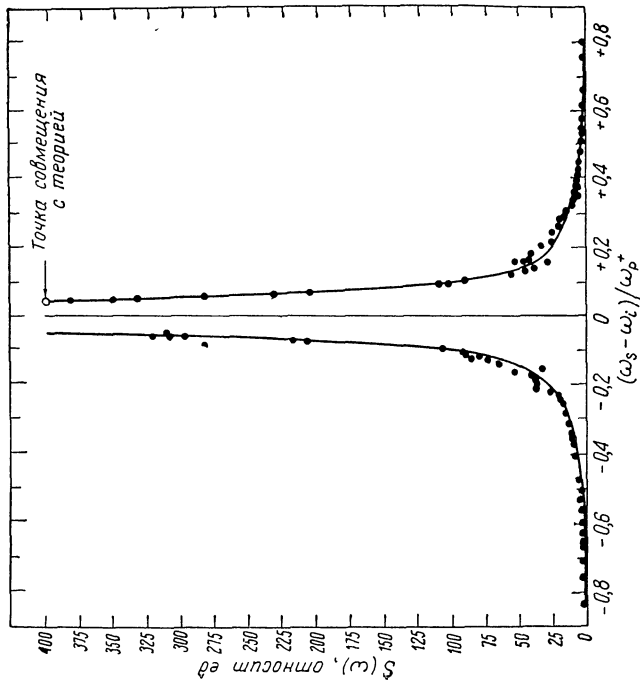
Фиг. 106. Блок-схема аппаратуры, используемой при измерениях рассеяния на неустойчивых ионно-звуковых волнах.

Резонатор с большой добротностью  $Q$  уменьшает проникновение сигнала от клистрона на детектор. Несмотря на это, минимальная величина  $|\omega_s - \omega_t|/2\pi$  была примерно равна 7 Мгц. Каждая антенна расположена в ближнем поле другой антенны и поэтому принималось излучение во всем диапазоне углов рассеяния.

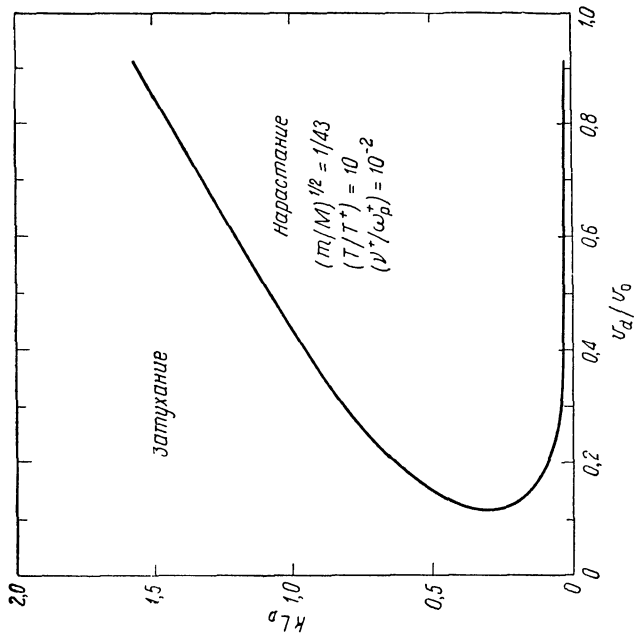
показан типичный спектр. Вычисленные по формуле (8.54) значения параметра  $\psi$  лежат в диапазоне 100—1000, что указывает на многократное увеличение уровня флуктуаций по сравнению с классическим эффективным сечением Томсона.

Непонятна причина возбуждения в только что описанном разряде преимущественно таких ионно-звуковых волн, у которых  $k = 0$ . В бесстолкновительной плазме условие  $k = 0$  действительно соответствует минимальной дрейфовой скорости, необходимой для развития неустойчивости, как показано на фиг. 104. Однако когда ионы испытывают столкновения, как в только что описанной плазме,  $k_c$  более не равно нулю. Это показано на фиг. 108, где  $v^+/\omega_p^+ = 10^{-2}$ , откуда видно, что  $k_c L_D \approx 0,3$ . В этом случае в ионно-звуковой линии возникают два пика, смещенных по частоте относительно частоты падающей волны на величину

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_p^+} \approx \pm |k_c| L_D, \tag{8.56}$$



Ф и г. 107. Наблюдаемый спектр рассеянного излучения (из работы Арунасалама и Брауна [403]). Сплошная кривая — теоретическая, точки — экспериментальные данные.



Ф и г. 108. Граница между затухающими и нарастающими волнами при наличии ионных столкновений (из работы Арунасалама и Брауна [403]).



но такое смещение не наблюдалось в экспериментах. Возможно, что причина расхождения теории и эксперимента связана с тем приближенным способом, с помощью которого в теорию вводились столкновения. Теория относится также к бесконечной однородной плазме. Она применима непосредственно к такому эксперименту, в котором длина волны продольных колебаний мала по сравнению с размерами плазмы. В описанных выше измерениях длина волны была сравнима с радиусом разрядной трубки и граничные эффекты могли быть существенны.

В работе [404] описаны измерения рассеяния микроволн с длиной волны 8 мм на ионно-звуковых волнах большой амплитуды, самовозбуждающихся в столбе ртутного дугового разряда. В этой работе, исходя из полученных данных относительно зависимости рассеянного излучения от угла и частоты, было выведено при помощи (8.19) дисперсионное соотношение для продольных колебаний.

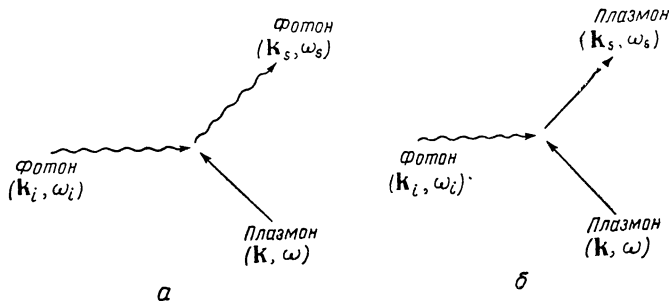
### § 6. Генерация продольных волн падающей поперечной волной

В предыдущих параграфах нас интересовало взаимодействие падающей поперечной электромагнитной волны с флуктуациями плотности и последующее переизлучение поперечных волн. Однако поперечная волна может также превратиться в продольные плазменные волны и таким образом испытать поглощение. Используя квантовомеханическое понятие о квазичастицах, можно представить себе два процесса, схематически изображенных на фиг. 109. Процесс, показанный на фиг. 109, б, не встречался в наших предыдущих расчетах рассеяния просто потому, что мы выделяли в § 1 настоящей главы только поперечную компоненту тока, индуцированного падающей волной. Это ясно видно из формул (8.2) и (8.3) — они показывают, что удерживалась только такая компонента рассеянного электрического поля  $\mathbf{E}_s$ , которая составляла прямой угол с волновым вектором  $\mathbf{k}_s$ .

Для расчета эффективного сечения процесса, изображенного на фиг. 109, б, нужно вначале вычислить ток  $\mathbf{J}_s$ , индуцированный падающей волной, выделить продольную часть  $\mathbf{J}_{sl}$ , а затем рассчитать усредненную по времени скорость возбуждения продольных волн с помощью следующего уравнения (ср. § 4 гл. 1):

$$\begin{aligned} \langle \frac{dW}{dt} \rangle_t &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \lim_{T, V \rightarrow \infty} \frac{1}{TV} \int_{-T/2}^{T/2} \int dt d^3r \mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{J}_{sl}(\mathbf{r}, t) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \lim_{T, V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^4 TV} \int \int d\omega_s d^3k_s \mathbf{E}_s(\mathbf{k}_s, \omega_s) \cdot \mathbf{J}_{sl}^*(\mathbf{k}_s, \omega_s); \end{aligned} \quad (8.57)$$

заметим, что во второй форме записи уравнения используются фурье-компоненты  $\mathbf{J}_{sl}$  и  $\mathbf{E}_s$ .



Ф и г. 109. Диаграммы.

*a* — рассеяние поперечной электромагнитной волны на плазменном колебании, дающее рост рассеянной поперечной электромагнитной волны; *b* — процесс, при котором рассеянной волной является продольное плазменное колебание.

Выражение для тока  $\mathbf{J}_{sl}$  можно вывести из разложения уравнения Больцмана по моментам [см. (5.81)], как сделано в работе [405], при условии, что фазовые скорости падающей и рассеянной волн много больше тепловой скорости электронов. Запишем плотность частиц и гидродинамическую скорость в момент  $t$  в точке  $\mathbf{r}$  в виде

$$\begin{aligned} N(\mathbf{r}, t) &= N + N_i(\mathbf{r}, t) + \delta N(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{v} + \mathbf{v}_i(\mathbf{r}, t) + \delta \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (8.58)$$

Здесь  $N$  и  $\mathbf{v}$  — средняя плотность и скорость дрейфа электронов,  $N_i$  и  $\mathbf{v}_i$  — плотность и скорость, индуцированные падающей волной ( $i$ ), а  $\delta N$ ,  $\delta \mathbf{v}$  — тепловые (или нетепловые) флуктуации, с которыми взаимодействует падающая волна. В нашем частном случае нет результирующего дрейфа и  $\mathbf{v} = 0$ ; далее, поперечная электромагнитная волна не вызывает изменения плотности заряда ( $\nabla \cdot \mathbf{E}_i = 0$ ) и поэтому  $N_i = 0$ . Тогда, используя (8.58) и разложение уравнения Больцмана по моментам [см. (5.81)], вычислим ту компоненту тока, индуцированного падающей волной, которая взаимодействует с флуктуациями плотности и скорости. Находим

$$\frac{\partial \mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = e \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{v}_i \cdot \delta N] + eN \left[ \frac{e}{m} (\delta \mathbf{v} \times \mathbf{B}_i) - (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \delta \mathbf{v} - (\delta \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right]. \quad (8.59)$$

В этом уравнении индуцированная скорость  $\mathbf{v}_i$  определяется формулами (8.1) и (8.2), магнитное поле  $\mathbf{B}_i$  падающей волны связано с электрическим полем  $\mathbf{E}_i$  уравнением (1.1) и флуктуации плотности и скорости удовлетворяют уравнению непрерывности (4.45):

$$\frac{\partial \delta N}{\partial t} + N \nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0. \quad (8.60)$$

Пространственно-временную фурье-компоненту  $\mathbf{J}_s(\mathbf{k}_s, \omega_s)$  можно теперь легко вывести из (8.59); в результате получим

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{k}_s, \omega_s) = -j \frac{e^2}{m\omega_i} \left[ \mathbf{E}_0 + \frac{\omega}{\omega_s} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0) \frac{\mathbf{k}_s}{|\mathbf{k}|^2} \right] N(\mathbf{k}, \omega). \quad (8.61)$$

Обозначения в этом выражении те же, которые использовались в § 1 настоящей главы:  $\mathbf{E}_0$  — амплитуда электрического поля падающей волны,  $N(\mathbf{k}, \omega)$  — фурье-компонента флуктуации плотности, определяемая формулой (8.14),  $(\mathbf{k}_i, \omega_i)$ ,  $(\mathbf{k}_s, \omega_s)$ ,  $(\mathbf{k}, \omega)$  — волновые векторы и частоты падающей волны, рассеянной волны и электронных флуктуаций соответственно. Эти величины должны подчиняться условиям (8.19).

Кроме выражения для тока  $\mathbf{J}_s(\mathbf{k}, \omega)$  нам также нужно найти выражение для фурье-компоненты электрического поля  $\mathbf{E}_s$  рассеянной продольной волны. Из уравнения Пуассона [см. (4.46)] находим

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{k}_s, \omega_s) = \frac{j}{\omega \epsilon_0 K_L(k_s, \omega_s)} \mathbf{J}_s(\mathbf{k}_s, \omega_s), \quad (8.62)$$

где  $K_L$  — продольный диэлектрический коэффициент плазмы. Скорость возбуждения продольных волн можно получить, подставив в (8.57) выражение (8.62) для  $\mathbf{E}_s$  и выражение (8.61) для компоненты  $\mathbf{J}_s$ , параллельной  $\mathbf{k}_s$ . (Необходимо отметить, что формулы для поперечной компоненты  $\mathbf{J}_s$  и электрического поля  $\mathbf{E}_s$  рассеянной поперечной волны позволяют получить выражения (8.15) — (8.18), соответствующие задаче рассеяния, рассмотренной в § 1 настоящей главы.)

Расчеты, описанные в общих чертах в предыдущем параграфе, приводят к искомому спектру энергии возбужденной продольной волны. Результат можно записать [по аналогии с (8.16)] в виде

$$\left\langle \frac{dW}{dt d\Omega (d\omega/2\pi)} \right\rangle_l = NV |S_i| \sigma_L(\omega, \theta_s), \quad (8.63)$$

где теперь эффективное сечение  $\sigma_L$  возбуждения продольной волны определяется формулой

$$\sigma_L = \frac{r_0^2}{3\sqrt{3}} \sin^2 \theta_s \cos^2(\phi_0 - \phi) S(\mathbf{k}, \omega) \left( \frac{c}{v_0} \right)^3 \times \left[ 1 + \frac{\omega}{\omega_s} \frac{k_s^2}{k^2} \right]^2 \left[ \frac{\omega_s^2}{\omega_i^2} \frac{n(\omega_s)}{n(\omega_i)} \right]. \quad (8.64)$$

Здесь  $v_0^2 = \kappa T/m$ , а остальные обозначения такие же, какие использовались в § 1 настоящей главы; самый последний множитель в квадратных скобках (8.64) включает поправки, которые уже обсуждались после формулы (8.19).

Если мы возьмем отношение эффективных сечений рассеяния (8.64) и (8.17), то найдем

$$\frac{\sigma_L}{\sigma} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(\frac{c}{v_0}\right)^3 \frac{\sin^2 \theta_s \cos^2(\phi - \phi_0)}{1 - \sin^2 \theta_s \cos^2(\phi - \phi_0)} \left[1 + \frac{\omega}{\omega_s} \frac{k_s^2}{k^2}\right]^2. \quad (8.65)$$

Видно, что из-за большой величины множителя  $(c/v_0)^3$  трансформация поперечной волны в продольную может сильно превышать процесс рассеяния. Однако первый происходит только на частотах  $\omega_i$ ,  $\omega_s$  вблизи плазменной частоты  $\omega_p$ , где продольные волны лишь слабо затухают. Действительно, это обстоятельство проявляется явно в расчетах, приводящих к (8.64), так как при проведении интегрирования уравнения (8.57) по  $k_s$  возникающий в подынтегральном выражении член  $\text{Im}(1/K_L)$  аппроксимируется следующим образом [см. (7.58)]:

$$\text{Im} \frac{1}{K_L(k_s, \omega_s)} = \frac{\pi}{2} k_0 \delta(k - k_0), \quad (8.66)$$

где волновое число  $k_0$  определяется дисперсионным соотношением Бома и Гросса (5.78) для продольных электронных плазменных волн.

## § 7. Формализм связанных мод

Рассеяние и генерация волн, которые рассматривались до сих пор, являются типичными примерами процессов с нелинейной связью естественных мод плазмы. Такая связь приводит к преобразованию частоты и обмену энергией между модами. Мы выражали «эффективность» этих процессов через эффективные сечения или спектральные функции  $S(\mathbf{k}, \omega)$ . В данном параграфе развивается другое представление, в котором более ясно выявляется динамика нелинейных взаимодействий: выводятся уравнения связанных мод, позволяющие определить скорость нарастания или распада соответствующих волн во времени (или пространстве). Приближение «эффективного сечения» является, по существу, статистическим, так как в нем рассматривается большое число волн с более или менее хаотическими фазами, как, например, в задаче о рассеянии на флуктуациях (см. § 2 настоящей главы). Однако если имеется только несколько мод с большой амплитудой, это приближение уже не будет уместным, поскольку теперь соотношения между фазами волн становятся существенными. Именно в этом случае особенно полезен формализм связанных мод.

Искомую систему связанных уравнений можно вывести на основании весьма общих принципов (см., например, работы [406—412]). Рассмотрим взаимодействие трех плоских незатухающих волн, распространяющихся коллинеарно в бесконечной однородной

плазме. Электрический вектор для каждой из этих волн определяется выражением

$$\mathbf{E}_l = \hat{n} \mathcal{E}_l(t) \exp [j\omega_l t - jk_l z], \quad l = 1, 2, 3, \quad (8.67)$$

где комплексная амплитуда  $\mathcal{E}_l(t)$  — медленно меняющаяся функция времени и  $\hat{n}$  — единичный вектор поляризации. Чтобы характеристики распространения связанных волн не отличались существенно от характеристик отдельных несвязанных волн, между волнами предполагается достаточно слабая связь. Другими словами, мы считаем, что частота  $\omega_l$  и волновой вектор  $\mathbf{k}_l$  связаны линейными дисперсионными соотношениями

$$g(\omega_l, \mathbf{k}_l) = 0.$$

При этих условиях находим уравнения связанных мод

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} &= V_{123} \mathcal{E}_2(t) \mathcal{E}_3(t), \\ \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial t} &= V_{213} \mathcal{E}_1(t) \mathcal{E}_3^*(t), \\ \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial t} &= V_{321} \mathcal{E}_1(t) \mathcal{E}_2^*(t), \end{aligned} \quad (8.68)$$

где так называемые «матричные элементы»  $V$  содержат все детальные физические характеристики плазменной среды; в них имеется также информация об относительных поляризациях  $\hat{n}$  трех волн, их частотах и постоянных распространения. Поэтому основной проблемой анализа связанных мод является вычисление матричных элементов, но такая задача часто весьма трудна.

Для возникновения связи три волны должны точно (или почти точно) подчиняться правилам отбора [см. (8.19)]:

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3, \quad (8.69a)$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3. \quad (8.69b)$$

Если эти три волны не обладают дисперсией (т. е. для них  $\omega \sim k$ ), то выполнение (8.69a) гарантирует выполнение (8.69b). Если волны обладают дисперсией, то часто невозможно удовлетворить указанным правилам отбора, и связь между тремя волнами не может иметь места. В этом случае нужно выяснить, может ли возникнуть процесс более высокого порядка, как, например, связь четырех волн. Однако мы не будем рассматривать такую ситуацию (частный случай связи четырех волн см., например, в работе [413]).

Мы не будем приводить общий вывод уравнений, связанных мод (8.68). Лучше получим их для особенно простого случая связи трех ионно-звуковых волн. В процессе вывода найдем точные значения матричных элементов  $V$ .

Будем исходить из уравнений для моментов (5.81) — двух уравнений для электронов и двух уравнений для ионов. Предположим, что волны не затухают. Также предположим, что электроны «теплые», а ионы «холодные», поэтому давление  $p$  имеет конечное значение для электронов и равно нулю для ионов. Будем считать, наконец, что все интересующие нас частоты лежат значительно ниже ионной плазменной частоты. Если это так, то в любой момент времени при рассмотрении волны имеется квазинейтральность ( $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ ) и, более того, мгновенные скорости электрона и иона равны друг другу. Тогда получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + N \nabla \cdot \mathbf{v} = - \nabla \cdot n \mathbf{v} \quad \text{для электронов и ионов,} \quad (8.70)$$

$$\frac{e}{m} \mathbf{E} + \frac{1}{mN} \nabla p = - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{n}{mN^2} \nabla p \quad \text{для электронов,} \quad (8.71)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{e}{M} \mathbf{E} = - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad \text{для ионов.} \quad (8.72)$$

Здесь  $e$ ,  $m$ ,  $M$  — заряд и масса электрона и масса иона соответственно,  $N$  — стационарное значение плотности при отсутствии волн и  $n$ ,  $\mathbf{v}$  и  $p$  — ВЧ возмущения плотности, скорости и электронного давления соответственно. В уравнениях удерживаются только линейные члены первого порядка и нелинейные члены второго порядка. Исключая ВЧ электрическое поле  $\mathbf{E}$  из уравнений (8.71) и (8.72) и предполагая, что давление изменяется по адиабатическому закону (см. стр. 199)

$$(P + p) = \text{const} (N + n)^\gamma, \\ P = N \kappa T,$$

получаем следующие искомые уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{n}{N} \right) + \nabla \cdot \mathbf{v} = - \nabla \cdot \left( \frac{n}{N} \right) \mathbf{v}, \quad (8.73)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + V_s^2 \nabla \left( \frac{n}{N} \right) = - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \left( \frac{2-\gamma}{2} \right) V_s^2 \nabla \left( \frac{n}{N} \right)^2, \quad (8.74)$$

где

$$V_s = \sqrt{\gamma \frac{\kappa T}{M}}, \quad (8.75)$$

$T$  — электронная температура,  $M$  — масса иона. Все нелинейные члены находятся в правой части (8.73) и (8.74); их можно рассматривать как «источники», ответственные за нелинейное взаимодействие волн. Если нелинейные члены равны нулю, то уравнения (8.73) и (8.74) сведутся к волновому уравнению для ионно-звуковых волн:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - V_s^2 \nabla^2 n = 0. \quad (8.76)$$

Таким образом, волна не обладает дисперсией и имеет фазовую скорость  $\omega/k = V_s$ . Этот результат согласуется с (8.40), если в уравнении (8.76) перейти к пределу  $kL_D \ll 1$  (что эквивалентно условию  $\omega \ll \omega_{pi}$ ).

Примечательно, что (8.73) и (8.74) формально идентичны соответствующим уравнениям распространения звука в неионизированном газе. На это соответствие было недавно указано Монтгомери [414]; он, основываясь на известном решении для звуковой волны, использовал это соответствие при исследовании процесса формирования скачка (ударной волны) в ионно-звуковой волне.

Рассмотрим теперь три ионно-звуковые волны ( $l = 1, 2, 3$ ), распространяющиеся коллинеарно в плазме. Они приводят к росту возмущений плотности и скорости; запишем последние в безразмерной форме в виде

$$\begin{aligned} \frac{n}{N} &= \sum_{l=1, 2, 3} (C_l(t) e^{j\psi_l} + C_l^*(t) e^{-j\psi_l}), \\ \frac{v}{V_s} &= \sum_{l=1, 2, 3} (B_l(t) e^{j\psi_l} + B_l^*(t) e^{-j\psi_l}), \end{aligned} \quad (8.77)$$

где  $B_l$  и  $C_l$  — комплексные амплитуды, медленно меняющиеся во времени, а  $\psi_l$  — фаза, определяемая выражением

$$\psi_l = \omega_l t - k_l z.$$

Будем решать уравнения (8.73) и (8.74) совместно с (8.77) методом Крылова, Боголюбова и Митропольского (подробное изложение см. в работах [415, 416]). Согласно этому методу подставим уравнение (8.77), например, в (8.73). Приравняем затем члены левой части (8.73), которые периодичны по  $\psi_1$ , членам правой части, которые имеют тот же период  $\psi_1 = \psi_2 + \psi_3$ , и поступим аналогично для  $\psi_2$  и  $\psi_3$ . Действуя таким образом, мы предполагаем точное согласование фаз, что эквивалентно требованию выполнения правил отбора (8.69). Остающиеся члены, которые не подчиняются правилам отбора (8.69), являются в некотором смысле «нерезонансными» и не дают вклада во взаимодействие рассматриваемых трех волн.

Таким образом, получаем систему трех уравнений из (8.73) и систему трех уравнений из (8.74), а именно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial \tau_1} + jC_1 - jB_1 &= j[C_2 B_3 + C_3 B_2], \\ \frac{\partial C_2}{\partial \tau_2} + jC_2 - jB_2 &= j[C_3^* B_1 + C_1 B_3^*], \\ \frac{\partial C_3}{\partial \tau_3} + jC_3 - jB_3 &= j[C_1 B_2^* + C_2^* B_1] \end{aligned} \quad (8.78)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial \tau_1} + jB_1 - jC_1 &= j[B_2B_3 - (2 - \gamma)C_2C_3], \\ \frac{\partial B_2}{\partial \tau_2} + jB_2 - jC_2 &= j[B_3^*B_1 - (2 - \gamma)C_3^*C_1], \\ \frac{\partial B_3}{\partial \tau_3} + jB_3 - jC_3 &= j[B_1B_2^* - (2 - \gamma)C_1C_2^*], \end{aligned} \quad (8.79)$$

где

$$\tau_1 = \omega_1 t, \quad \tau_2 = \omega_2 t, \quad \tau_3 = \omega_3 t.$$

Сложим (8.78) и (8.79) и заметим на основании (8.70), что, с точностью до членов первого порядка, для каждой волны  $B = C$ . Таким образом, мы получаем требуемые уравнения связанных мод для скорости изменения во времени нормированных возмущений плотности ( $C_1 = n_1/N$  и т. д.) или нормированных возмущений скорости ( $B_1 = v_1/V_s$  и т. д.). Мы не будем выписывать эти уравнения, так как более интересно работать с ВЧ электрическими полями  $\mathcal{E}$ , связанными с волнами. Используя (8.71), можно легко выразить  $\mathcal{E}$  через  $C$ ; в итоге получаем следующие уравнения для скорости изменения комплексных амплитуд электрического поля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} &= \left( \frac{e}{MV_s} \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\omega_1^2}{\omega_2 \omega_3} \right) \mathcal{E}_2 \mathcal{E}_3, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial t} &= \left( - \frac{e}{MV_s} \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\omega_2^2}{\omega_1 \omega_3} \right) \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_3^*, \\ \frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial t} &= \left( - \frac{e}{MV_s} \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\omega_3^2}{\omega_1 \omega_2} \right) \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2^*. \end{aligned} \quad (8.80)$$

Они имеют такой же вид, как и основные уравнения (8.68). «Матричным элементам»  $V_{123}$ ,  $V_{213}$  и  $V_{312}$  соответствуют множители в круглых скобках в (8.80).

**Сохранение энергии.** У вышеприведенной системы уравнений имеется первый интеграл движения, а значит, выполняется закон сохранения полной энергии волн. Чтобы убедиться в этом, умножим первое уравнение (8.80) на  $\mathcal{E}_1^*$ , а комплексно сопряженное ему уравнение на  $\mathcal{E}_1$ ; затем сложим оба уравнения. Поступим точно таким же образом с оставшимися двумя уравнениями (8.80) и найдем

$$\frac{|\mathcal{E}_1|^2}{\omega_1^2} + \frac{|\mathcal{E}_2|^2}{\omega_2^2} + \frac{|\mathcal{E}_3|^2}{\omega_3^2} = \text{const.} \quad (8.81)$$

Чтобы проверить, что это на самом деле уравнение сохранения энергии, вернемся к (1.49) и вычислим энергию  $U$ , исходя из известного линейного диэлектрического коэффициента  $K_L$  для об-



суждаемой продольной ионно-звуковой волны. Используя линейные члены уравнений (8.70) — (8.72), легко находим, что для данной волны частоты  $\omega$

$$K_L \approx -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{1}{(kL_D)^2}, \quad \omega \ll \omega_{pi}, \quad (8.82)$$

где  $\omega_{pi} = (Ne^2/M\epsilon_0)^{1/2}$  — ионная плазменная частота и  $L_D$  — электронный дебаевский радиус. Прделав в (1.49) необходимое дифференцирование, получим

$$U = \frac{1}{4} \epsilon_0 |\mathcal{E}|^2 \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}, \quad (8.83)$$

отсюда для полной энергии трех волн имеем

$$U_{\text{полн}} = \frac{1}{4} \epsilon_0 \omega_{pi}^2 \left[ \frac{|\mathcal{E}_1|^2}{\omega_1^2} + \frac{|\mathcal{E}_2|^2}{\omega_2^2} + \frac{|\mathcal{E}_3|^2}{\omega_3^2} \right], \quad (8.84)$$

что находится в согласии с (8.81).

**Соотношения Мэнли — Роува.** Амплитуды электрического поля в уравнениях (8.80) являются комплексными, однако полученные решения уравнений оказывается удобным выразить через действительные величины. С этой целью пусть *действительные амплитуды*  $A(t)$  и *действительные фазы*  $\phi(t)$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \sqrt{\frac{\omega_1^2}{\omega_2 \omega_3}} A_1(t) e^{i\phi_1(t)}, \\ \mathcal{E}_2 &= \sqrt{\frac{\omega_2^2}{\omega_1 \omega_3}} A_2(t) e^{i\phi_2(t)}, \\ \mathcal{E}_3 &= \sqrt{\frac{\omega_3^2}{\omega_2 \omega_1}} A_3(t) e^{i\phi_3(t)}, \end{aligned} \quad (8.85)$$

а время  $\tau$  формулой

$$t = \tau \left( \frac{e}{MV_s} \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{-1}. \quad (8.86)$$

Подставляя (8.85) и (8.86) в (8.80) и разделяя уравнения на уравнения для действительной и мнимой частей, после довольно длинных вычислений находим уравнения для амплитуд

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial \tau} &= A_2 A_3 \cos \delta, \\ \frac{\partial A_2}{\partial \tau} &= -A_1 A_3 \cos \delta, \\ \frac{\partial A_3}{\partial \tau} &= -A_1 A_2 \cos \delta, \end{aligned} \right\} \delta \equiv \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 \quad (8.87)$$

и уравнение для фаз

$$A_1 A_2 A_3 \sin \delta = \text{const.} \quad (8.88)$$

Уравнения (8.87) после интегрирования приводят к следующим интегралам движения:

$$\begin{aligned} A_1^2 + A_2^2 &= \text{const}, \\ A_1^2 + A_3^2 &= \text{const}, \\ A_2^2 - A_3^2 &= \text{const}. \end{aligned} \quad (8.89)$$

Это и есть соотношения Мэнли — Роува, хорошо известные в теории параметрического усиления (см. работу [406]). Их можно записать в более наглядной форме, заменив с помощью (8.83) и (8.85)  $A^2$  на плотность энергии волн  $U$ :

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{\omega_1} + \frac{U_2}{\omega_2} &= \text{const}, \\ \frac{U_1}{\omega_1} + \frac{U_3}{\omega_3} &= \text{const}, \\ \frac{U_2}{\omega_2} - \frac{U_3}{\omega_3} &= \text{const}. \end{aligned} \quad (8.90)$$

Так как величина  $U/\omega$  пропорциональна числу квантов, то можно истолковывать эти соотношения как соотношения, описывающие процесс уничтожения и рождения квантов: когда исчезает квант частоты  $\omega_1$ , рождается квант на каждой из частот  $\omega_2$  и  $\omega_3$  (ср. фиг. 109).

**Частные решения (8.87) и (8.88).** Общее решение (8.87) и (8.88) можно выразить через эллиптические функции Якоби (см. работу [409]). Здесь мы только в общих чертах рассмотрим результаты для некоторых особенно интересных случаев.

а. Допустим вначале, что амплитуда волны 1 велика по сравнению с амплитудами волн 2 и 3 и что в первом приближении амплитуда волны 1 остается постоянной (по крайней мере в течение достаточно короткого промежутка времени). Мы хотим вычислить начальную скорость нарастания двух других волн. В силу вышеуказанного предположения первое уравнение из системы уравнений (8.68) или (8.87) исключается. Используем общие уравнения (8.68) и возьмем решение в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= \mathcal{E}_{02} e^{t/t_0}, \\ \mathcal{E}_3 &= \mathcal{E}_{03} e^{t/t_0}. \end{aligned} \quad (8.91)$$

Легко найдем, что время нарастания  $t_0$  определяется соотношением

$$\frac{1}{t_0} = \sqrt{V_{213} V_{312}^*} |\mathcal{E}_1|. \quad (8.92)$$

В случае ионно-звуковых волн матричные элементы определены в (8.80) и

$$\frac{1}{t_0} = \frac{e |\mathcal{E}_1|}{MV_s} \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right) \sqrt{\frac{\omega_2 \omega_3}{\omega_1^2}}. \quad (8.93)$$

Уравнения (8.68) не учитывают затухания волн. Затухание можно учесть, заменив  $\partial \mathcal{E}_1 / \partial t$  на  $\partial \mathcal{E}_1 / \partial t + \alpha_1 \mathcal{E}_1$ ,  $\partial \mathcal{E}_2 / \partial t$  на  $\partial \mathcal{E}_2 / \partial t + \alpha_2 \mathcal{E}_2$  и т. д., где  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  — феноменологические постоянные затухания. Теперь время нарастания  $t_0$  определяется соотношением

$$\frac{1}{t_0} = -\frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha_3) \pm \left[ \frac{1}{4} (\alpha_2 - \alpha_3)^2 + V_{213} V_{312}^* |\mathcal{E}_1|^2 \right]^{1/2}. \quad (8.94)$$

Видно, что волны нарастают экспоненциально во времени при выполнении условия

$$|\mathcal{E}_1|^2 > \frac{\alpha^2}{V_{213} V_{312}^*} \quad \text{для } \alpha_2 = \alpha_3. \quad (8.95)$$

Это хорошо известное пороговое условие для появления параметрической раскачки [407].

б. Рассмотрим теперь (8.87) для случая

$$A_{02} \gg A_{03} \quad \text{и} \quad A_{01} = 0,$$

где индекс 0 означает начальные условия в нулевой момент времени. Этот процесс можно рассматривать как «смещение» мод, при котором две волны, введенные в плазму, вызывают генерацию третьей волны на суммарной частоте.

Решая (8.87) и (8.88), находим, что амплитуды трех волн меняются периодически во времени. Например, имеем

$$A_1 \approx A_{03} \sin(A_{02} \tau). \quad (8.96)$$

Тогда, если амплитуда волны в момент  $t = 0$  равна нулю, то она достигнет своей максимальной величины за время

$$\tau = \frac{\pi}{2A_{02}}. \quad (8.97)$$

Преобразуя  $\tau$  и  $A_{02}$  и амплитуды электрического поля, из (8.85) и (8.86) для ионно-звуковых волн находим

$$\frac{1}{t} = \frac{\gamma + 1}{\pi} \frac{e |\mathcal{E}_{02}|}{MV_s} \sqrt{\frac{\omega_1 \omega_3}{\omega_2^2}}. \quad (8.98)$$

**Моды с отрицательной энергией и взрывные взаимодействия.** Плотность энергии волн [см. формулы (1.48) и (1.49)] в термически равновесной плазме, по определению, — всегда положительная величина. Когда плазма не находится в термическом равновесии, плотность энергии может быть как положительной, так и отрицатель-

ной [см. § 2 гл. 9). Наличие у волны отрицательной энергии не означает, что такая волна обязательно неустойчива в том смысле, что она нарастает во времени или пространстве. Это означает, что когда такая волна взаимодействует с другой волной или с внешним контуром, она *может* стать неустойчивой. Грубо говоря, волна с отрицательной энергией нарастает, отдавая энергию волне с положительной энергией. Такие неустойчивости могут возникать при *линейном* взаимодействии с модой с положительной энергией, и они описаны в § 2 гл. 9. Здесь мы только кратко исследуем последствия *нелинейного* взаимодействия мод с положительной и отрицательной энергиями.

Допустим, что в соотношениях Мэнли—Роува (8.90) волна 1 имеет отрицательную энергию. Тогда все три волны нарастают (или затухают). На квантовомеханическом языке это означает возможность рождения (или уничтожения) трех квантов; такая ситуация сильно отличается от имевшей место до сих пор при обсуждении параметрической связи. При таких условиях, решая уравнения связанных мод (8.68) или (8.87), находим, что за *конечное* время амплитуда волны нарастает до бесконечности. Именно по этой причине неустойчивость называется «взрывной». Более подробное обсуждение см., например, в работах [417—419].

## Микронеустойчивости

Для описания микронеустойчивостей необходимо детально исследовать микроскопические движения заряженных частиц. В этом и состоит отличие микронеустойчивостей от другого большого класса неустойчивостей магнитогидродинамического типа, для описания которых используются уравнения гидродинамики. Кроме того, микронеустойчивость отличается от неустойчивости магнитогидродинамического типа тем, что она гораздо более «мелкозернистая», так как связана с относительно короткими длинами волн и высокими частотами. По этой причине микронеустойчивость обычно не вызывает сильного разрушения физической конфигурации плазмы (что характерно для гидродинамической неустойчивости), но ее существование обнаруживается по таким явлениям, как усиление диффузии частиц, уменьшение электропроводности и увеличение интенсивности испускания электромагнитного излучения.

Уравнение Больцмана обычно является отправным пунктом теоретического исследования микронеустойчивостей. Это уравнение оказывается почти неисчерпаемым источником неустойчивостей даже при таком упрощающем предположении (сделанном на следующих страницах), что плазма — бесконечно протяженная однородная среда. Из большого числа разнообразных явлений мы выбираем несколько более или менее случайных примеров. Приведенное нами обсуждение из-за небольшого объема, отведенного для него, носит неизбежно поверхностный характер.

### § 1. Общие замечания о возникновении неустойчивостей

Устойчивость плазмы означает, что малое возмущение, например малое возмущение локальной плотности заряда данного сорта, не приводит к существенному превращению кинетической энергии системы в энергию электрического и магнитного полей.

Рассмотрим бесконечную однородную плазму, в которой функция распределения  $f$  изотропна и уменьшается монотонно, т. е. она зависит только от модуля скорости и ее производная по скорости  $df(v)/dv < 0$  для всех значений  $v$ . Для таких распределений

(частным случаем которых является максвелловское) плазма устойчива относительно любых возможных возмущений [363, 420, 421]. Это — следствие теоремы Лиувилля и закона сохранения энергии. Теорема Лиувилля утверждает, что фазовое пространство  $d^3r d^3v$ , занятое элементом жидкости, является интегралом движения, так же как и функция распределения  $f(\mathbf{r}, v, t)$ . Если интерпретировать функцию  $f$  как плотность, то движение будет аналогично течению несжимаемой жидкости с переменной плотностью.

Напишем выражение для энергии системы в виде

$$\int \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) f d^3r d^3v; \quad (9.1)$$

проводя минимизацию интеграла (9.1), совместимую с теоремой Лиувилля, получаем состояние, в котором полная кинетическая энергия минимальна. Из-за наличия весового множителя  $v^2$  интеграл (9.1) будет иметь минимальное значение, когда элементы жидкости с наибольшей «плотностью»  $f$  расположены вблизи  $v = 0$ . Следовательно, плотность  $f$  должна быть монотонно уменьшающейся функцией  $v$ .

Если в начальном состоянии система имеет такое монотонное распределение, то любое отклонение от этого состояния вызовет увеличение кинетической энергии системы. Энергия любых электрических и магнитных полей, возникающих при таком отклонении, также возрастает (ограничения, налагаемые на кинетическую энергию, относятся и к полной электромагнитной энергии). Однако энергия системы должна сохраняться, и потому система не может уйти из своего начального состояния и остается устойчивой. Необходимо отметить, что для доказательства этого не требуется проводить линеаризацию уравнения Больцмана; следовательно, оно справедливо в течение больших интервалов времени. Оно также позволяет нам получить нелинейные предельные значения кинетической энергии, которые может достигнуть система [421].

Обычным условием неустойчивости для волны с фурье-компонентой вида  $\exp(j\omega t - j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  является условие  $\text{Im} \omega < 0$  для действительных значений  $k$  и при соблюдении ограничений, налагаемых дисперсионным соотношением, т. е. мы имеем

$$\begin{aligned} g(\omega, \mathbf{k}) &= 0, \\ \text{Im} \omega &< 0, \end{aligned} \quad (9.2)$$

$\mathbf{k}$  — действительное значение.

Такое условие свидетельствует о нарастании во времени пространственно периодического возмущения бесконечной протяженности. Чтобы выяснить, какие ограничения налагает условие (9.2)

на функцию распределения, рассмотрим случай продольных волн в изотропной плазме [138].

**Продольные волны.** Запишем дисперсионное соотношение (4.83) в виде

$$K_L(k, \omega) = 0 = 1 + \frac{\omega_p^2}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F'(u)}{\omega - ku} du. \quad (9.3)$$

Здесь мы заменили трехмерную функцию распределения  $f(\mathbf{v})$  на одномерную функцию распределения  $F(u)$  в соответствии с выражением (4.116). Теперь положим

$$\frac{\omega}{k} = x + jy, \quad (9.4)$$

где  $y < 0$ , как это требует условие неустойчивости. Подставив (9.4) в (9.3), найдем

$$0 = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[ \int \frac{(x-u)F'(u)}{(x-u)^2 + y^2} du - iy \int \frac{F'(u)}{(x-u)^2 + y^2} du \right]. \quad (9.5)$$

Поскольку  $y \neq 0$  и все величины действительные, то второй интеграл должен быть равен нулю. Следовательно, первый интеграл можно сложить со вторым, умноженным на любую величину. Умножая последний на  $(U_0 - x)$ , где  $U_0$  — произвольная скорость, имеем

$$0 = 1 + \frac{\omega_p^2}{k^2} \int \frac{(U_0 - u)F'(u)}{(x-u)^2 + y^2} du. \quad (9.6)$$

Если  $F(u)$  — «одногорбая» функция, причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(u)}{\partial u} &< 0 \quad \text{для } u > U_0, \\ \frac{\partial F(u)}{\partial u} &> 0 \quad \text{для } u < U_0, \end{aligned} \quad (9.7)$$

то (9.6) нельзя удовлетворить, поскольку интеграл не будет отрицательным. В этом случае условие неустойчивости  $y \neq 0$  не выполняется и мы должны сделать вывод, что одногорбое распределение (9.7) приводит к устойчивости<sup>1)</sup>. Например, электронный

<sup>1)</sup> Следует отметить, что любое изотропное распределение скоростей, описываемое функцией  $f(v)$ , устойчиво относительно обсуждавшихся выше неустойчивостей продольных волн. Причина кроется в том, что пока функция  $f(v)$  изотропна, функция  $F(u)$  — монотонно убывающая функция от  $u$  (фиг. 43). Это можно доказать следующим образом (Andrews J. G., частное сообщение). Пусть волновой вектор  $k$  продольной волны направлен вдоль оси  $u$  прямоуголь-

поток, представленный функцией распределения  $F(u) = \delta(u - U_0)$ , устойчив относительно нарастания волн. Для возникновения неустойчивости требуется, чтобы функция  $F(u)$  имела более одного пика, представляя по существу два (или более) потока, движущихся друг относительно друга. Хотя неравенство

$$(u - U_0) \frac{\partial F}{\partial u} > 0$$

— необходимое условие для нарастания волн, оно не является достаточным: не каждое распределение со многими пиками неустойчиво. Необходимое и достаточное условия дал Пенроуз [425] (см. также работу [138]).

Следует отметить, что приведенное доказательство отсутствия корней дисперсионного уравнения нельзя использовать в верхней полуплоскости  $\text{Im } \omega > 0$  комплексной переменной  $\omega$ . Здесь интеграл из (9.5) имеет дополнительную мнимую часть, как было предсказано Ландау [см. (4.86)].

### **Коэффициент поглощения поперечных волн в разреженной плазме.**

В начале данного параграфа было найдено, что система с изотропным распределением скоростей будет неустойчива, если в некотором диапазоне скоростей

$$\frac{\partial f(p)}{\partial p} > 0. \quad (9.8)$$

Для удобства условие (9.8) записано через импульс  $p$ , поскольку позднее будет рассмотрена также релятивистская плазма.

Теперь мы хотим выяснить, как влияет условие (9.8) на коэффициент поглощения  $\alpha_\omega$  поперечных электромагнитных волн. Из урав-

ной системы координат  $(v_x, v_y, u)$ . Из выражения (4.116) для  $F(u)$  вытекает:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + u^2}) dv_x dv_y = 2\pi \int_0^{\infty} f(\sqrt{v_\perp^2 + u^2}) v_\perp dv_\perp.$$

где вторая запись уравнения получена на основании соотношений

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + u^2 = v_\perp^2 + u^2, \\ v_x &= v_\perp \cos \theta, \quad v_y = v_\perp \sin \theta. \end{aligned}$$

Дифференцируя уравнение для  $F(u)$  по  $u$ , легко найдем

$$\frac{dF(u)}{du} = -2\pi u f(u).$$

Так как функция  $f(u)$  — положительно определенная величина, то, следовательно,  $F(u)$  — односторонняя функция; условие (9.7) удовлетворено и неустойчивость не развивается. Эта проблема получила дальнейшее разъяснение в работах [423, 424].



нения (2.46) видно, что если условие (9.8) не удовлетворено, правая часть уравнения — положительно определенная величина, и коэффициент  $\alpha_\omega$  равен нулю или больше нуля. В этом случае интенсивность излучения уменьшается экспоненциально с проходящим расстоянием. Однако если условие (9.8) удовлетворено, то коэффициент  $\alpha_\omega$  может быть отрицательным и тогда возникает неустойчивость.

Хотя условие (9.8) представляет собой необходимое требование для развития неустойчивости, оно не означает, что система должна быть неустойчивой. Интегрируя уравнение (2.46) по частям, мы получаем второе условие для развития неустойчивости, на этот раз налагаемое на свойства дифференциальной испускающей способности  $\eta_\omega$ . Оно имеет вид соответственно для релятивистских и нерелятивистских частиц:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} [\varepsilon p \eta_\omega(p)] < 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} [v \eta_\omega(v)] < 0. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Здесь  $\varepsilon = \sqrt{p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2}$  — релятивистская энергия. При выводе (9.9) было сделано предположение:  $[\varepsilon p \eta_\omega(p) f(p)] = 0$  при двух пределах интегрирования  $p \rightarrow 0$  и  $p \rightarrow \infty$ . Почти такое же условие, как (9.9), получил Твисс [426] (см. также работы [57, 427]).

Физический смысл условия (9.9) далеко не очевиден. Однако при переводе его и предыдущего условия (9.8) на квантовомеханический язык мы приходим к двум знакомым соотношениям. Начнем с условия (9.8), которое можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} > 0.$$

Эта величина представляет собой классический предел [см. (2.44)] неравенства

$$\lim_{\hbar\omega \rightarrow 0} \frac{f(p') - f(p)}{\hbar\omega} > 0. \quad (9.10)$$

В соответствии с § 2 гл. 2 неравенство (9.10) можно записать через плотность состояний:

$$\lim_{\hbar\omega \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{\hbar\omega} \left( \frac{dN'}{d^3p'} - \frac{dN}{d^3p} \right) \right] > 0, \quad (9.11)$$

где  $dN'$  — плотность частиц в верхнем состоянии (обозначим ее  $\mathcal{N}'$ ),  $d^3p'$  — статистический вес  $g'$  этого состояния,  $dN$  — плотность частиц в нижнем состоянии (обозначим ее  $\mathcal{N}$ ),  $d^3p$  — статистический вес  $g$  этого состояния. Отсюда вместо (9.8) имеем

$$\frac{\mathcal{N}'}{g'} - \frac{\mathcal{N}}{g} > 0; \quad (9.12)$$

неравенство (9.12), как мы видим, есть условие инверсной заселенности в лазерах.

Вернемся теперь к условию (9.9). Оно эквивалентно следующему:

$$\lim_{\hbar\omega \rightarrow 0} \frac{\varepsilon' p' \eta_\omega(p') - \varepsilon p \eta_\omega(p)}{\hbar\omega} < 0. \quad (9.13)$$

Если в неравенство (9.13) ввести статистические веса  $g'$  и  $g$ , используя для этого соотношение (2.57), то оно примет вид

$$\lim_{\hbar\omega \rightarrow 0} \frac{\eta_\omega(p') g' - \eta_\omega(p) g}{\hbar\omega} < 0. \quad (9.14)$$

Поскольку вероятность спонтанного испускания пропорциональна обратной величине времени жизни  $\tau$  данного состояния, то мы приходим к условию [эквивалентному (9.9)]:

$$\frac{\tau'}{g'} > \frac{\tau}{g}, \quad (9.15)$$

т. е. для возникновения неустойчивости «взвешенное» время жизни верхнего состояния должно превышать «взвешенное» время жизни нижнего состояния.

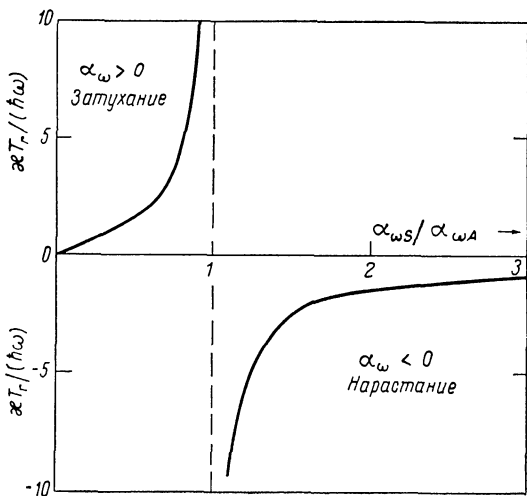
Условие неустойчивости  $\alpha_\omega < 0$  означает, что коэффициент индуцированного испускания  $\alpha_{\omega S}$  становится больше коэффициента поглощения  $\alpha_{\omega A}$  [см. (2.22), (2.24) и (2.25)]. При таких обстоятельствах температура излучения  $T_r$ , определяемая формулой (2.39), отрицательна. На фиг. 110 показана зависимость температуры излучения  $T_r$  от отношения  $\alpha_{\omega S}/\alpha_{\omega A}$ . По мере того, как это отношение возрастает, начиная от нуля, температура излучения проходит через следующие значения:

(+0° К) ... (+273° К) ... (+∞° К) ... (−∞° К) ... (−273° К) ... (−0° К).

Таким образом, говоря об отрицательной температуре излучения, мы иным способом выражаем тот факт, что взаимодействие волны с плазмой приводит к неустойчивости рассматриваемой моды. Отметим, что даже когда коэффициент  $\alpha_\omega$  отрицателен (следовательно, функция источника  $S_\omega$  отрицательна), интенсивность излучения — всегда положительно определенная величина, как и должно быть. Это следует из решения уравнения переноса; в частном случае однородной плазмы имеем

$$I_\omega = \frac{\omega^2 \kappa}{8\pi^3 c^2} T_r (1 - e^{-\alpha_\omega L}), \quad \hbar\omega \ll \kappa T; \quad (9.16)$$

откуда видно, что при продвижении по шкале температур интенсивность  $I_\omega$  возрастает. Например,  $I_\omega$  при  $T_r = -273^\circ \text{К}$  больше  $I_\omega$  при  $T_r = +273^\circ \text{К}$  и плазма с отрицательной температурой «горячее», чем с положительной температурой. (Применение понятия отрицательной температуры к квантовомеханическим системам см. в работах [428—430].)



Ф и г. 110. Зависимость температуры излучения, определяемой формулой (2.39), от отношения  $\alpha_{\omega S}/\alpha_{\omega A}$ .

Показаны области затухания и неустойчивости.

Заметим, что поскольку в данном параграфе обсуждение основано на уравнении (2.46), оно строго применимо только к таким взаимодействиям, при которых можно пренебрегать коллективными явлениями [см. два абзаца перед (2.26)]. Однако, исследуя выражение (5.43) для коэффициента поглощения при наличии коллективных эффектов, мы приходим к неравенствам, которые формально точно такие же, как (9.8) и (9.9).

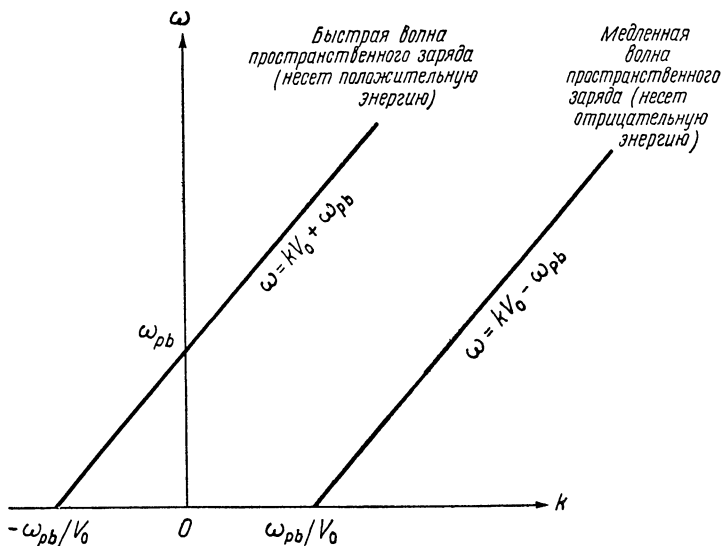
## § 2. Неустойчивости продольных волн

Прежде чем искать неустойчивые моды, часто оказывается удобным исследовать волновые свойства компонент, образующих плазменную систему. Система может состоять, например, из плазменного фона, сквозь который движется один или несколько потоков электронов и ионов. Волновые свойства каждой компоненты характеризуются ее электрической восприимчивостью  $\mathcal{P}(\mathbf{k}, \omega)$ , определяемой интегралом типа входящего в правую часть соотношения (4.83). Тогда диэлектрический коэффициент для продольных волн запишем в виде

$$K_L(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_i \mathcal{P}_i(\mathbf{k}, \omega), \quad (9.17)$$

а для дисперсионного соотношения  $K_L(\mathbf{k}, \omega) = 0$  будем иметь

$$K_{LP}(\mathbf{k}, \omega) = - \sum_{\text{Пучки}} \mathcal{P}_i(\mathbf{k}, \omega). \quad (9.18)$$



Фиг. 111. Медленная и быстрая волны пространственного заряда в электронном пучке.

$V_0$  — скорость пучка,  $\omega_{pb}$  — плазменная частота.

Здесь  $K_{LP} = 1 + \mathcal{P}$  — диэлектрический коэффициент для плазмы без пучков, а  $\mathcal{P}_i$  — восприимчивость пучка (предполагается, что пучок, как и плазма, имеет бесконечную протяженность).

Наиболее простой пучок состоит из электронов (или ионов), движущихся с одинаковой скоростью  $V_0$  и не имеющих теплового разброса по энергии. Для такого распределения скоростей, описываемого функцией распределения типа  $\delta$ -функции, согласно соотношению (4.83) [или (9.3)] имеем

$$K_{Lb} \equiv 1 + \mathcal{P} = 1 - \frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - kV_0)^2}, \quad (9.19)$$

где  $\omega_{pb}$  — плазменная частота для пучка. По пучку могут распространяться две продольные волны с волновыми числами (см. фиг. 111), определяемыми формулой

$$k = \frac{\omega \pm \omega_{pb}}{V_0}. \quad (9.20)$$

Поскольку нет теплового разброса и мы пренебрегли столкновениями, эти волны не испытывают затухания.

Две «пучковые» волны могут проявить совершенно разные свойства при взаимодействии с некоторой средой типа плазмы. Это связано с тем, что медленная волна несет «отрицательную»

энергию, в то время как быстрая волна несет «положительную» [431—433]. Мы называем волну волной с отрицательной энергией, если она способна за счет кинетической энергии пучка электронов передавать мощность другой волне или контуру, с которыми она связана, если же все происходит наоборот, то такую волну мы называем волной с положительной энергией. Тогда первая (в данном примере — медленная волна пространственного заряда) подпитывает неустойчивость при включении взаимодействия с соответствующей средой.

Проверить, какую энергию несет волна, довольно легко, для этого нужно подставить (9.19) в (1.49) и вычислить плотность энергии с учетом дисперсионного соотношения  $K_{Lb} = 0$ . Тогда находим

$$U_{E+P} = \pm \frac{1}{2} \epsilon_0 |E|^2 \frac{\omega}{\omega_{pb}}, \quad (9.21)$$

где знак «+» относится к быстрой волне, а знак «—» — к медленной волне.

**Двухпотоковая неустойчивость.** Рассмотрим взаимодействие двух идентичных встречных электронных пучков. Из выражений (9.17) и (9.19) получим дисперсионное соотношение

$$\frac{\omega_{pb}^2}{[\omega + kV_0]^2} + \frac{\omega_{pb}^2}{[\omega - kV_0]^2} = 1. \quad (9.22)$$

Это — квадратное уравнение относительно  $\omega^2$ ; решая его, находим

$$\omega^2 = k^2 V_0^2 + \omega_{pb}^2 \pm \sqrt{(\omega_{pb}^2 + k^2 V_0^2)^2 + 2(kV_0 \omega_{pb})^2 - (kV_0)^4}.$$

Тогда, если

$$kV_0 < \sqrt{2} \omega_{pb}, \quad (9.23)$$

то величина  $\omega^2$  — отрицательная и имеет место неустойчивость. Скорость нарастания достигает максимального значения при  $kV_0 = (3^{1/2}/2) \omega_{pb}$ :

$$\text{Im } \omega = -\frac{1}{2} \omega_{pb} = -\frac{1}{\sqrt{3}} kV_0. \quad (9.24)$$

Эта потоковая неустойчивость объясняется механизмом «бунчировки» — образованием сгустков. Локализованная группа зарядов одного пучка индуцирует заряд в другом пучке, и последний замедляется, образуя сгусток. Таким образом, два связанных пучка стремятся затормозить друг друга, тем самым освобождается энергия для развития неустойчивости.

Если два пучка нельзя описать с помощью функций распределения типа  $\delta$ -функции, так как они имеют тепловой разброс по скоростям  $v_0$ , то можно ожидать некоторой стабилизации, поскольку когерентность фаз, необходимая для осцилляций, частично нарушается. Например, можно ожидать устойчивости в том случае, когда характеристическое время нарастания  $|1/\text{Im } \omega|$  больше времени  $1/kv_0$ , необходимого для расплывания распределения электронов на длину волны. Комбинируя это неравенство с (9.24), находим условие для устойчивости

$$v_0 \gtrsim V_0. \quad (9.25)$$

Этот результат следует сравнить с более подробным обсуждением, проведенным в § 5 гл. 8, где рассматривался дрейф электронов относительно ионов.

**Реактивная и резистивная неустойчивости среды.** Дисперсионное уравнение для электронного пучка, пронизывающего плазму с диэлектрическим коэффициентом  $K_{LP}$ , имеет вид

$$\frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - kV_0)^2} = K_{LP}(k, \omega). \quad (9.26)$$

На фиг. 112 приведена дисперсионная диаграмма для частного случая холодной плазмы, когда

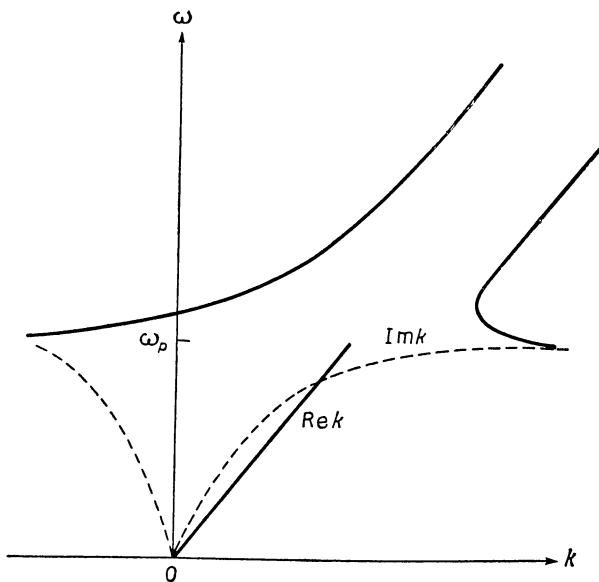
$$K_{LP} = 1 - \left( \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right);$$

решение получено для комплексного значения  $k$  и действительного значения  $\omega$ . На частотах  $\omega > \omega_p$  существуют две волны с чисто действительным значением  $k$ . Когда частота  $\omega$  достаточно велика по сравнению с  $\omega_p$ , эти две волны становятся просто двумя волнами пространственного заряда (фиг. 111) самого пучка. Однако при  $\omega \leq \omega_p$  волны сильно взаимодействуют с плазмой и сливаются в единую моду, как показано на фигуре. В этом режиме корень, соответствующий  $\text{Im } k > 0$ , отвечает нарастающей волне. Скорость нарастания становится бесконечной при частоте  $\omega = \omega_p$  (при конечной температуре электронов плазмы скорость нарастания всегда конечна).

Остановимся теперь на ситуации более общей, чем взаимодействие с холодной плазмой. Переписав (9.26) в виде

$$kV_0 = \omega \pm \frac{\omega_{pb}}{\sqrt{K_{LP}(k, \omega)}}, \quad (9.27)$$

замечаем, что когда  $K_{LP}$  — комплексная величина,  $k$  — тоже комплексная, и существует возможность для нарастания. Предположим, что затухание в плазме пренебрежимо мало; тогда  $\sqrt{K_{LP}}$



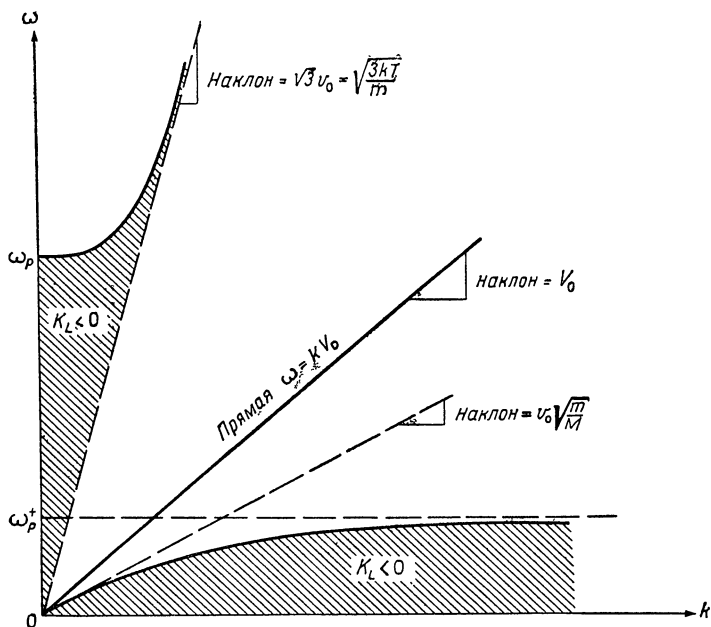
Фиг. 112. Дисперсионная кривая волн в пучке, взаимодействующих с холодной бесстолкновительной плазмой (из работы Бриггса [444]). Решение имеется для действительного значения  $\omega$  и комплексного значения  $k$ . На частотах выше плазменной частоты  $k$  — чисто действительная величина.

является чисто мнимой величиной или чисто действительной, и в последнем случае имеет место нарастание. Неустойчивость, связанная с отрицательным диэлектрическим коэффициентом

$$\operatorname{Re} K_{LP}(k, \omega) < 0, \quad (9.28)$$

известна как реактивная неустойчивость среды. Исходя из физических соображений, можно доказать, что когда бунчированный электронный пучок проходит через среду с отрицательным диэлектрическим коэффициентом, электроны в сгустке притягиваются, а не отталкиваются; это приводит к еще более сильному бунчированию. Поскольку сила взаимодействия между электронами в сгустке обратно пропорциональна диэлектрическому коэффициенту, то как можно ожидать, скорость нарастания неустойчивости будет максимальной при  $K_{LP} \approx 0$ ; анализ показывает, что это действительно так.

На фиг. 113 показаны дисперсионные кривые для теплой плазмы с учетом движения ионов. Заштрихованное пространство представляет области, в которых  $\operatorname{Re} K_{LP} < 0$ . Когда прямая  $\omega = kV_0$  попадает внутрь заштрихованной области, наступает неустойчивость.



Ф и г. 113. Дисперсионные кривые для теплой плазмы с учетом движения ионов и без учета затухания Ландау (из работы Бриггса [444]).

Реактивная неустойчивость возникает при  $V_0 > \sqrt{3} v_0$  и  $V_0 < (m/M)^{1/2} v_0$ . Высоочастотная ветвь дисперсионной кривой представляет соотношение Бомы и Гросса (5.78), низкочастотная ветвь — соотношение (8.40)

Даже если  $\text{Re } K_{LP} > 0$ , то может возникнуть неустойчивость при условии, что столкновительное затухание (или циклотронное, или затухание Ландау) не исчезающе мало, поэтому  $\text{Im } K_{LP}$  имеет заметную величину. Этот тип неустойчивости известен как «резистивная» неустойчивость среды [442]; она возникает при взаимодействии волны с отрицательной энергией (медленной волны пространственного заряда) со средой с потерями. На первый взгляд кажется странным, что затухание, являясь диссипативным процессом, может в действительности вызвать неустойчивость. Более подробно об этом будет сказано в § 3 настоящей главы.

**Распространение волн под углом к магнитному полю.** Дисперсионные свойства, обсужденные выше, относятся к продольным волнам, распространяющимся точно *вдоль* направления магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ , действующего на систему плазма — пучок. При распространении волн под углом к магнитному полю появляется целая новая группа взаимодействий и неустойчивостей. Их отличительной характеристикой является то, что они возникают, главным обра-



зом, вблизи или на самой электронной (или ионной) циклотронной частоте и ее гармониках.

В § 4 гл. 7 обсуждалось наклонное распространение волн в электронном пучке, частицы которого имели как поперечную,  $v_{\perp}$ , так и продольную,  $v_{\parallel}$ , скорости. Дисперсионные кривые приведены на фиг. 86. Вблизи частоты каждой гармоники  $\omega^* = m\omega_b$  существуют две ветви. Как легко показать, применив к выражению (7.24) метод, описанный ранее в настоящем параграфе, волна, частота которой ниже частоты соответствующей гармоники ( $\omega^* < m\omega_b$ ), несет отрицательную энергию. Поэтому, когда такая волна взаимодействует с плазменной средой, может развиваться реактивная или резистивная неустойчивость [434].

В частном случае распространения точно под прямым углом к магнитному полю ( $k_{\parallel} = 0$ ) две ветви с каждой стороны от частоты  $m\omega_b$  сливаются в одну кривую, колеблющуюся относительно данного номера гармоники (фиг. 114). В тех частях кривых, где частота меньше частоты данного номера гармоники, т. е.  $\omega < m\omega_b$ , энергия отрицательная.

В экспериментах по взаимодействию плазмы с пучком сильные неустойчивости наблюдались вблизи гармоник циклотронных частот [435, 436]. На фиг. 115 показана экспериментальная установка, использованная в работе [435]. Электронный пучок диаметром 2 мм создавался фокусирующей пушкой Пирса и вводился в дрейфовое пространство с парами ртути при давлении  $2 \times 10^{-4}$  торр. Пушка имела фиксированный первеанс

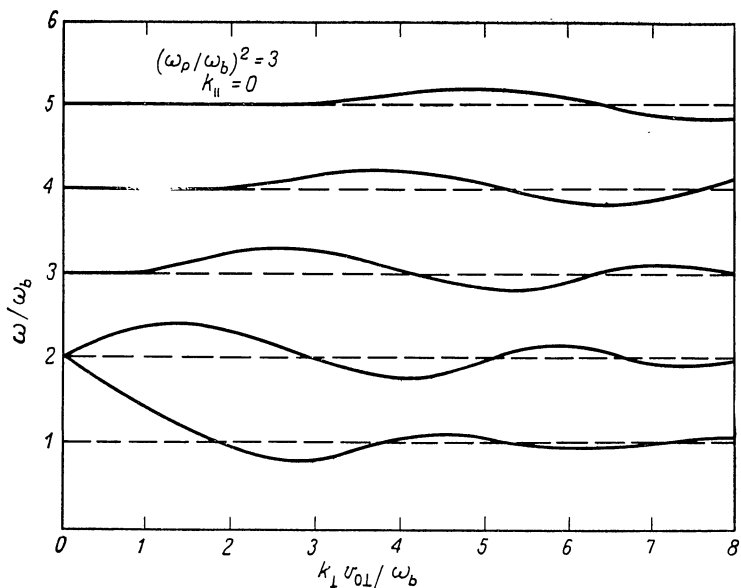
$$iV_0^{-3/2} = 10^{-6} a \cdot v^{-3/2}$$

и работала при напряжениях до 350 в и токах до 7 ма. Пушка экранировалась от аксиального магнитного поля (250 ÷ 1500 гс).

Когда пучок входил в область однородного поля, он приобретал поперечную энергию, что проявлялось в орбитальном движении электронов. Поперечная энергия пучка составляла примерно 20% от его продольной энергии.

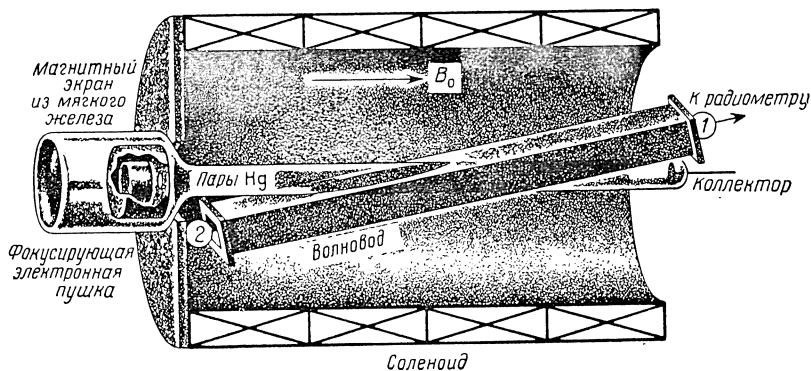
Спектр испускаемого излучения измерялся на фиксированной частоте 3000 Мгц (ширина полосы 2 Мгц) при изменении магнитного поля. В отсутствие паров ртути испускание возникало только на основной частоте  $\omega = \omega_b$ ; полученные данные относительно интенсивности испускания хорошо согласуются с результатами расчетов интенсивности испускания от отдельных некоррелированных электронов.

При наличии паров ртути пучок генерировал слабую вторичную плазму ( $\omega_p < \omega$ ) и затем взаимодействовал с ней. Возникла сильная неустойчивость. Она проявлялась в увеличении испускания на основной частоте  $\omega = \omega_b$  и в появлении испускания на частотах, соответствующих более высоким гармоникам. На основной

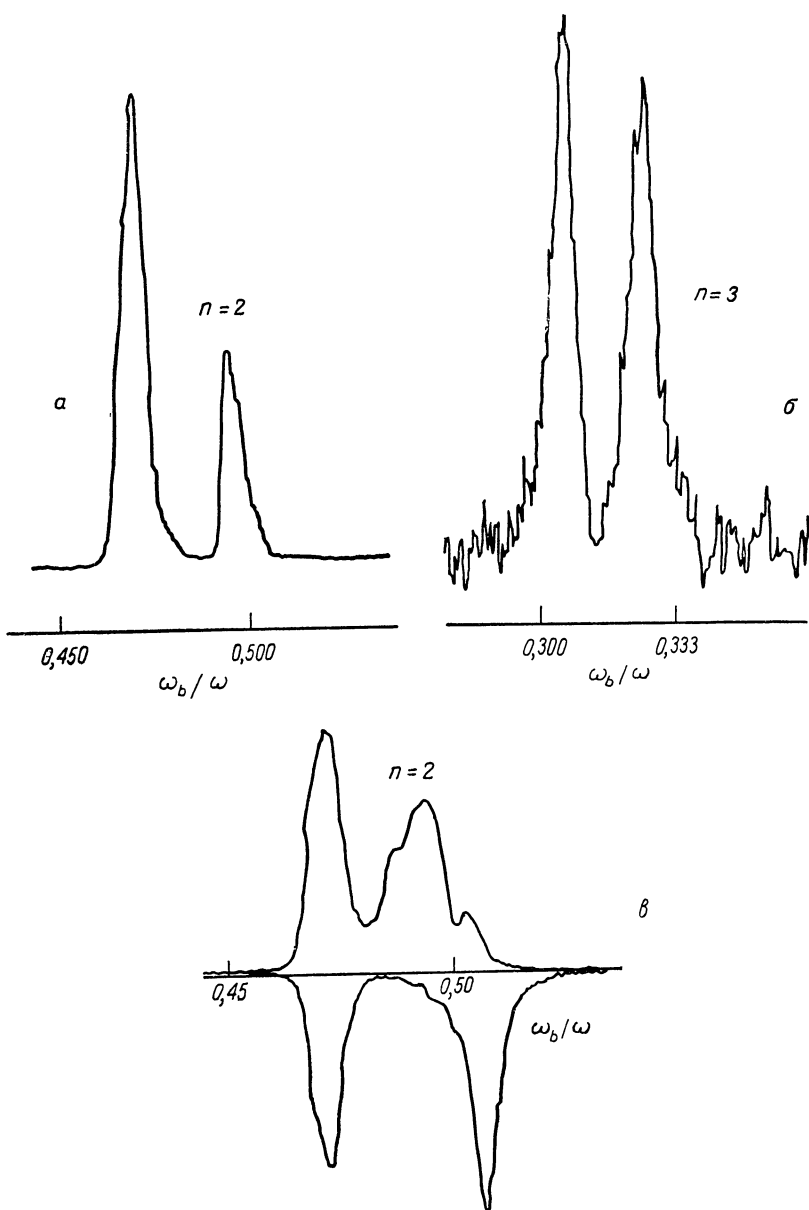


Фиг. 114. Дисперсионные кривые для продольных волн, распространяющихся поперек магнитного поля (ср. фиг. 86) (из работ Крауфорда и Татарониса [357] и Шпика и Берса [463]).

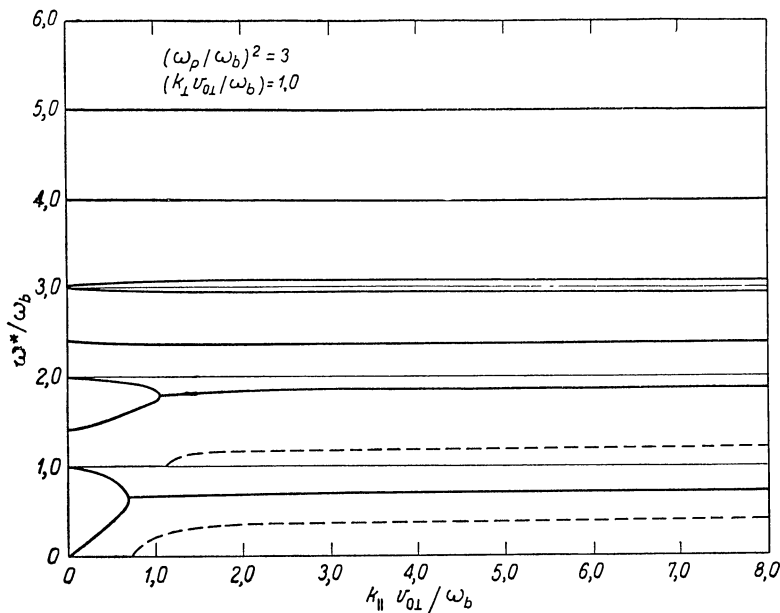
Функция распределения по скоростям в пучке — типа  $\delta$ -функции, она определяется формулой (7.23).



Фиг. 115. Принципиальная схема эксперимента по взаимодействию плазма — пучков (из работы Бекефи и Хупера [435]).



Фиг. 116. Спектры испускания (из работы Бекефи и Хупера [435]).  
*a* — спектр вблизи второй гармоники  $\omega_b$ ; *b* — спектр вблизи третьей гармоники  $\omega_b$ , *v* — кривая выше оси абсцисс — спектр, наблюдаемый через выход 1 (см. фиг. 115), кривая ниже оси абсцисс — спектр, наблюдаемый через выход 2 (см. фиг. 115). Относительный сдвиг обусловлен эффектом Доплера.



Фиг. 117. Наклонное распространение в плотном электронном пучке, показывающее слияние волн с отрицательной и положительной энергией и возникновение неустойчивости (из работы Грубера, Клейна и Ауера [325] и Крауфорда и Татарониса [356]).

Решение есть для действительного значения  $k$  и комплексного значения  $\omega$ . Мнимая часть  $\omega$  показана пунктиром.

частоте мощность излучения достигала величины  $10^{-6}$  вт, т. е. происходило усиление более чем на 35 дб по сравнению с тем, что мы имели при излучении в отсутствие паров. Наблюдалось до четырех более высоких гармоник.

Кривые на фиг. 116, а и б представляют собой спектр вблизи частоты второй и третьей гармоник. Примечательно, что на частоте каждой гармоники возникают не один, а два пика. Так как эти два пика каждого дублета имеют довольно разные свойства, то можно предположить, что возбуждаются две различные моды неустойчивости. Первый пик каждого дублета, наиболее близкий к  $\omega = m\omega_b$ , сдвинут относительно частоты гармоники из-за эффекта Допплера, т. е. он наблюдается на частоте

$$\omega = m\omega_b \pm k_{||}v_{0||},$$

где  $v_{0||}$  — продольная скорость первичного электронного пучка. Второй пик каждого дублета также сдвинут относительно частоты гармоники, но не за счет эффекта Допплера. Эти сдвиги показаны на фиг. 116, в. На этой фигуре кривая, расположенная выше оси

абсцисс, получена при наблюдении испускания, параллельного  $v_{0\parallel}$  (выход 1, см. фиг. 115), а кривая, расположенная ниже оси абсцисс, получена при наблюдении испускания, антипараллельного  $v_{0\parallel}$  (выход 2, см. фиг. 115).

Детали взаимодействия плазмы с пучком, приводящие к развитию двух неустойчивых мод, до сих пор полностью не поняты.

Описание других экспериментов по взаимодействию плазмы с пучком при более высоких напряжениях и токах пучка см. в работах [437—441].

Интересно, что и в самом пучке (без «помощи» какой-либо другой среды) при определенных условиях может проявляться неустойчивость наклонной волны. Это обусловлено взаимодействием верхней ветви (положительная энергия), принадлежащей гармонике  $\omega^* = m\omega_b$ , с нижней ветвью (отрицательная энергия), принадлежащей следующей более высокой гармонике  $\omega^* = (m + 1)\omega_b$ . При достаточно больших значениях плотности электронов эти две ветви пересекаются, и около точки пересечения, примерно посредине между соседними гармониками, развивается неустойчивость. На фиг. 117 приведен пример возникновения этого явления при

$$\omega^* \equiv \omega + k_{\parallel}v_{0\parallel} \approx 0,5\omega_b \quad \text{и} \quad \omega^* \approx 1,8\omega_b.$$

По мере увеличения отношения  $\omega_p/\omega_b$  неустойчивость наступает на более высоких частотах (между второй и третьей, третьей и четвертой гармониками и т. д.).

**Абсолютная и конвективная неустойчивости.** Старрок ясно показал [443], что имеются два физически различных типа неустойчивости. Однако их различие не очевидно, если использовать один лишь критерий неустойчивости (9.2). Эти два типа называются «абсолютная» и «конвективная» неустойчивости. Чтобы отличить одну от другой, рассмотрим локализованный импульс возмущения, возбужденный в бесконечной системе. Если возмущение беспрестанно нарастает во времени (в рассматриваемом здесь линейном приближении) в каждой точке пространства, говорят, что неустойчивость абсолютная. Если возмущение распространяется по системе так, что его амплитуда в любой фиксированной точке, в конце концов, уменьшается со временем, то говорят, что неустойчивость конвективная.

Грубой физической моделью абсолютной неустойчивости может служить осциллятор с собственной внутренней обратной связью; для роста амплитуды колебаний такого осциллятора во времени не требуется, чтобы волны отражались от каких-то физических границ системы. Конвективную неустойчивость можно сравнить с работой усилителя. Здесь, чтобы осцилляции экспоненциально нарастали во времени в любой фиксированной точке пространства,

должно быть обеспечено отражение волн или какая-либо другая внешняя обратная связь.

Конвективная неустойчивость есть, по существу, то же самое, что и пространственно усиливающаяся волна, которая в случае возмущения, синусоидального во времени ( $\omega$  — действительная величина), экспоненциально нарастает с проходимым расстоянием. Поэтому, когда мы имеем дело с конвективной неустойчивостью, нас обычно больше интересует скорость нарастания в пространстве (значение  $\text{Im } k$  для действительного значения  $\omega$ ), чем скорость нарастания во времени (значение  $\text{Im } \omega$  для действительного значения  $k$ ). Однако после решения дисперсионного уравнения и получения комплексного значения  $k$  не всегда легко установить, означает ли наличие мнимой части  $k$  пространственное нарастание или пространственное затухание (напомним, что во всех предыдущих главах, где мы рассматривали устойчивые системы, наличие —  $\text{Im } k$  автоматически означало затухание).

Бриггс и Берс разработали изящный систематический метод, позволяющий различать абсолютные неустойчивости, усиливающиеся и затухающие волны. Подробное обсуждение можно найти в книге Бриггса [444]. Здесь мы приведем некоторые результаты, которые могут оказаться полезными.

Чтобы решить, является ли данная волна с комплексным значением  $k$  и действительным значением  $\omega$  усиливающейся или затухающей, определим, изменяется знак  $\text{Im } k$  или нет, когда мнимая часть  $\omega$  принимает большое отрицательное значение. Если да, то волна усиливается; если нет — она затухает.

Физическую сущность этого утверждения можно понять, рассматривая систему, возбуждаемую локализованным источником с экспоненциально нарастающей синусоидальной временной зависимостью. Если скорость нарастания во времени достаточно велика, все волны должны затухать с удалением от источника. Поэтому в случае усиливающейся волны знак  $\text{Im } k$  должен измениться, когда мнимая часть  $\omega$  принимает большое отрицательное значение (что соответствует нарастанию во времени).

Например, применяя этот критерий к дисперсионному уравнению для пучка в холодной плазме,

$$g(k, \omega) = 0 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - kV_0)^2}, \quad (9.29)$$

непосредственно видим, что взаимодействие медленной волны пространственного заряда (фиг. 112) со средой приводит к усилению на частотах  $\omega < \omega_p$ .

Представляет интерес условие возникновения неустойчивости. Если в системе отсутствуют потери, то комплексные корни  $\omega$  (для действительных значений  $k$ ) дисперсионного соотношения  $g(k, \omega) = 0$  образуют комплексно-сопряженные пары. Предполо-

жим, что неустойчивость впервые появилась при некотором значении  $k = k_0$ ,  $\omega = \omega_0$ . Представляя дисперсионное соотношение в виде ряда по степеням  $(\omega - \omega_0)$ , получаем

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \omega}\right)_0 (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \omega^2}\right)_0 (\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial k}\right)_0 (k - k_0) + \dots = 0. \quad (9.30)$$

Чтобы точке  $k_0$ ,  $\omega_0$  соответствовала пара комплексно-сопряженных корней  $\omega$  при  $k = k_0$ , должно выполняться условие

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \omega}\right)_0 = 0; \quad (9.31)$$

это и есть условие возникновения неустойчивости. Поскольку

$$\frac{\partial g}{\partial \omega} = - \frac{\partial g}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \omega}, \quad (9.32)$$

неустойчивость возникает в той точке, в которой групповая скорость стремится к бесконечности. Налагая условие (9.31) на уравнение (9.29), получаем условие неустойчивости в холодной системе плазма — пучок [ср. (9.23)]

$$kV_0 < \omega_p \left[ 1 + \left( \frac{\omega_{pb}}{\omega_p} \right)^{2/3} \right]^{3/2}. \quad (9.33)$$

**Слабо связанные волны.** В начале этого параграфа мы говорили, что часто предпочтительнее исследовать волновые характеристики отдельных компонент плазменной системы прежде, чем проводить детальный анализ условий неустойчивости (9.2). Действительно, мы нашли, что достаточно важную предварительную информацию можно получить, отыскивая волны отдельных компонент плазмы, несущие отрицательную энергию. Дисперсионные характеристики волн компонент помогают понять физику явления. Это особенно видно, если волны в одной системе, хотя бы слабо, взаимодействуют с волнами в другой системе. При таких условиях, когда системы получают возможность взаимодействовать, дисперсионные характеристики каждой из них остаются практически неизменными, за исключением отдельных точек на диаграмме  $k, \omega$ , где имеет место полное или приблизительное совпадение фазовых скоростей (это точки пересечения дисперсионных кривых).

В системе без потерь могут быть четыре возможных способа связи волн. Они показаны на дисперсионных диаграммах табл. 5 [444]. Дисперсионные характеристики несвязанных волн представлены пунктирными линиями. Сплошные линии (уравнения которых приведены в третьем столбце) соответствуют различным типам связи. Для простоты точки пересечения двух волн выбраны в начале координат диаграммы  $k, \omega$ . В четвертом и пятом столбцах указаны свойства волн. Видно, что неустойчивости возникают только в случаях *B* и *Г*.

## Дисперсионные характеристики слабо связанных волн

Случай	Диаграммы связи	Уравнения связи	Свойства	Примеры
А		$\left(k - \frac{\omega}{V_1}\right) \left(k - \frac{\omega}{V_2}\right) = k_0^2$	$k$ — действительная величина для всех $\omega$ и наоборот Нет неустойчивостей	Связь двух волн с положительной энергией или двух волн с отрицательной энергией
Б		$\left(k - \frac{\omega}{V_1}\right) \left(k + \frac{\omega}{V_2}\right) = -k_0^2$	$\omega$ — действительная величина для всех $k$ $k$ — комплексная величина для действительных значений $\omega$ Волны, затухающие в пространстве Нет неустойчивостей	То же самое
В		$\left(k - \frac{\omega}{V_1}\right) \left(k - \frac{\omega}{V_2}\right) = -k_0^2$	$k$ — комплексная величина для действительных значений $\omega$ и наоборот $k$ имеет значение, соответствующее усилению, для действительных значений $\omega$ Конвективная неустойчивость	Связь волны с положительной энергией и волной с отрицательной энергией, причем групповые скорости волн имеют одно направление
Г		$\left(k - \frac{\omega}{V_1}\right) \left(k + \frac{\omega}{V_2}\right) = k_0^2$	$k$ — действительная величина для всех действительных значений $\omega$ $\omega$ — комплексная величина для действительных значений $k$ Абсолютная неустойчивость	Связь волны с положительной энергией с волной с отрицательной энергией, причем групповые скорости волн имеют противоположные направления



### § 3. Неустойчивости поперечных волн

В этом параграфе обсуждаются некоторые микронеустойчивости, связанные с поперечными электромагнитными волнами. Формальный подход к вопросу о неустойчивостях связан с решением соответствующего дисперсионного уравнения и аналогичен изложенному в предыдущем параграфе. Однако мы ограничимся рассмотрением таких неустойчивостей, в возникновении которых коллективные эффекты не играют роли; в этом случае хорошие результаты дает метод исследования коэффициента поглощения, изложенный в § 1 настоящей главы.

**Неустойчивость бесстолкновительной плазмы вблизи циклотронных гармоник.** Рассмотрим движение электронов, вращающихся во внешнем магнитном поле. Предположим, что вначале (в некоторый момент времени  $t = 0$ ) электроны хаотически распределены в пространстве и имеют произвольные фазы. Некоторые электроны имеют такие начальные фазы, что приобретают энергию от ВЧ поля (поглощение); другие имеют такие фазы, что теряют энергию (индуцированное испускание). Если существует некоторый механизм, приводящий к зависимости фазы вращающегося электрона от его энергии, то появляется возможность упорядочения фаз, что вызывает усиление волны. Это — пример фазовой бунчировки.

Один из нескольких способов достижения фазовой бунчировки — релятивистское изменение массы электрона [57, 426, 427, 445, 446]. Те электроны, которые приобретают энергию от поля, становятся более тяжелыми и, следовательно, начинают все больше отставать по фазе, а те электроны, которые имеют такие начальные фазы, что теряют энергию, становятся более легкими и начинают все больше опережать по фазе. В результате возникает бунчировка, которая может привести к когерентному испусканию. Если волна проходит через плазму, она будет нарастать или в отсутствие внешнего сигнала неустойчивость может развиваться из шумов. Изучение траекторий электронов [447] на основе такой физической картины подтверждает возможность нарастания волн.

Обсуждение, изложенное в вышеупомянутых работах (оно приводится ниже), основано на анализе движения отдельных, не взаимодействующих электронов, фактически находящихся в вакууме. Берс и Спек [448] дали исчерпывающий анализ такой «релятивистской» неустойчивости для плазмы произвольной плотности, решив точное релятивистское дисперсионное уравнение (§ 2 гл. 7) для необыкновенной волны, распространяющейся в бесстолкновительной плазме.

Вычислим теперь скорость нарастания для случая распространения волны перпендикулярно магнитному полю, т. е.  $k_{\parallel} = 0$ . Для простоты предположим, что функция распределения электронов

по скоростям изотропна и имеет вид

$$f(p) \sim N p^l e^{-be}, \quad (9.34)$$

где  $\varepsilon$  — релятивистская энергия,  $l$  и  $b$  — неотрицательные постоянные. Отметим, что функция вида (9.34) удовлетворяет неравенству (9.8). Предположим, что электроны умеренно релятивистские, и подставим выражения (6.44), (6.67) и (9.34) в уравнение (2.46). Проинтегрировав, получим коэффициент поглощения  $\alpha_\omega$  в окрестности  $n$ -й гармоники необыкновенной волны:

$$\alpha_\omega^{(x)}(n) L = -2\pi\Lambda\mu^{2-n} \frac{[(l+3)/4]^{2-n}}{[(l+1)/2]!} \frac{n^{2n-1}}{(2n+1)!} \times \\ \times \frac{(l-2\Omega)}{(1-Q_n)^2} \Omega^{(2n+l-1)/2} e^{-\Omega}. \quad (9.35)$$

Здесь

$$\Lambda = \frac{\omega_p^2 L}{c\omega_b} \quad [\text{ср. (6.73)}], \\ \mu = \frac{m_0 c^2}{\langle U \rangle}, \quad (9.36) \\ Q = \frac{\Omega}{\mu} \left[ \frac{(l+3)}{4} \right]^{-1} \ll 1,$$

а  $\Omega$  зависит от частоты:

$$\Omega = \mu \left( \frac{l+3}{4} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{n\omega_b} \right)^2 \right] \approx \mu \left( \frac{l+3}{2} \right) \left( \frac{n\omega_b - \omega}{n\omega_b} \right); \quad (9.37)$$

величина  $\langle U \rangle$  — средняя кинетическая энергия электрона.

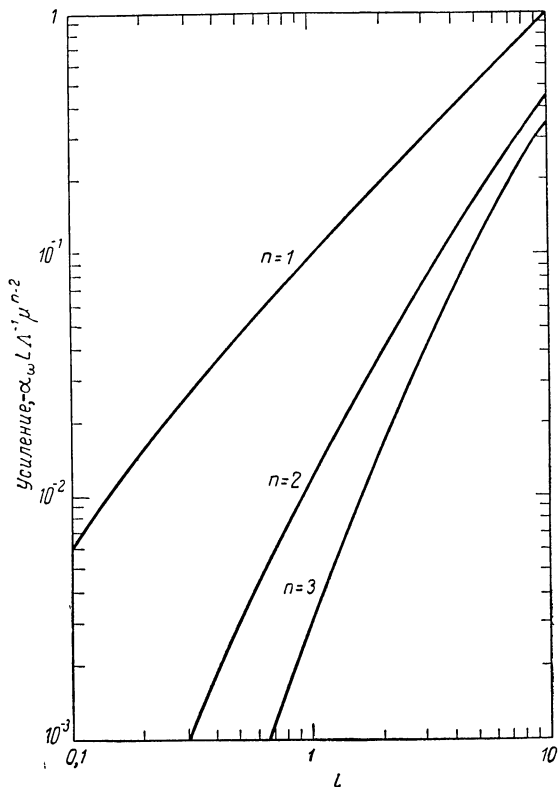
Выражение (9.35) показывает, что на частотах, при которых  $\Omega < l/2$ , коэффициент поглощения отрицателен, а при которых  $\Omega > l/2$ , — положителен. Неустойчивость возникает в узких полосах частот вблизи циклотронной частоты и ее гармоник

$$0 < \frac{n\omega_b - \omega}{n\omega_b} \leq \frac{l/(l+3)}{\mu}.$$

На фиг. 118 показана зависимость максимального значения коэффициента —  $\alpha_\omega$  для первых трех гармоник от параметра  $l$ , входящего в функцию распределения (9.34). Чем больше значение  $l$ , тем больше положительный наклон функции  $f(p)$ , и поэтому тем больше скорость нарастания неустойчивости в пространстве.

Рассмотрим установку с горячей плазмой с характерным размером  $L = 10$  см; пусть средняя кинетическая энергия электрона  $\langle U \rangle = 50$  кэв и поле  $B_0 = 5 \times 10^4$  гс. Предположим, что отношение электронного давления к магнитному давлению составляет

$$\frac{2\mu_0 N k T}{B_0^2} = 0,1.$$



Фиг. 118. Зависимость максимума скорости нарастания необыкновенной волны на частотах вблизи первых трех гармоник электронной циклотронной частоты от отклонения  $l$  от максвелловского распределения (из работы Бекефи, Хиршфилда и Брауна [427]).

Электроны — умеренно релятивистские с изотропным распределением скоростей в бесстолкновительной плазме.

Тогда из формулы (9.36) получаем  $\Lambda = 225$ . Из фиг. 118 находим, что для  $n = 1$  и, например,  $l = 0,1$  величина  $-\alpha_{\omega} L = 15$ ; это означает, что скорость нарастания равна 6,5 дБ на 1 см длины пути. Для больших  $l$  и  $\Lambda$  скорость нарастания, конечно, больше.

Частотный спектр неустойчивости становится яснее, если рассмотреть более простой случай — распределение электронов по скоростям, описываемое функцией распределения типа  $\delta$ -функции:

$$f(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \frac{N}{2\pi v_{0\perp}} \delta(v_{\perp} - v_{0\perp}) \delta(v_{\parallel} - v_{0\parallel}). \quad (9.38)$$

Если предположить, что электроны совсем слабо релятивистские, т. е. нужно рассматривать эффекты только на основной циклотронной частоте, то мы получим простое соотношение [ср. (6.28)]:

$$\alpha_{\omega} = \frac{\omega_p^2 \tau}{2c} \phi(\omega, \omega_b, \tau), \quad (9.39)$$

где

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1 + \Delta^2 - q\Delta}{(1 + \Delta^2)^2}, \\ \Delta &= (\omega - \omega_0) \tau, \quad \omega_0 = \frac{eB_0}{m_0} (1 - \beta_0^2)^{1/2} = \omega_b \left[ 1 - \left( \frac{v_{0\parallel}}{c} \right)^2 - \left( \frac{v_{0\perp}}{c} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ q &= \omega_b \tau \frac{v_{0\perp}^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (9.40)$$

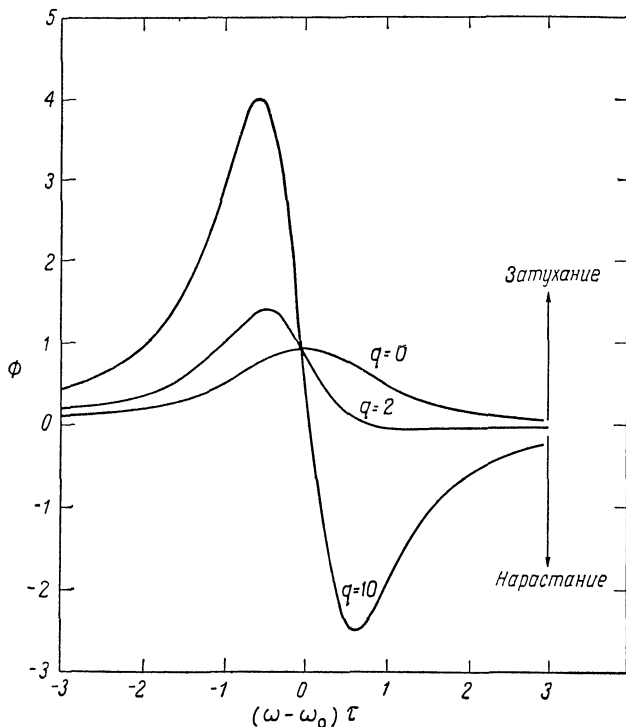
Параметр  $\tau$  представляет собой некоторое эффективное время столкновения, входящее в выражение для дифференциальной испускательной способности

$$\eta_{\omega} \sim [1 + (\omega - \omega_b \sqrt{1 - \beta^2})^2 \tau^2]^{-1}.$$

Параметр  $\tau$  может означать наличие истинных столкновений, испытываемых электронами; в отсутствие столкновений его можно взять равным (приблизительно) времени пролета электронов через область наблюдения.

На фиг. 119 приведен спектр  $\phi$ . Для  $q \leq 2$  неустойчивости нет, что указывает на наличие некоторой минимальной «начальной» скорости  $v_{0\perp}$ , ниже которой существует только затухание. Если неустойчивость наступает, то это происходит на частотах, больших релятивистской циклотронной частоты  $\omega_0$ .

Существование такой неустойчивости впервые продемонстрировали Хиршфилд и Вахтель [449] (см. также работы Ботта [450]). Электроны из электронной пушки ускорялись разностью потенциалов вплоть до 5000 в. Большая часть приобретаемой продольной кинетической энергии преобразовывалась в поперечную энергию  $mv_{0\perp}^2/2$  при прохождении пучком вначале винтового поля [451], а затем постепенно увеличивающегося магнитного поля. Далее, пучок, имевший вид плотно намотанной спирали, с относительно небольшой дрейфовой скоростью  $v_{0\parallel}$  вводился аксиально в высокочастотный резонатор, в котором возбуждалась мода  $TE_{011}$ . Эта мода соответствует распространению волн перпендикулярно приложенному аксиальному магнитному полю. Измерялась зависимость поглощения микроволнового сигнала на частоте приблизительно 6000 Мгц, записывающего резонатор, от магнитного поля. Наблюдалось поглощение как отрицательное, так и положительное, причем кривые по форме были примерно похожи на изображенные на фиг. 119. Используя почти аналогичную методику, Ботт [450]



Фиг. 119. Частотный спектр коэффициента поглощения вблизи электронной циклотронной частоты, показывающий неустойчивость на частотах  $\omega > \omega_0 (= \omega_b \sqrt{1 - \beta^2})$  (из работы Хиршфилда и Вахтеля [449]).

Волны распространяются перпендикулярно магнитному полю в весьма умеренно релятивистской плазме.

сконструировал генератор на длину волны 2 мм с выходной мощностью от 1 до 2 вт.

Когда угол распространения отклоняется от  $\theta = \pi/2$ , скорость нарастания этой неустойчивости очень заметно уменьшается [64] и требуется увеличить минимальную «начальную» скорость  $v_{0\perp}$ . Если  $\theta$  приближается к нулю ( $k_{\perp} \rightarrow 0$ ), появляется новый набор неустойчивостей [62]. В то время как первая неустойчивость существует независимо от того, является ли функция  $f$  изотропной или нет, последний набор неустойчивостей связан с анизотропией функции распределения и обусловлен членом, входящим в уравнение (2.54), а именно

$$\cos \theta \left( p_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial p_{\perp}} - p_{\perp} \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} \right) \quad (9.41)$$

[ср. (7.15) и (7.17)] С физической точки зрения этот член описывает взаимодействие электронов с ВЧ магнитным полем  $\mathbf{B}$ . Он связан с членом  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{f}/d\mathbf{v}$  в уравнении Власова.

**Неустойчивость циклотронного излучения ультрарелятивистских электронов.** Твисс [426] высказал утверждение, что циклотронное излучение ультрарелятивистских электронов с немаксвелловской функцией распределения может стать неустойчивым (т. е. коэффициент поглощения  $\alpha_\omega$  может стать отрицательным). Он пришел к такому заключению на основе ошибочного выражения для коэффициента поглощения. Исследуем теперь этот вопрос об устойчивости.

Рассмотрим изотропное, но не обязательно максвелловское, распределение зарядов. Правильное релятивистское выражение для  $\alpha_\omega$  [48, 179, 427] определяется уравнением (2.46). Исходя из этого уравнения, мы приходим к условиям неустойчивости (9.8) и (9.9), которые для ультрарелятивистских энергий ( $\epsilon = pc$ ) имеют вид

$$\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon} > 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \epsilon^2 \eta_\omega(\epsilon) < 0.$$

Здесь  $\epsilon$  — полная релятивистская энергия, а  $\eta_\omega(\epsilon)$  — испускательная способность отдельного электрона. Используя выражения (6.47) или (6.48) для  $\eta_\omega(\epsilon)$ , можно легко показать, что величина  $\epsilon^2 \eta_\omega(\epsilon)$  — монотонно возрастающая функция энергии для всех значений  $\epsilon$ . Поэтому второе вышеуказанное неравенство нельзя удовлетворить, и какой бы вид ни имела функция распределения  $f(\epsilon)$ , неустойчивость не наступает.

Однако ситуация оказывается совершенно иной, когда релятивистские заряды движутся не в вакууме, а в среде (плазме). Железняков показал [452], что при таких условиях система действительно может стать неустойчивой, и амплитуда циклотронного излучения может нарастать в пространстве (а, возможно, также и во времени) при прохождении излучения через плазменную среду.

Рассмотрим частный случай фона, состоящего из электронов холодной плазмы с относительно высокой плотностью (по сравнению с плотностью релятивистских электронов). Хотя электроны холодной плазмы сами заметно не излучают, их присутствие проявляется в том, что они создают преломляющую среду, через которую распространяется излучение. Из-за наличия магнитного поля показатель преломления является анизотропным. Однако на очень высоких частотах, при которых релятивистские электроны излучают большую часть своей энергии (см. § 3 гл. 6), т. е. при  $\omega \gg \omega_b$  и  $\omega \gg \omega_p$  (где  $\omega_p$  — электронная плазменная частота), показатель

преломления  $n$  хорошо аппроксимируется выражением

$$n = \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right]^{1/2} \quad \text{при } |n - 1| \ll 1.$$

Чтобы вычислить коэффициент поглощения, определяемый уравнением (2.46), нужно знать испускательную способность  $\eta_\omega(\varepsilon)$  для волн, распространяющихся через преломляющую среду. Нетрудно показать [453], что испускательные способности, эквивалентные (6.47) и (6.48), определяются следующими выражениями:

$$\langle \eta_\omega^{(0, x)} \rangle = \frac{\sqrt{3} e^2 \omega_b}{64\pi^3 \varepsilon_0 c} \left[ 1 + \gamma^2 \frac{\omega_p^2}{\omega_c'^2} \right]^{-1/2} \frac{\omega}{\omega_c'} \left[ \int_{\omega/\omega_c'}^{\infty} K_{1/3}(t) dt \pm K_{2/3} \left( \frac{\omega}{\omega_c'} \right) \right],$$

$$\langle \eta_\omega \rangle = \frac{\sqrt{3} e^2 \omega_b}{32\pi^3 \varepsilon_0 c} \left[ 1 + \gamma^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right]^{-1/2} \frac{\omega}{\omega_c'} \int_{\omega/\omega_c'}^{\infty} K_{5/3}(t) dt,$$

где

$$\omega_c' = \frac{3}{2} \omega_b \gamma^2 \left[ 1 + \gamma^2 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right]^{-3/2}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon}{m_0 c^2}.$$

При таких испускательных способностях неравенства, приведенные в начале данного раздела, могут быть удовлетворены. Причина этого — появление нового члена  $(\gamma \omega_p / \omega)^2$ . Чтобы обсудить его значение, удобно расщепить неравенство

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} [\varepsilon^2 \eta_\omega(\varepsilon)] < 0$$

на два неравенства, относящиеся к двум энергетическим областям

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 \eta_\omega(\varepsilon) \right]_{\text{I}} + \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 \eta_\omega(\varepsilon) \right]_{\text{II}} < 0.$$

В области I энергии таковы, что

$$\left( \gamma \frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \ll 1 \quad \text{или} \quad \varepsilon^2 \ll m_0^2 c^4 \frac{\omega^2}{\omega_p^2}.$$

Здесь плазменный фон не влияет на испускательные способности и релятивистские электроны вращаются, как в вакууме. Величина

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 \eta_\omega(\varepsilon) \right]_{\text{I}} > 0,$$

и электроны с такими энергиями вносят положительный вклад (затухание) в волну. Однако в области II, где

$$\varepsilon^2 \gg m_0^2 c^4 \left( \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right),$$

возникает отрицательный вклад в величину

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 \eta_{\omega}(\varepsilon) \right]_{\Pi}.$$

Поэтому, если функция распределения скоростей выбрана такой, что  $\partial f(\varepsilon)/\partial \varepsilon > 0$ , то в области, где  $[\varepsilon^2 \eta_{\omega}(\varepsilon)]_{\Pi}$  уменьшается с увеличением  $\varepsilon$ , может возникнуть полное отрицательное поглощение.

Расчеты показывают, что величина  $\partial[\varepsilon^2 \eta_{\omega}(\varepsilon)]/\partial \varepsilon$  меняет знак при энергии  $\varepsilon = \varepsilon^*$ , определяемой выражением

$$\varepsilon^* = q m_0 c^2 \left( \frac{\omega_b}{\omega_p} \right) \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2,$$

где  $q$  — числовой коэффициент порядка единицы. Тогда, если должным образом выбрать функцию  $f(\varepsilon)$ , а именно так, чтобы основной вклад в коэффициент поглощения  $\alpha_{\omega}$  происходил от области с энергиями электронов  $\varepsilon > \varepsilon^*$ , то отрицательное поглощение будет обеспечено.

Для определения величины коэффициента поглощения  $-\alpha_{\omega}$ , областей частот возникающей неустойчивости и т. д. требуется детальный расчет  $\alpha_{\omega}$  для конкретных значений функций распределения. Такие расчеты проведены в работах [452, 454].

Этот тип неустойчивости может иметь отношение к сильно не-тепловому излучению космических источников типа квазаров.

**Неустойчивости, обусловленные столкновениями.** В § 2 настоящей главы было найдено, что затухание, возникающее из-за столкновений, может привести к неустойчивостям. Исследуем теперь неустойчивости, обусловленные столкновениями различного рода.

Рассмотрим плазму с изотропным распределением нерелятивистских электронов, помещенную в однородное магнитное поле  $\mathbf{B}_0$ . Коэффициент поглощения для разреженной плазмы ( $k \rightarrow \omega/c$ ) определяется формулами (2.46) и (6.24):

$$\alpha_{\omega} = -\frac{2\pi}{3} \frac{\omega_p^2}{c} (1 + \cos^2 \theta) \int_0^{\infty} \frac{\nu(\nu)}{(\omega - \omega_b)^2 + \nu^2(\nu)} \frac{\partial f}{\partial \nu} \nu^3 d\nu, \quad (9.42)$$

где  $\theta$  — угол между направлением распространения и направлением поля  $\mathbf{B}_0$ , а  $\nu(\nu)$  — частота столкновений для передачи импульса. Ясно, что если частота  $\nu$  не зависит от скорости, правая часть (9.42) всегда неотрицательна и неустойчивость не развивается. Однако если частота  $\nu$  меняется в зависимости от  $\nu$ , коэффициент поглощения  $\alpha_{\omega}$  может в самом деле стать отрицательным [57]; например, положим  $\omega = \omega_b$  и применим условие (9.9) к подинтегральному выражению (9.42). В результате мы придем к выводу,



что волна может нарастать, если дополнительно к условию  $df/dv > 0$  выполняется неравенство

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{v^3}{v(v)} \right) < 0. \quad (9.43)$$

Слабо ионизованная плазма таких газов, как аргон, криптон и ксенон (но, скажем, не гелий или неон), в которой проявляется сильный рамзауэровский минимум, имеет частоты столкновений, удовлетворяющие неравенству (9.43) в диапазоне энергий от  $\sim 1$  до  $\sim 10$  эв.

Чтобы найти спектр  $\alpha_\omega$ , предположим, что в вышеуказанном диапазоне энергий частоту столкновений можно аппроксимировать степенным законом

$$v = av^h, \quad (9.44)$$

где показатель  $h$  — некоторая положительная или отрицательная постоянная величина. Предположим также, что функция распределения — типа  $\delta$ -функции, т. е.

$$f(v) = \frac{N}{4\pi v_0^2} \delta(v - v_0). \quad (9.45)$$

Тогда

$$\alpha_\omega = \frac{1}{6} \frac{\omega_p^2}{c} (1 + \cos^2 \theta) \frac{(h+3)v_0}{(\Delta^2 + v_0^2)^2} \left[ \Delta^2 - \left( \frac{h-3}{h+3} \right) v_0^2 \right], \quad (9.46)$$

где

$$\Delta = (\omega - \omega_b) \quad \text{и} \quad v_0 = av_0^h.$$

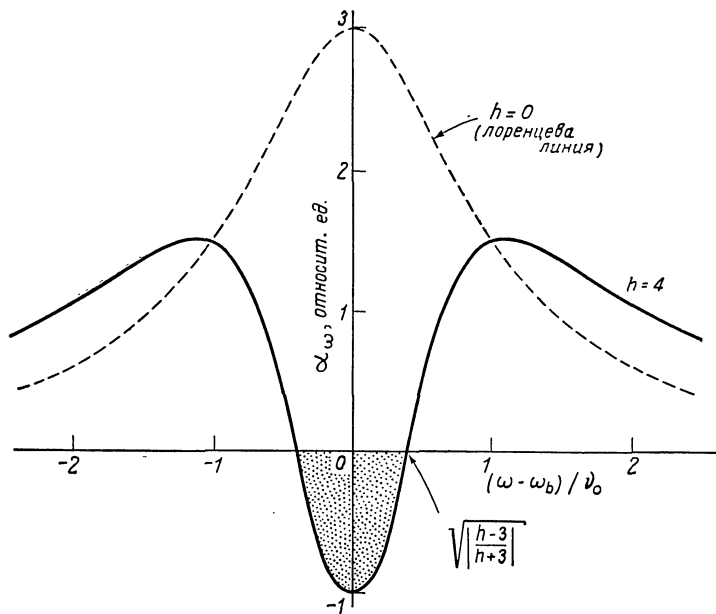
Спектр схематически показан на фиг. 120. Для возникновения неустойчивости требуется газ с такой быстро *увеличивающейся* частотой столкновения, для которой  $h > 3$ . Если мы возьмем  $h = 4$ ,  $N = 10^{10} \text{ см}^{-3}$  и  $v_0 = 10^8 \text{ сек}^{-1}$ ,  $\theta = 0$ , то найдем

$$\alpha_\omega \text{ (макс)} \approx -4 \text{ см}^{-1};$$

это означает, что скорость нарастания неустойчивости равна  $\sim 17 \text{ дб}$  на  $1 \text{ см}$  длины пути.

Наблюдения этой неустойчивости описаны в работах [455, 456]<sup>1)</sup>. Разряд на постоянном токе в аргоне, ксеноне или криптоне зажегся в диапазоне давлений от  $\sim 0,05$  до  $\sim 1 \text{ торр}$  при токах от  $\sim 10$  до  $300 \text{ ма}$ . На столб плазмы налагалось аксиальное магнитное поле. Электромагнитное излучение наблюдалось на частоте  $\omega$  вблизи электронной циклотронной частоты  $\omega_b$ . Хотя плазма поддерживалась в стационарном состоянии, возникали большие

<sup>1)</sup> В отчете [456] дана библиография, в которой можно найти другие статьи на эту тему.



Фиг. 120. Частотный спектр коэффициента поглощения вблизи электронной циклотронной частоты в плазме, в которой преобладают столкновения.

Область неустойчивости показана штриховкой.  $h$  — показатель степени в зависимости  $\nu(\nu) \sim \nu^h$ .

вспышки излучения с частотой повторения в диапазоне от 1 до 50 кгц. Пик испускания на целых 35 дб превышает тепловое излучение плазмы. В неоне и гелии эффект не наблюдался, вероятно, из-за того, что  $\nu(\nu)$  имеет неподходящую зависимость от скорости. Эксперименты были проведены на частотах в диапазоне от частоты  $\omega = \omega_b$ , равной  $\sim 100$  Мгц до 9000 Мгц, и были получены, в общем, те же самые эффекты.

Повторяющиеся вспышки излучения могут быть обусловлены таким сильным развитием неустойчивости, что обратная реакция на частицы вызывает гашение эффекта. Заслуживают внимания также наблюдаемые ширины линий  $\Delta\omega$ , которые оказываются уже, чем следовало бы ожидать для простого столкновительного уширения. Это, однако, можно понять, если учесть, что максимальная скорость нарастания ограничена узким диапазоном частот.

В работе [457] описано также усиление слабого микроволнового сигнала при его распространении через плазму.

Вахтель и Хиршфилд [458] вводили очень слабый (0,1 ма), практически моноэнергетический электронный пучок не в плазму, а в неонизованный газ (ксенон). Они наблюдали спектр поглощения, аналогичный тому, который показан сплошной линией на

фиг. 120. В их эксперименте, в отличие от более ранних работ в этой области, экспериментально очень тщательно контролировались энергия и функция распределения электронов.

Укажем на то, что наблюдаемое усиление циклотронного излучения, приведенное на фиг. 16 и 17а, тесно связано с рассмотренной выше неустойчивостью, обусловленной столкновениями. Отличие в этих двух экспериментах заключается только в степени отклонения распределения скоростей электронов от максвелловского. В случае усиленного циклотронного излучения функция  $f(v)$  такова, что приводит к уменьшению  $\alpha_\omega$  и вследствие этого интенсивность

$$I_\omega = \frac{j_\omega}{\alpha_\omega}$$

превышает значение интенсивности для термически равновесной среды

$$I_\omega = \frac{\omega^2}{8\pi^3 c^2} \kappa T.$$

Поэтому верхушка линии циклотронного излучения возвышается над спектром черного тела, как показано на фиг. 16 и 17а. С другой стороны, неустойчивость, обусловленная столкновениями, при  $\omega = \omega_b$  связана с тем, что функция  $f(v)$  имеет «обращенную населенность» и удовлетворяет неравенству (9.8). Коэффициент поглощения уменьшается, проходит через нуль и затем становится отрицательным.

Выясним теперь, требуется ли для неустойчивости, обусловленной столкновениями, наличие магнитного поля. Оказалось, что не требуется. Заметим вначале, что выражение (9.42) остается справедливым, даже если положить  $\omega_b = 0$ . Единственное изменение, которое необходимо сделать, — заменить угловой множитель  $(1 + \cos^2 \theta)$  на 2 [см. (3.49)]. Таким образом, когда эта неустойчивость возникает, ее можно рассматривать как эффект тормозного, а не циклотронного излучения.

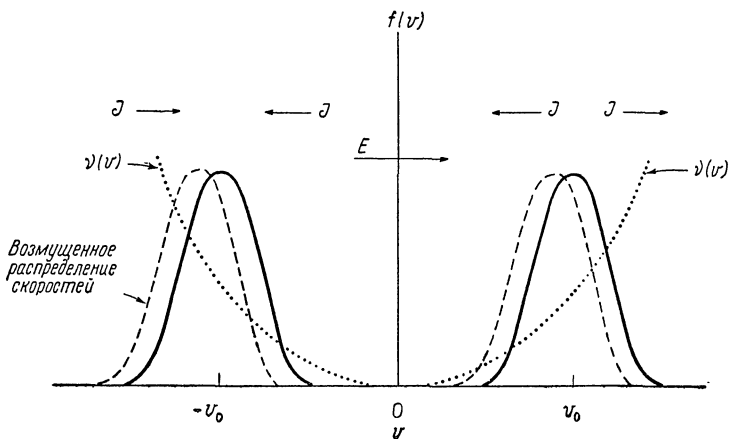
Спектр  $\alpha_\omega$  определяется положительной (правой) половиной кривой на фиг. 120 при  $\omega_b = 0$ . Заметим, что для отрицательного поглощения по-прежнему требуется  $h > 3$ ; отрицательное поглощение возникает на низких частотах:

$$\omega < \sqrt{\frac{h-3}{h+3}} v_0.$$

Такую неустойчивость «тормозного излучения» наблюдал Охара [459] (см. также работу [456]).

Уравнение (9.42) показывает, что может возникнуть высокочастотная неустойчивость «тормозного излучения», если выполняется условие

$$\frac{\partial}{\partial v} [v^3 \nu(v)] < 0, \quad \omega_b = 0, \quad v \ll \omega. \quad (9.47)$$



Фиг. 121. «Моментальная фотография» возмущения распределения электронных скоростей, вызванного ВЧ электрическим полем (из работы Муси и Йосиды [462]).  $J$  — индуцированный ток, связанный с группой электронов в четырех характерных областях немаксвелловского распределения. Отметим, что выбранное распределение удовлетворяет неравенству (9.8).

Чтобы удовлетворить этому неравенству, необходимо взять газ, в котором частота столкновений электронов для передачи импульса *спадает* достаточно быстро с увеличением  $v$ , однако такой газ неизвестен. Даже электрон-ионные столкновения в полностью ионизованном газе (см. § 4 и 6 гл. 3) не удовлетворяют этому требованию. Этот вопрос вызвал некоторый интерес в связи с возможностью проявления неустойчивости тормозного излучения в космической плазме и обсуждался в нескольких работах [73, 460, 461].

Неустойчивости, индуцированные столкновениями, можно объяснить на очень простой физической модели [462]. Рассмотрим изотропное немаксвелловское распределение скоростей, поперечное сечение которого в пространстве скоростей показано на фиг. 121. Положим для простоты статическое магнитное поле равным нулю. Сплошные кривые представляют функцию распределения в отсутствие электрического поля. При наложении электрического поля  $E$ , частота которого  $\omega$  мала по сравнению с  $v$ , электроны движутся в фазе с  $-eE$ . Функция распределения тогда смещается, как показано на фигуре пунктирными кривыми. ВЧ ток небольшой группы электронов в интервале скоростей  $dv$ , вызванный электрическим полем, вычисляется как разность хаотических токов до и после включения поля. Эти индуцированные токи обозначены  $J$  и показаны стрелками для четырех характерных интервалов скоростей. Видно, что индуцированный ток протекает в направлении, противоположном  $E$  для тех электронов, скорости которых  $|v|$  меньше  $v_0$ . Тогда эти электроны вносят отрицательный вклад в полную

ВЧ проводимость  $\sigma$ . Если полная сумма отрицательных вкладов превышает сумму положительных вкладов, то проводимость отрицательна и плазма становится неустойчивой; ВЧ проводимость  $\sigma$  и коэффициент поглощения связаны соотношением [см. (1.15) и (3.48)]

$$\alpha_{\omega} = \frac{1}{n} \frac{\operatorname{Re} \sigma}{\epsilon_0 c}, \quad (9.48)$$

поэтому отрицательное значение  $\sigma$  означает, что и коэффициент поглощения отрицателен.

Поскольку частота столкновений для передачи импульса препятствует протеканию индуцированного тока  $|J| \sim 1/v$  [как видно из (3.44)], то такая функция  $v(v)$ , которая быстро нарастает в зависимости от скорости, уменьшает вклад в положительные значения  $d\sigma$  электронов с высокими скоростями. Таким образом, оказывается возможным получить результирующий индуцированный ток  $J$ , протекающий антипараллельно  $E$ .

Аналогичную аргументацию можно использовать для объяснения ВЧ неустойчивости при  $\omega > v$ .

## Экспериментальные методы

В этой главе обсуждается несколько избранных вопросов, связанных с испусканием и течением излучения в волноводах и резонаторах. Описываются методы измерения излучательных характеристик плазмы, помещенной в такие устройства. Излагается теория приема излучения антеннами. В последнем параграфе обсуждаются методы детектирования излучения от стационарной и нестационарной плазмы.

### § 1. Течение излучения в волноводах

Изучать распространение излучения в волноводах важно для практических применений. Для этого излучение от плазмы, принятое антенной, необходимо направить к детектору или же плазму специально поместить в волновод или в резонатор, присоединенный к волноводу.

Рассмотрим пустой волновод произвольного, но постоянного поперечного сечения (фиг. 122) с идеально проводящими стенками. Пусть электромагнитные поля имеют экспоненциальную зависимость от  $z$  вида  $e^{-j\beta z}$ . Как хорошо известно, решая уравнения Максвелла, мы получаем два несвязанных волновых уравнения для  $H$ -волн (или поперечных электрических волн, ТЕ-волн)

$$E_z = 0,$$

$$\nabla_T^2 H_z + p_H^2 H_z = 0, \quad (10.1)$$

$$p_H^2 = k_0^2 - \beta^2, \quad k_0 = \frac{\omega}{c} \quad (10.2)$$

и для  $E$ -волн (или поперечных магнитных волн, ТМ-волн):

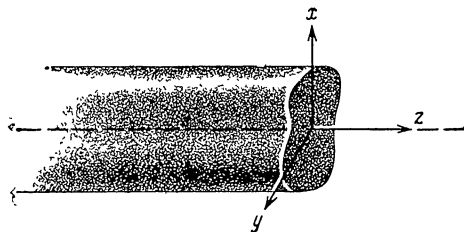
$$H_z = 0,$$

$$\nabla_T^2 E_z + p_E^2 E_z = 0, \quad (10.3)$$

$$p_E^2 = k_0^2 - \beta^2. \quad (10.4)$$

Оператор  $\nabla_T$ , входящий в уравнения (10.1) и (10.3) [см. также (5.64)], означает

$$\nabla_T = \hat{\mathbf{i}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{i}}_y \frac{\partial}{\partial y}.$$



Ф и г. 122. Сечение волновода.

Уравнения (10.1) и (10.3) записаны с учетом граничных условий на идеально проводящих стенках. При этом собственные значения уравнений  $p^2$  определяются формой поперечного сечения волновода и не зависят от частоты. Собственные значения  $p^2$  — положительные действительные числа, следовательно,  $\beta$  — либо чисто действительная величина, что соответствует распространению волн, либо чисто мнимая, что отвечает исчезновению или отсечке волн. Будем обозначать собственные значения, относящиеся к  $H$ -волнам,  $p_{Hm,n}$ , а относящиеся к  $E$ -волнам,  $p_{Em,n}$ ; например, в волноводе прямоугольного сечения

$$\begin{aligned} \frac{p_{Hm,n}^2}{\pi^2} &= \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}, & m, n &= 0, 1, 2, \dots, \\ \frac{p_{Em,n}^2}{\pi^2} &= \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}, & m, n &= 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \tag{10.5}$$

где  $a$  — размер волновода вдоль оси  $x$ , а  $b$  — размер волновода вдоль оси  $y$ . Очевидно, волны свободно распространяются, если

$$p_H^2 < \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad \text{и} \quad p_E^2 < \left(\frac{\omega}{c}\right)^2.$$

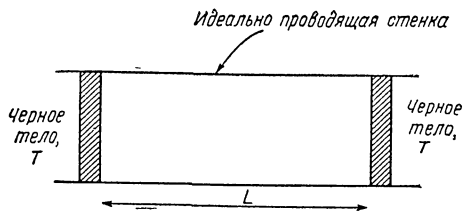
Обозначим через  $p_H^*$  и  $p_E^*$  верхнюю границу параметра  $p$ :

$$p_H^* = p_E^* = \frac{\omega}{c}; \tag{10.6}$$

следовательно, для данной частоты  $\omega$  мы имеем

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \leq \frac{p^{*2}}{\pi^2}. \tag{10.7}$$

**Течение черного излучения.** В то время как интенсивность  $I_\omega$  является подходящей величиной для описания излучения в свободном пространстве, она теряет свое значение при описании излучения в пространстве, ограниченном металлическими стенками. Вместо интенсивности  $I_\omega$  мы будем теперь использовать полную



Ф и г. 123.

мощность  $P_{\omega}(m, n)$  в одной моде  $m, n$ , протекающую по волноводу в одном направлении и отнесенную к единичному интервалу круговых частот  $d\omega$ , причем центр этого интервала находится в точке  $\omega$ .

Чтобы найти поток, поставим по одному черному излучателю на каждом конце длинного волновода (фиг. 123). Их излучение распределяется по всем возможным, взаимно независимым волноводным модам распространения  $\rho_{Hm, n}$  и  $\rho_{Em, n}$ . Выберем одну моду и предположим, что на этой моде излучатели идеально согласованы с волноводом, т. е. на их поверхностях не возникает отражения. Предположим также, что расстояние  $L$  между излучателями велико по сравнению с длиной волны в волноводе  $\lambda_{m, n} = 2\pi/\beta_{m, n}$ .

Поместим идеально проводящие пластинки прямо перед поверхностью каждого излучателя и тем самым запрем черное излучение в резонаторе длиной  $L$ . Собственные частоты резонатора определяются требованием: на длине  $L$  должно укладываться целое число полуволн:

$$\beta = \frac{s\pi}{L}, \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (10.8)$$

Число собственных колебаний  $ds_{m, n}$  данной фиксированной моды  $m, n$  в пределах интервала частот  $d\omega$  определяется формулой

$$ds_{m, n} = \frac{L}{\pi} d\beta_{m, n}. \quad (10.9)$$

Используя (10.2) или (10.4), находим

$$ds_{m, n} = \frac{L}{\pi} \frac{\omega}{c^2} \frac{d\omega}{\beta_{m, n}} = \frac{L}{\pi} \frac{d\omega}{w_{m, n}}, \quad (10.10)$$

где  $w_{m, n}$  — групповая скорость.

На каждую моду резонатора приходится энергия (см. § 1 гл. 2)

$$u_{\omega}(m, n) = \frac{\hbar\omega}{e^{i\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (10.11)$$



а полная энергия в интервале частот  $d\omega$  составляет

$$u_{\omega}(m, n) \frac{L}{\pi} \frac{d\omega}{\omega_{m, n}}.$$

В отсутствие отражателей эта величина должна быть равна энергии, излучаемой обоими источниками в волновод за время  $t = L/\omega_{m, n}$ . Поэтому мощность в одной моде  $m, n$ , протекающая в одном направлении по волноводу и отнесенная к единичному интервалу круговых частот  $d\omega$ , определяется выражением

$$P_{\omega}(m, n) = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (10.12)$$

$$= \frac{kT}{2\pi} \quad \text{для} \quad \frac{\hbar\omega}{kT} \ll 1. \quad (10.13)$$

Формула (10.12) — волноводный аналог формулы Планка для излучения в свободном пространстве, а формула (10.13) эквивалентна приближению Рэлея — Джинса. Эти результаты впервые были получены Найквистом [110] для случая волн в двухпроводной передающей линии. Формулу (10.12) можно переписать, используя величины, входящие в формулу Планка:

$$P_{\omega}(m, n) = \left(\frac{2\pi c}{\omega}\right)^2 B_0(\omega, T) = B_0(\omega, T) \lambda^2, \quad (10.14)$$

где  $B_0$  определяется выражением (2.10).

Для мощности во всех волноводных модах (на  $d\omega$ ) имеем

$$P_{\omega} = \left(\frac{2\pi c}{\omega}\right)^2 B_0(\omega, T) (N_E + N_H), \quad (10.15)$$

где  $N_E$  — число собственных мод  $E$ -волны, а  $N_H$  — число собственных мод  $H$ -волны. Теперь мы хотим показать, что на высоких частотах (или для волноводов с большим поперечным сечением) формула (10.15) сводится к ожидаемому закону излучения в свободном пространстве. Это удобно сделать для частного случая прямоугольного волновода.

Число мод  $N_H$  равно числу целочисленных решений уравнения (10.7). То же самое справедливо для числа мод  $N_E$ . При высоких частотах моды сливаются в почти непрерывное распределение и полное их число приближается по величине к четверти площади эллипса, описываемого уравнением (10.7). Таким образом, имеем

$$N_H = N_E = \frac{1}{4} \left(\frac{ap^*}{\pi}\right) \left(\frac{bp^*}{\pi}\right) \pi = \frac{\omega^2}{4\pi c^2} S, \quad (10.16)$$

где  $S = ab$  — площадь поперечного сечения волновода. Формула (10.16) применима к волноводам произвольного поперечного сечения; она является также хорошим приближением даже для умеренно низких частот, соответствующих такому небольшому числу  $N$ , как  $\sim 40$ .

Подставляя (10.16) в (10.15) для полного потока излучения, получаем

$$\frac{P_{\omega}}{S} = 2\pi B_0(\omega, T); \quad (10.17)$$

это и есть закон излучения в свободном пространстве, найденный ранее путем подстановки величины  $2B_0(\omega, T)$  в выражение для  $\pi I_{\omega}$ , приведенное после формулы (1.101) (коэффициент 2 показывает, что учитываются две поляризации).

До сих пор мы рассматривали поток черного излучения. Если излучение нетеплового происхождения, то обычно по аналогии с (10.13) температуру  $T_A$  определяют как

$$P_{\omega}(m, n) = \frac{\kappa T_A}{2\pi}; \quad (10.18)$$

здесь  $T_A$  — «антенная температура». Она понадобится в задаче, обсуждаемой в § 2 настоящей главы, а именно, при нахождении соотношения между интенсивностью излучения от произвольного источника в свободном пространстве и мощностью  $P_{\omega}(m, n)$  на детекторе, если между ними помещены антенна и связанный с ней волновод.

## § 2. Прием излучения антеннами

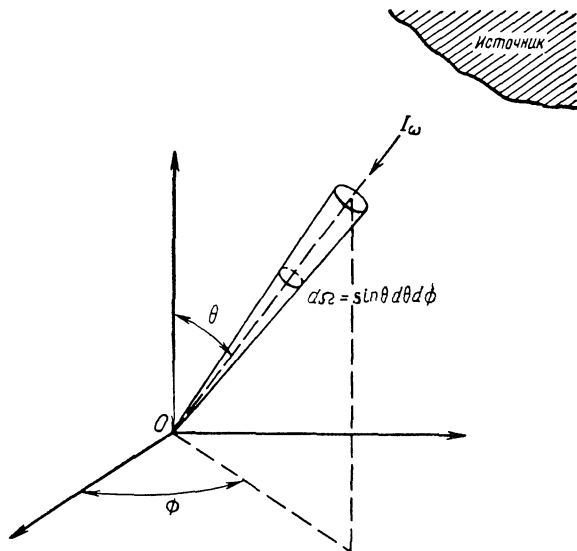
Рассмотрим антенну, установленную в начале  $O$  системы координат, показанной на фиг. 124. Излучение, которое она принимает, направляется к детектору через волноводы или коаксиальные линии. Предположим, что антенна и детектор согласованы на данной волноводной моде  $m, n$  и в передающей линии нет диссипации энергии.

Пусть  $dF_{\omega}$  — поток, попадающий в бесконечно малый телесный угол  $d\Omega$ , определяемый полярными координатами  $\theta$  и  $\phi$ , а  $I_{\omega}$  — интенсивность (на одну поляризацию), связанная с потоком  $dF_{\omega}$ . Тогда мощность падающего на антенну излучения на единичный интервал круговых частот, согласно формуле (1.101), равна

$$I_{\omega}(\theta, \phi) A \cos \theta d\Omega,$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения антенны. Однако из-за дифракции диаграмма направленности антенны является более сложной, чем предполагается на основании простой зависимости  $A \cos \theta$ . Это принимают во внимание при определении эффективной площади  $A(\theta, \phi)$ , причем  $\cos \theta$  включают в определяемую величину. Тогда для мощности на детекторе от всей поверхности излучателя имеем

$$P_{\omega} = \int_{4\pi} I_{\omega}(\theta, \phi) A(\theta, \phi) d\Omega. \quad (10.19)$$



Ф и г. 124. Приемная антенна установлена в начале координат.

Это — основное уравнение, связывающее испускание источника с «показанием» детектора.

Теперь принято выражать мощность  $P_\omega$  через антенную температуру  $T_A$ , согласно формуле (10.18), а интенсивность  $I_\omega(\theta, \phi)$  — через «яркостную температуру»  $T_B$ , определяемую как

$$I_\omega(\theta, \phi) \equiv \frac{\omega^2}{8\pi^3 c^2} \kappa T_B(\theta, \phi) = \frac{1}{2\pi\lambda^2} \kappa T_B(\theta, \phi). \quad (10.20)$$

Подставляя в (10.19) вместо  $P_\omega$  и  $I_\omega(\theta, \phi)$  выражения (10.18) и (10.20) соответственно, получаем

$$T_A = \frac{1}{\lambda^2} \int_{4\pi} T_B(\theta, \phi) A(\theta, \phi) d\Omega. \quad (10.21)$$

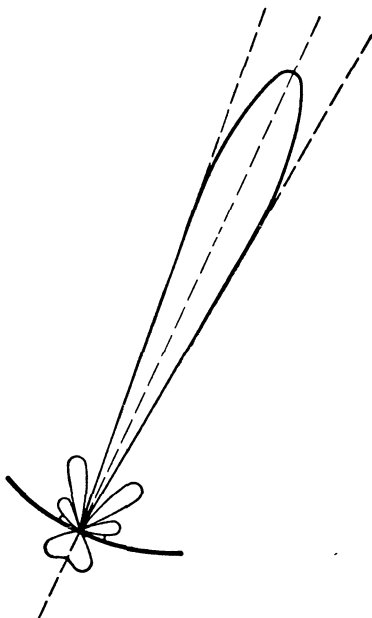
Это — одна из основных формул радиоастрономии.

Мы покажем, что

$$\int_{4\pi} A_\omega(\theta, \phi) d\Omega = \lambda^2, \quad (10.22)$$

а значит,

$$T_A = \frac{\int T_B(\theta, \phi) A(\theta, \phi) d\Omega}{\int A(\theta, \phi) d\Omega}. \quad (10.23)$$



Фиг. 125. Диаграмма направленности параболической антенны в полярных координатах.

В результате непосредственных наблюдений находим антенную температуру, которая, согласно (10.23), является средней яркостной температурой  $T_B$ , взвешенной в соответствии с диаграммой направленности антенны. Возьмем, например, параболическую антенну, диаграмма направленности которой схематически показана на фиг. 125 в виде зависимости  $A(\theta)$  от  $\theta$ . У этой диаграммы есть резко выраженный главный лепесток, который лежит вдоль оси антенны, и гораздо более слабые боковые лепестки (аналогичный вид имеет и зависимость  $A$  от  $\phi$ , но угловые ширины лепестков несколько другие). Если угловые размеры источника много меньше ширины главного лепестка, то отдельные детали в распределении яркости источника не будут разрешены.

В пределе «точечного» источника, угловой размер которого  $\Delta\Omega_s$  мал по сравнению с эффективной шириной  $\Delta\Omega_A$ , мы имеем

$$T_A = T_B \frac{\Delta\Omega_s}{\Delta\Omega_A} = \frac{A}{\lambda^2} T_B \Delta\Omega_s, \quad (10.24)$$

где  $A$  — физическая площадь антенны (предполагается, что она велика по сравнению с длиной волны  $\lambda$ ). Если температура  $T_B$  не зависит от частоты (как в случае черного излучателя), принимаемая мощность и, следовательно, температура  $T_A$  пропорциональны

$1/\lambda^2$ , т. е. больше на коротких длинах волн. В противоположном случае протяженного источника, яркость которого не меняется в пределах основного лепестка антенны, из (10.23) получаем

$$T_A = T_B. \quad (10.25)$$

Отсюда для мощности (она измеряется в ваттах и относится к интервалу частоты  $d\omega$ ) на выходе произвольной антенны, окруженной излучающей черной поверхностью, имеющей температуру  $T$ , мы получаем

$$P_\omega = \frac{\kappa T}{2\pi}.$$

Когда главный лепесток недостаточно узок, а, следовательно, равенство (10.25) несправедливо, получение истинного распределения яркости  $T_B(\theta', \phi')$  из наблюдаемого распределения  $T_A(\theta', \phi')$  (при вращении антенны на углы  $\theta', \phi'$ ) обычно является не простым делом. Задача нахождения решений (10.23) исследовалась рядом авторов, она аналогична спектроскопической задаче вычисления влияния ширины щели на истинный профиль спектральной линии (см., например, работы [464, 465]).

**Соотношение между эффективной площадью  $A(\theta, \phi)$  и функцией усиления  $G(\theta, \phi)$  антенны.** Функция усиления — это величина, связанная с испускательными свойствами антенны, когда она используется для передачи излучения.

Предположим, что антенна подсоединена к источнику, излучающему на частоте  $\omega$ , причем мощность на единичный телесный угол в направлении  $(\theta, \phi)$  равна  $P_\omega(\theta, \phi)$  вт. Если  $P_\omega$  — полная мощность излучения, то функция усиления выражается формулой

$$G(\theta, \phi) = \frac{P_\omega(\theta, \phi)}{P_\omega/4\pi}, \quad (10.26)$$

и по определению она нормируется следующим образом:

$$\int_{4\pi} G(\theta, \phi) \frac{d\Omega}{4\pi} = 1. \quad (10.27)$$

С физической точки зрения  $G(\theta, \phi)$  — это отношение мощности, испускаемой антенной в данном направлении, к мощности, испускаемой антенной в том же направлении в случае, когда полная мощность излучения та же, но излучение равномерно распределено по всем направлениям.

Соотношение между функцией усиления  $G(\theta, \phi)$  и эффективной площадью антенны  $A(\theta, \phi)$  можно вывести из общих соображений взаимности (см. работы [466—468]). Другими словами, мы можем поступить следующим образом. Предположим, что антенна подсоединена к волноводу, согласованному на конце с черным телом,

которое поддерживается при температуре  $T$ . Пусть антенна направлена на небольшую «черную» плазму, расположенную в некоторой точке  $\theta, \phi$  пространства. Плазма поддерживается при температуре  $T$ , равной температуре черного тела на конце волновода, и «видна» под небольшим телесным углом  $d\Omega$  из места подсоединения антенны к волноводу.

Мощность, излучаемая в волновод черным телом, расположенным на конце волновода, согласно формуле (10.14), равна

$$\left(\frac{2\pi c}{\omega}\right)^2 B_0(\omega, T);$$

часть этой мощности, переданная антенной в направлении «черной» плазмы, составляет

$$\frac{\pi c^2}{\omega^2} B_0(\omega, T) G_\omega(\theta, \phi) d\Omega.$$

С другой стороны, мощность, поглощаемая антенной от излучающей плазмы, в соответствии с уравнением (10.19) равна

$$B_0(\omega, T) A_\omega(\theta, \phi) d\Omega.$$

Когда система находится в термодинамическом равновесии, эти два потока можно приравнять и тогда получим

$$G_\omega(\theta, \phi) = \frac{4\pi A_\omega(\theta, \phi)}{\lambda^2}. \quad (10.28)$$

Отметим, что формула (10.28) справедлива на всех длинах волн и в равной степени применима как к микроволновым антеннам, так и к оптическим телескопам. Она также справедлива и в отсутствие теплового равновесия при условии, что антенна согласована с приемником.

Проинтегрировав обе части формулы (10.28) по всем углам и используя условие нормировки (10.27), непосредственно получаем выражение (10.22).

Подставив в формулу (10.21) вместо эффективной площади антенны  $A(\theta, \phi)$  соответствующее значение, полученное из (10.28), найдем

$$T_A = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} T_B(\theta, \phi) G_\omega(\theta, \phi) d\Omega. \quad (10.29)$$

Для данной антенны функция усиления  $G_\omega(\theta, \phi)$  определяется экспериментально. Ее значение в центре основного лепестка ( $\theta = \phi = 0$ ) называется коэффициентом усиления. В соответствии с дифракционной теорией антенн коэффициент усиления (при идеальных условиях) определяется формулой

$$G(0, 0) = \frac{4\pi A}{\lambda^2}, \quad (10.30)$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения антенны (предполагается, что размеры антенны велики по сравнению с длиной волны  $\lambda$ ). Из сравнения с (10.28) следует

$$A_{\omega}(0, 0) = A.$$

С помощью (10.22) и (10.30) можно определить эффективный телесный угол антенны

$$\Delta\Omega_A = \frac{\int A_{\omega}(\theta, \phi) d\Omega}{A} = \frac{4\pi}{G(0, 0)}; \quad (10.31)$$

этот угол характеризует ширину главного лепестка. Формулу (10.24) для точечного источника можно получить, используя (10.23), (10.30) и (10.31).

Отметим в заключение, что приведенные выше результаты справедливы, если излучающий источник находится в дальней (или френгоферовой) зоне антенны, т. е. расстояние  $R$  между антенной и источником должно удовлетворять условию

$$R \gtrsim \frac{D^2}{\lambda}, \quad (10.32)$$

где  $D$  — характерный линейный размер антенны (для параболоида  $D$  — диаметр).

Подробное обсуждение конструкции антенн и методов использования их для исследования лабораторной плазмы имеется в книге Хилда и Уортона [98] (а также в работах [469, 479]). Антенны для радиоастрономических наблюдений обсуждались многими авторами (см., например, работы [471—477] и обзорную работу Христиансена [478]).

Выше предполагалось, что рассматриваемая антенна расположена в вакууме. Однако возникают ситуации, когда антенна находится в преломляющей среде, как, например, в ионосфере. В этом случае формула (10.28) более неприменима.

Предположим, что в окружающей плазме отсутствуют потери и что плазма изотропна и обладает показателем преломления  $n(\omega)$ , причем

$$n(\omega) \approx \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2}.$$

Используя термодинамические соображения, аналогичные тем, которые применялись при выводе (10.28), находим

$$G_{\omega}(\theta, \phi) = \frac{4\pi n^2 A_{\omega}(\theta, \phi)}{\lambda_0^2},$$

где  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме, равная  $2\pi c/\omega$ . Для магнитоактивной плазмы связь между  $G_{\omega}$  и  $A_{\omega}$  является несколько более сложной. На это имеются две причины: а) две электромагнитные волны

способны распространяться с различными волновыми векторами  $\mathbf{k}$  и различными поляризациями (см. § 2 гл. 1); б) соображения взаимности, использованные при выводе формулы (10.28), должны быть модифицированы в следующем смысле. Для описания излучения, распространяющегося от тела I к телу II, используется диэлектрический тензор среды, находящейся между телами I и II, но при описании излучения, распространяющегося от тела II к телу I, мы должны принимать во внимание, что направление статического магнитного поля меняется на противоположное. Такое изменение знака означает, по существу, что диэлектрический тензор среды заменяется транспонированным ему тензором. Поэтому в магнитоактивной плазме уже не существуют те соображения взаимности, которые использовались выше и которые связывали истинные физические величины.

Используя модифицированные соображения взаимности. Вайль и Валш [422] показали, что при определенных условиях формула (10.28) принимает следующий вид для данной моды распространения  $(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$G_{\omega}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi n_r^2 A_{\omega}^{+}(-\mathbf{k}, \omega)}{\lambda_0^2}.$$

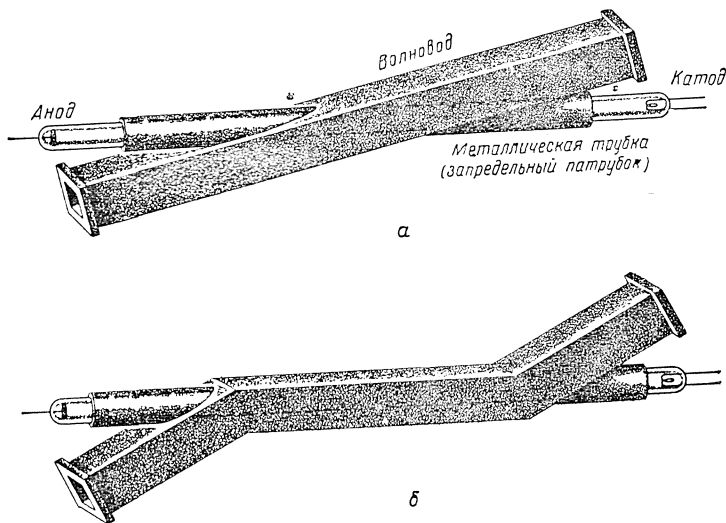
Здесь  $n_r$  — показатель преломления луча, определяемый выражениями (1.120) и (1.121), а  $A_{\omega}^{+}$  — эффективная площадь антенны, измеренная в воображаемой «транспонированной» среде.

### § 3. Излучение плазмы в волноводах и резонаторах

Плазма, исследуемая в лабораторных условиях, обычно имеет довольно малые размеры, так что ее можно частично или полностью поместить в волноводы или в резонаторы. Это сильно облегчает исследование испускательных свойств плазмы, поскольку тогда характеристики антенны не усложняют задачу интерпретации. Типичным примером такого устройства является стандартный генератор микроволнового шума, в котором положительный столб разряда постоянного тока пересекает секцию волновода (см. фиг. 126, а). Разрядная трубка наклонена относительно оси волновода для уменьшения рассогласований СВЧ импеданса; металлические патрубки действуют как запердельные волноводы и предотвращают потери ВЧ энергии из входного и выходного отверстий для разрядной трубки. Другой метод монтажа показан на фиг. 126, б.

**Плазма, находящаяся в тепловом равновесии.** Рассмотрим теперь поток мощности в волноводе, содержащем плазму. Предположим, что электроны имеют максвелловское распределение по скоростям



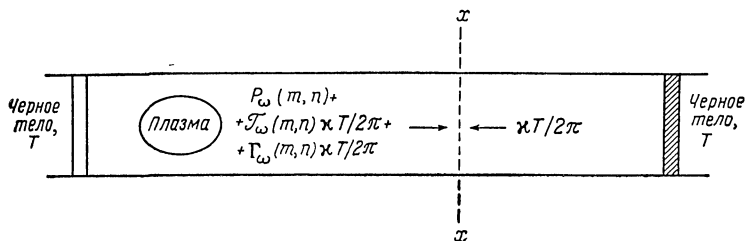


Фиг. 126. Два метода монтажа плазменного столба в волноводе, способствующие уменьшению отражений.

и температуру  $T$ . Однако плазма может быть не согласована с волноводом и может быть оптически тонкой для рассматриваемой длины волны.

Чтобы провести расчет, предположим, что плазма помещена между двумя черными излучателями, которые согласованы с волноводом и поддерживаются при температуре  $T$  (фиг. 127).

Рассмотрим далее поток мощности через плоскость  $x-x$ , расположенную на таком расстоянии от плазмы, на котором любые затухающие моды, генерируемые плазмой, успевают затухнуть. При равновесии поток мощности, текущий слева направо, равен



Фиг. 127. Течение излучения через плоскость  $x-x$ , перпендикулярную волноводу, частично заполненному плазмой.

$J_\omega$  и  $\Gamma_\omega$  — коэффициенты передачи и отражения для плазмы соответственно.  $P_\omega$  — мощность в волноводной моде  $m, n$ , испускаемая плазмой и отнесенная к интервалу частот  $d\omega$ .

потоку мощности, протекающему справа налево. Тогда из фиг. 127 следует

$$P_{\omega}(m, n) = \frac{\kappa T}{2\pi} [1 - \Gamma_{\omega}(m, n) - \mathcal{F}_{\omega}(m, n)] = \frac{\kappa T}{2\pi} A_{\omega}(m, n), \quad (10.33)$$

где  $P_{\omega}$  — мощность излучения от плазмы в моде  $m, n$ , а  $\Gamma_{\omega}$ ,  $\mathcal{F}_{\omega}$  и  $A_{\omega}$  — коэффициенты отражения, прохождения и поглощения соответственно. Уравнение (10.33) — волноводный эквивалент закона Кирхгофа, см. (4.68).

**Плазма, не находящаяся в тепловом равновесии.** Если плазма не находится в тепловом равновесии, то можно определить температуру излучения как

$$P_{\omega}(m, n) = \frac{\kappa T_r^{\omega}}{2\pi} A_{\omega}(m, n), \quad (10.34)$$

где  $T_r^{\omega}$  — температура излучения (верхний индекс  $\omega$  означает испускание в волноводе), при этом предполагается, что температура  $T_r^{\omega}$  одна и та же по всему объему плазмы.

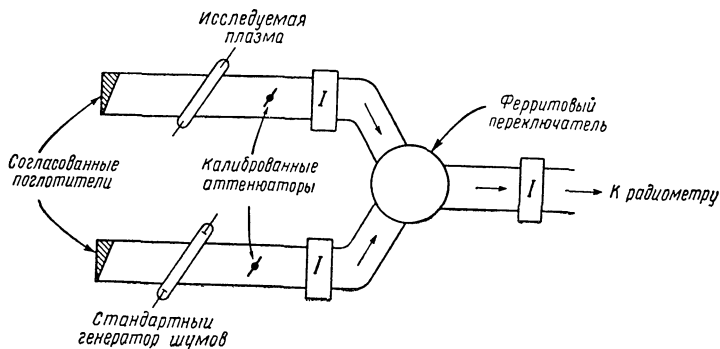
При попытке связать эту температуру излучения с элементарными процессами испускания мы не можем предположить априори, что она равна температуре испускания в свободном пространстве,  $T_r$ , определяемой выражением (2.47) или уравнениями (2.53) и (2.54). Причина заключается в том, что теперь между коэффициентами Эйнштейна  $A$  и  $B$  другая связь и коэффициент спонтанного испускания  $\eta_{\omega}$  также другой. Используя выражение (10.12) и определяя новые коэффициенты  $\eta_{\omega}^w$ ,  $\eta_{\omega S}^w$  и  $\eta_{\omega A}^w$  спонтанного и индуцированного испускания и поглощения, соответствующие одномерному потоку энергии в одной моде  $m, n$  в волноводе, легко найти для разреженной плазмы ( $n \rightarrow 1$ ) связь между коэффициентами Эйнштейна:

$$\begin{aligned} \eta_{\omega}^w(\mathbf{p}') &= \frac{\hbar\omega}{2\pi} \eta_{\omega S}^w(\mathbf{p}'), \\ \eta_{\omega A}^w(\mathbf{p}) d^3p &= \eta_{\omega S}^w(\mathbf{p}') d^3p'. \end{aligned} \quad (10.35)$$

Сравнивая соотношения (10.35) и (2.30), убеждаемся, что коэффициент  $\eta_{\omega}$  связан с  $\eta_{\omega S}$  аналогичным образом, но их отношение имеет другую величину.

Функция источника  $S_{\omega}$  и температура  $T_r^w$  в случае изотропного распределения, описываемого функцией  $f(p)$ , связаны соотношением

$$S_{\omega} = \frac{j_{\omega}^w}{\alpha_{\omega}^w} = \frac{1}{2\pi} \kappa T_r^w, \quad (10.36)$$



Ф и г. 128. Блок-схема измерений нулевым методом мощности шума, испускаемого плазмой.

Когда СВЧ мощность в обоих плечах одинакова, на выходе радиометра, как можно увидеть, из (10,62), регистрируется нуль,  $I$  — ферритовый вентиль.

где  $T_r^w$  все еще определяется выражением (2.47), в котором, однако, коэффициент  $\eta_\omega$  заменен на  $\eta_\omega^w$ . Если коэффициенты  $\eta_\omega$  и  $\eta_\omega^w$  отличаются лишь множителем, не зависящим от скорости электронов, то температура  $T_r^w$  равна температуре  $T_r$ , определяемой выражением (2.47).

**Измерения  $P_\omega(m, n)$ .** Абсолютную величину мощности испускания  $P_\omega$  от плазмы лучше всего определять нулевым методом, в котором исследуемое излучение сравнивается с излучением от калиброванного стандартного генератора шумов. Типичная блок-схема приведена на фиг. 128. Переключатель, управляемый электронной схемой, позволяет сравнить сигналы, поступающие из двух каналов при некоторой удобной частоте повторения в диапазоне от  $\sim 20$  до  $\sim 1000$  гц (см. § 4 настоящей главы). Аттенюаторы регулируются так, чтобы на выходе радиометра был нулевой отсчет.

Мощность  $P_\omega$  можно получить тогда просто, зная излучение стандартного генератора и отсчеты аттенюаторов. В результат должны быть внесены поправки на тепловое излучение аттенюаторов, ферритовых вентилях и переключателя. Поправки малы, если мощность  $P_\omega$ , определяемая выражением (10.34), велика по сравнению с  $\kappa T_0/2\pi$ , где  $T_0$  — комнатная температура. Они не обязательно малы для оптически тонкой плазмы ( $A_\omega \ll 1$ ) и для позднего послесвечения распадающейся плазмы, когда  $T_r^w$  приближается к  $T_0$ . В таких случаях не следует помещать излучающие элементы в «плечо» с плазмой.

Чтобы получить  $T_r^w$  из выражения (10.34), требуется помимо измерений  $P_\omega(m, n)$  провести измерения  $A_\omega(m, n)$ . Последнюю

величину можно определить при просвечивании плазмы СВЧ сигналом на частоте  $\omega$  и измерении отношений отраженной и проходящей мощности к падающей. Сигнал должен быть достаточно слабым, чтобы не возмущать среду. Ошибки измерений при определении отдельных величин  $P$ ,  $\mathcal{F}$  и  $\Gamma$  могут привести к весьма заметным ошибкам при вычислении  $T_r^\omega$ . Мы опишем теперь метод, при использовании которого для определения  $T_r^\omega$  не требуется знать величину  $A_\omega$ .

**Определение  $T_r$  методом микроволнового моста.** В этом методе мощность излучения  $P_{\omega S}$  от известного микроволнового источника сравнивается с мощностью излучения от исследуемой плазмы и той части  $P_{\omega S}$ , которая не поглощается при прохождении через плазму, а именно:

$$\frac{\kappa T_r}{2\pi} A_\omega(m, n) + [1 - A_\omega(m, n)] P_{\omega S};$$

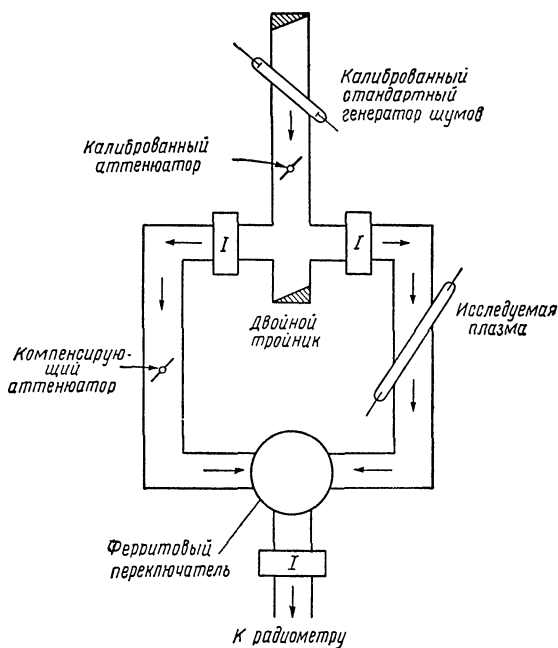
здесь для удобства индекс  $\omega$  опущен. Мощность  $P_{\omega S}$  изменяется до тех пор, пока оба сигнала не станут равными и тогда независимо от деталей процессов поглощения в плазме

$$P_{\omega S} = \frac{\kappa T_r}{2\pi}. \quad (10.37)$$

Этот метод эквивалентен классическому методу обращения линий в оптической пирометрии. При получении (10.37) не рассматривались отражения от плазмы; их можно учесть, измеряя отдельно коэффициент  $\Gamma$ . Однако этот метод дает наиболее удовлетворительные результаты в тех случаях, когда отражениями можно пренебречь. Типичная блок-схема экспериментального устройства приведена на фиг. 129 (см. также работы [65, 479]).

В качестве источника переменной СВЧ мощности  $P_{\omega S}$  используются стандартный генератор шумов и калиброванный аттенюатор. С помощью двойного тройника мощность, грубо говоря, расщепляется на две равные части; половина мощности просвечивает исследуемую плазму, другая половина используется как опорный сигнал. Ферритовый переключатель попеременно передает оба сигнала на радиометр. Когда исследуемая плазма отсутствует, компенсирующий аттенюатор уравнивает потоки мощности в обоих плечах моста. Затем при наличии плазмы калиброванный аттенюатор регулируется до тех пор, пока потоки мощности в обоих плечах, достигающие радиометра, не станут равными, т. е. на его выходе будет получен нулевой отсчет. Ферритовые вентили устраняют стоячие волны и потоки мощности в нежелательных направлениях.

В тех случаях, когда отражениями от плазмы нельзя пренебречь, можно использовать другой метод [480], который позволяет



Фиг. 129. Блок-схема измерений температуры излучения  $T_r$  частично прозрачной плазмы (из работы Бекефи и Брауна [65]).  
I — ферритовый вентиль.

учесть отражения; для этого за плазмой помещают сильно отражающий закорачивающий поршень (фиг. 130). При одном положении переключателя излучение проходит из плеча 1 в плечо 2, из плеча 2 в плечо 3 и т. д., а при другом положении — из плеча 3 в плечо 2 и т. д. При первом положении переключателя мощность, достигающая радиометра, равна

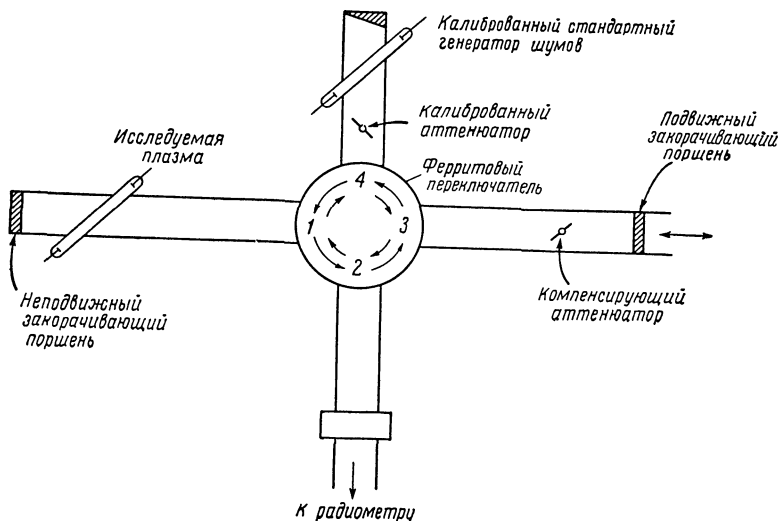
$$\frac{\chi T_r}{2\pi} A_{\omega}(m, n) + \Gamma'_{\omega}(m, n) P_{\omega S},$$

где  $\Gamma'$  — коэффициент отражения от плазмы и от закорачивающего поршня, который расположен за плазмой. При втором положении переключателя принимаемая мощность равна  $P_{\omega S}$ . При балансе имеем

$$\frac{\chi T_r}{2\pi} A_{\omega}(m, n) = P_{\omega S} [1 - \Gamma'_{\omega}(m, n)]. \quad (10.38)$$

Однако  $A_{\omega} = 1 - \Gamma'_{\omega}$ , так что по-прежнему

$$\frac{\chi T_r}{2\pi} = P_{\omega S}. \quad (10.39)$$



Фиг. 130. Блок-схема измерений температуры излучения  $T_r$  частично прозрачной плазмы при наличии существенных отражений от поверхности плазмы (из работы Ингрема [480]).

**Излучение в резонаторе.** Важной характеристикой замкнутого пустого резонатора является его собственная (ненагруженная) добротность  $Q_U$ :

$$Q_U = \frac{\omega_0 \times \text{Запасенная в резонаторе энергия}}{\text{Средняя мощность потерь в стенках}} = \frac{\omega_0 W}{P} \approx \frac{\omega_0}{\Delta\omega_0}, \quad (10.40)$$

где  $\omega_0$  — резонансная частота, а  $\Delta\omega_0$  — ширина резонансной кривой на полувысоте. Поскольку стенки резонатора имеют конечное сопротивление, они «поставляют» энергию в резонатор, что приводит к появлению некоторой запасенной энергии  $W$ . Потери в резонаторе можно рассматривать как обусловленные эквивалентным сопротивлением, на которое нагружен идеально проводящий резонатор. Находим, что энергия, запасенная на интервал частот  $d\omega$  (центр этого интервала лежит в точке  $\omega_0$ ), равна [481, 482]

$$W = \left( \frac{4}{\omega_0} \frac{Q_U^2}{Q_U} \right) P_\omega = \left( \frac{4}{\omega_0} \frac{Q_U^2}{Q_U} \right) \frac{1}{2\pi} \kappa T, \quad \frac{\kappa T}{\hbar\omega} \gg 1; \quad (10.41)$$

здесь вместо мощности  $P_\omega$  подставлено ее значение, согласно формуле (10.12).

Чтобы измерить излучение, резонатор соединяют с детектором передающей линией. Связь между резонатором и этой линией можно охарактеризовать с помощью безразмерного коэффициента

связи  $\beta$  — отношения энергии, запасенной в резонаторе, к энергии, передаваемой в линию. Добротность системы, нагруженной на линию, называется нагруженной добротностью  $Q_L$ , последняя связана с новой резонансной частотой и шириной резонансной кривой на полувывоте соотношением

$$Q_L = \frac{\omega}{\Delta\omega}; \quad (10.42)$$

резонансная частота  $\omega$  может быть сдвинута относительно  $\omega_0$ . Другими словами,

$$Q_L = \frac{\omega \times \text{Запасенная в резонаторе энергия}}{\text{Мощность, рассеиваемая в резонаторе и нагрузке}}. \quad (10.43)$$

Величины  $Q_L$ ,  $Q_U$  и  $\beta$  связаны между собой следующим соотношением:

$$Q_L = \frac{Q_U}{1 + \beta}. \quad (10.44)$$

Если  $\beta < 1$ , говорят, что связь недостаточная; если  $\beta > 1$ , связь чрезмерная; если  $\beta = 1$ , связь критическая;  $Q_L = Q_U/2$ .

Соотношение (10.44) можно переписать в виде

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{\beta}{Q_U} + \frac{1}{Q_U} = \frac{1}{Q_e} + \frac{1}{Q_U}, \quad (10.45)$$

где величина

$$Q_e = \frac{Q_U}{\beta}$$

определяет еще одну добротность, называемую внешней добротностью, т. е.

$$Q_e = \frac{\omega \times \text{Запасенная в резонаторе энергия}}{\text{Мощность, рассеиваемая в нагрузке}}. \quad (10.46)$$

Энергия, запасенная в резонаторе, связанном с передающей линией, изменяется от значения, даваемого формулой (10.41), до значения, определяемого выражением

$$W = \left( \frac{4 Q_L^2}{\omega Q_U} \right) \frac{1}{2\pi} \kappa T, \quad (10.47)$$

а мощность шума, протекающая по передающей линии и отнесенная к интервалу частот  $d\omega$ , равна

$$P_{\omega T} = \frac{\omega}{Q_e} W = 4 \frac{Q_L^2}{Q_U Q_e} \frac{1}{2\pi} \kappa T = 4 \frac{\beta}{(1 + \beta)^2} \frac{1}{2\pi} \kappa T. \quad (10.48)$$

Таким образом, когда связь критическая, отбирается вся энергия и в соответствии с формулой (10.13)

$$P_{\omega T} = \frac{\kappa T}{2\pi}.$$

Теперь поместим в резонатор плазму. Она сдвигает резонансную частоту и изменяет нагруженную добротность до некоторого нового значения:

$$\frac{1}{Q'_L} = \frac{1}{Q_e} + \frac{1}{Q_U} + \frac{1}{Q_p}, \quad (10.49)$$

где  $Q_p$  — добротность, связанная с плазмой:

$$Q_p = \frac{\omega W}{P_p}; \quad (10.50)$$

здесь  $P_p$  — мощность, генерируемая плазмой, находящейся в резонаторе. Вклад плазмы в запасенную энергию [ср. (10.47)] составляет

$$W = \left( \frac{4}{\omega} \frac{Q_L'^2}{Q_p} \right) \frac{1}{2\pi} \kappa T_r, \quad (10.51)$$

где  $T_r$  — эффективная температура излучения.

Мощность шума, протекающая по передающей линии, определяется первым уравнением (10.48), где  $W$  — запасенная энергия, равная сумме вкладов от стенок резонатора и плазмы:

$$P'_{\omega T} = \frac{4Q_L'^2}{Q_e} \left( \frac{1}{2\pi} \frac{\kappa T}{Q_U} + \frac{1}{2\pi} \frac{\kappa T_r}{Q_p} \right). \quad (10.52)$$

Эти результаты применимы, когда возмущения, вызванные плазмой, не слишком велики. При наличии слабой нагрузки имеем

$$\frac{1}{Q_p} - 2j \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{\varepsilon_0 \omega} \frac{\int \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}^* dV}{\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV}, \quad (10.53)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  — тензор комплексной проводимости плазмы, а  $\mathbf{E}$  — невозмущенное электрическое поле рассматриваемой моды в пустом резонаторе. Интегрирование проводится по всему объему резонатора. Действительная часть правой стороны уравнения (10.53) определяет величину  $1/Q_p$ , мнимая часть — сдвиг частоты.

Для определения  $T_r$  требуется измерить мощность шума  $P'_{\omega T}$  и добротности  $Q_p$ ,  $Q_e$  и т. д. Последние величины получаются путем измерения коэффициента стоячей волны (по напряжению), КСВН, в передающей линии при наличии и при отсутствии плазмы. Теория и метод измерений описаны в работах [481, 483, 484]. Измерения должны проводиться с большими предосторожностями, иначе получатся существенные ошибки при определении  $T_r$ . Такие измерения описаны в работах [54, 485].

Рассмотрим экспериментальную установку, блок-схема которой аналогична изображенной на фиг. 128. Мощность излучения от стандартного генератора шумов (с эквивалентной температурой



$T_S$ ), который расположен в одном плече моста, сравнивается с мощностью шумов, излучаемой микроволновым резонатором, который расположен в другом плече моста. Две мощности шумов можно уравнивать, регулируя аттенюаторы, расположенные перед резонатором (коэффициент ослабления  $\alpha_C$ ) и перед стандартным генератором (коэффициент ослабления  $\alpha_S$ ). Лабуда и Гордон [485] показали, что при балансе температура излучения плазмы в резонаторе,  $T_r$ , связана с температурой  $T_S$  и комнатной температурой  $T_0$  следующим образом:

$$T_r = T_0 \left[ \frac{\alpha_S/\alpha_C}{(1-\Gamma)(1-\sigma'/\sigma'')} \frac{T_S - T_0}{T_0} + 1 \right],$$

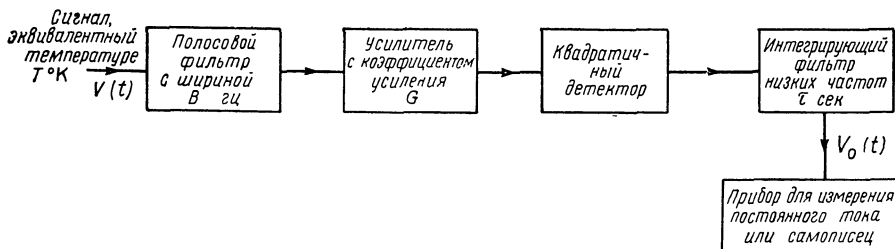
где  $\Gamma$  — коэффициент отражения (по мощности) от резонатора с плазмой при резонансе. Параметр  $\sigma$  — КСВН резонатора при резонансе или его обратная величина (в зависимости от того, является ли связь резонатора чрезмерной или недостаточной);  $\sigma'$  — значение  $\sigma$  при наличии плазмы,  $\sigma''$  — значение  $\sigma$  без плазмы.

#### § 4. Радиометры

Радиометр представляет собой приемник, используемый для детектирования шумоподобных сигналов, размазанных по относительно большой полосе частот. В этом смысле он отличается от более обычного радиовещательного (радарного) приемника, который детектирует когерентные сигналы известной формы.

Ожидаемый спектр частот и амплитуда сигнала определяют конструкцию и параметры пригодного для такого случая радиометра. Если сигнал почти не зависит от частоты, то ширину полосы приемника можно сделать очень большой, чтобы увеличить, насколько это возможно, мощность, поступающую на детектор. Однако при исследовании линейчатого спектра, ширина полосы должна быть достаточно узкой, чтобы не были размыты отдельные детали формы линии. Следовательно, требования весьма противоречивые: с одной стороны, для увеличения мощности необходимо, чтобы полоса была широкой, а, с другой стороны, для получения подробной информации о спектре необходимо, чтобы полоса была узкой — все это налагает весьма строгие ограничения на параметры радиометра.

Допустим, что нам необходимо измерить изменение мощности сигнала, эквивалентное  $1^\circ \text{K}$ , причем ширина полосы равна  $1 \text{ Мгц}$ . Следовательно, детектор должен иметь возможность измерять изменение сигнала, равное  $\kappa T \Delta f \approx 1,4 \times 10^{-17} \text{ вт}$ . Чтобы довести сигнал до уровня, необходимого для детектирования, требуется усиление более чем в 100 дб. Уровень шумов усилителя (или усилителей), необходимого для этой цели, превышает уровень сигнала на несколько порядков величины.



Фиг. 131. Основные элементы радиометра полной мощности (из работы Грэхэма [486]).

Существуют четыре основные операции, которым подвергается сигнал: а) усиление с помощью усилителя с коэффициентом усиления  $G$  и шириной полосы  $B$ , б) детектирование, в) сглаживание сигнала за время  $\tau$  и г) регистрация. На фиг. 131 показана принципиальная блок-схема радиометра, позволяющая более ясно представить себе суть этих операций. Этот радиометр иногда называют «радиометром полной мощности»; он имеет ряд практических недостатков (обсуждаемых ниже) и в настоящее время используется редко. Тем не менее он представляет интерес, так как расчеты показывают, что из всех возможных радиометров он может протектировать минимальный уровень сигнала.

Теоретические возможности этого и других радиометров анализировались рядом авторов. Наиболее полный обзор провел Грэхэм [486], ниже цитируются некоторые его результаты (см. также работы [487—489]).

Пусть  $V(t)$  — напряжение сигнала, эквивалентного температуре  $T$ . Расчеты показывают, что усредненное по времени значение напряжения  $V_0$  на выходе интегрирующего фильтра (пропорциональное корню квадратному из выходной мощности постоянного тока  $P_{dc}$ ) можно записать в виде

$$\langle V_0 \rangle \sim \sqrt{P_{dc}} = aG\kappa T_{эфф}B. \quad (10.54)$$

Здесь  $a$  — постоянная соответствующего квадратичного детектора,  $G$  — коэффициент усиления усилителя (или усилителей), расположенного перед детектором,  $B$  — ширина полосового фильтра [предполагается, что последний имеет плоскую частотную характеристику в диапазоне от  $f_0 - (B/2)$  до  $f_0 + (B/2)$  и нулевую вне его]. Эффективная температура  $T_{эфф}$  определяется выражением

$$T_{эфф} = T + T_R, \quad (10.55)$$

где  $T_R$  — эквивалентная температура шумов приемника.

Флуктуации усредненного значения напряжения (10.54) обусловлены шумом усилителя и флуктуациями самого сигнала. Если

бы время сглаживания было бесконечно велико, то эти флуктуации были бы равны нулю. Считая, что фильтр интегрирует напряжение с выхода детектора в течение  $\tau$  сек, для среднеквадратичных изменений на выходе фильтра находим

$$\sqrt{P_{\text{шум}}} = aG\kappa T_{\text{эфф}} \sqrt{\frac{B}{\tau}}. \quad (10.56)$$

Теперь выясним, что произойдет на выходе интегрирующего фильтра в результате малого изменения  $\Delta T$  сигнала. Из (10.54) следует

$$\sqrt{P_{dc}(T + \Delta T)} = \sqrt{P_{dc}(T)} + \frac{\partial \sqrt{P_{dc}}}{\partial T} \Delta T, \quad (10.57)$$

или

$$\Delta \sqrt{P_{dc}} = \left[ \frac{\partial \sqrt{P_{dc}}}{\partial T} \right] \Delta T.$$

Величина в квадратных скобках называется чувствительностью прибора. Используя выражения (10.54), (10.56) и (10.57), получаем

$$\Delta T_{rms} = \frac{\sqrt{P_{\text{шум}}}}{\partial \sqrt{P_{dc}} / \partial T}, \quad (10.58)$$

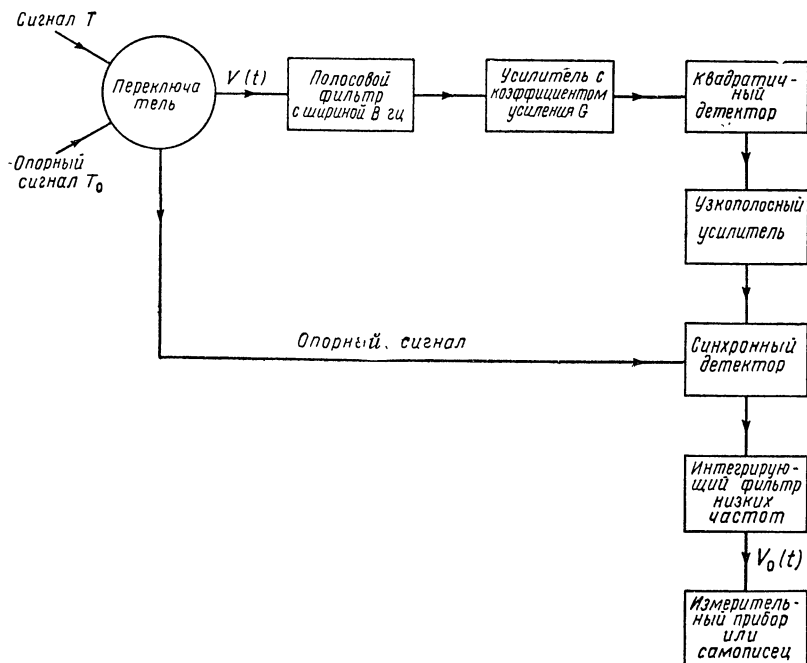
$$= \frac{T_{\text{эфф}}}{\sqrt{B\tau}} = \frac{T + T_R}{\sqrt{B\tau}}. \quad (10.59)$$

Это и есть искомый результат, т. е. то минимальное изменение сигнала, которое можно протектировать. Отметим, что как температура приемника, так и температура сигнала<sup>1)</sup> входят на равном основании в определение минимального изменения сигнала, которое можно протектировать. При детектировании сигналов от астрономических объектов температура  $T$  в основном много меньше  $T_R$ . Если взять  $T_R = 1000^\circ \text{K}$ ,  $B = 1 \text{ Мгц}$  и  $\tau = 1 \text{ сек}$ , то  $\Delta T_{rms} = 1^\circ \text{K}$ . Однако при исследовании лабораторной плазмы  $T$  часто превышает  $T_R$ .

В формуле (10.59) не учитываются флуктуации коэффициента усиления  $G$ . Однако из (10.54) видно, что изменение коэффициента усиления также приводит к изменению уровня выходного протектированного сигнала. Если

$$G = G_0 [1 + \varepsilon(t)], \quad |\varepsilon(t)| \ll 1, \quad (10.60)$$

<sup>1)</sup> Заметим, что  $T$  — эквивалентная мощность шумов, достигающая детектора, выраженная в единицах температуры и равная истинной температуре излучателя только в том случае, если источник излучает как черное тело. Формула (10.59) показывает, что нет смысла пытаться создавать дорогостоящий приемник с низким уровнем шума, если  $T$  оказывается гораздо выше  $T_R$ .



Фиг. 132. Основные элементы радиометра сравнения Дика (из работы Грэхэма [486]).

то анализ показывает, что теперь вместо (10.59) получаем

$$\Delta T_{rms} = T_{эф} \left[ \frac{1}{B\tau} + \langle \varepsilon(t)^2 \rangle \right]^{1/2}, \quad (10.61)$$

где  $\langle \varepsilon^2 \rangle$  — относительная среднеквадратичная флуктуация коэффициента усиления. Взяв  $B = 1 \text{ Мгц}$  и  $\tau = 1 \text{ сек}$ , мы видим, что среднеквадратичная флуктуация коэффициента усиления должна быть меньше  $10^{-3}$ , в противном случае работа прибора ухудшается. Такой стабильности коэффициента усиления достигнуть невозможно. Понимание этого факта привело Дика [490] к созданию радиометра, который носит его имя.

**Радиометр Дика.** В радиометре «полной мощности» нельзя исключить влияние флуктуаций коэффициента усиления, поскольку как постоянный выходной сигнал, так и спектр флуктуаций коэффициента усиления имеют одну и ту же частоту  $\omega = 0$ . Предположим, однако, что входной сигнал  $T$  периодически изменяется. Тогда сигнал на выходе интегрирующего фильтра тоже будет периодически изменяться. Если частота переключения высока по

сравнению с наивысшей частотой флуктуаций коэффициента усиления, то можно ожидать уменьшения шума, обусловленного флуктуациями коэффициента усиления. Эта идея и лежит в основе радиометра Дика.

На фиг. 132 показана блок-схема радиометра. Происходит периодическое переключение с исследуемого сигнала  $T$  на опорный сигнал  $T_0$ . После детектирования сигнал проходит узкополосный усилитель, настроенный на основную частоту переключения, и попадает на синхронный детектор, который сравнивает сигналы  $T$  и  $T_0$  в противофазе.

Выходной сигнал на постоянном токе [ср. (10.54)] можно записать в виде

$$\sqrt{P_{ac}} = \frac{1}{\pi} aGRB\kappa(T - T_0), \quad (10.62)$$

где  $R$  — постоянная, связанная с синхронным детектором. Для среднеквадратичного шума находим

$$\sqrt{P_{шум}} = \frac{a}{\sqrt{2}} GR\kappa T_{эфф} \sqrt{\frac{B}{\tau}}; \quad (10.63)$$

здесь эффективная температура [ср. (10.55)] определяется выражением

$$T_{эфф}^2 = \frac{1}{2} [(T + T_R)^2 + (T_0 + T_R)^2].$$

Используя выражения (10.58), (10.62) и (10.63), для среднеквадратичных флуктуаций на выходе получаем

$$\Delta T_{rms} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{T_{эфф}}{\sqrt{B\tau}}. \quad (10.64)$$

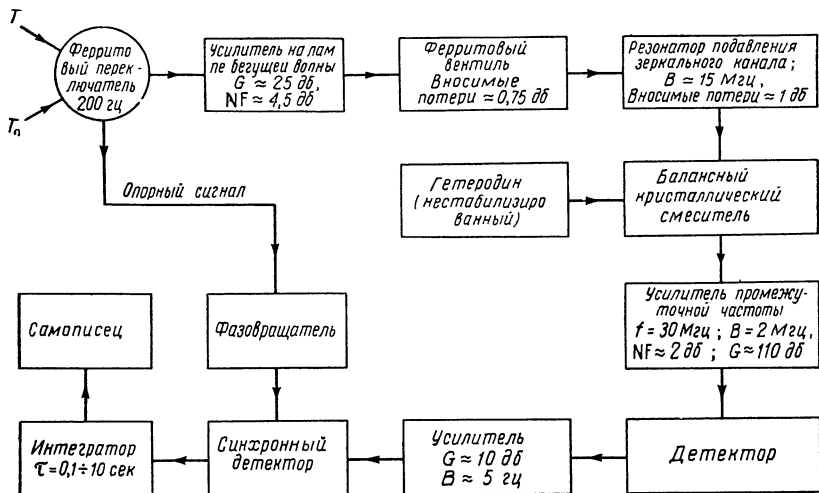
При балансе ( $T \approx T_0$ ) или вблизи него формула (10.64) принимает вид

$$\Delta T_{rms} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{(T + T_R)}{\sqrt{B\tau}}. \quad (10.65)$$

Если эту формулу сравнить с (10.59), то сразу станет видно, что здесь минимальный сигнал, который можно протектировать, в  $\pi/\sqrt{2}$  раз больше, чем в «радиометре полной мощности».

Заслуживает внимания влияние флуктуаций коэффициента усиления на формулу (10.64) и (10.65). В случае использования широкой полосы, усилителя после детектора и прямоугольного опорного сигнала, мы имеем

$$\Delta T_{rms} = T_{эфф} \left[ \frac{4}{B\tau} + \langle \epsilon(t)^2 \rangle \left( \frac{T - T_0}{T_{эфф}} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (10.66)$$



Фиг. 133. Блок-схема стандартного радиометра, работающего на частоте  $\sim 3000$  МГц при ширине полосы  $\sim 2$  МГц и используемого при исследованиях спектров испускания лабораторной плазмы.

Для уменьшения шумов гетеродина применяется балансный смеситель. Два кристалла расположены таким образом, что на каждый кристалл сигнал подается в фазе, а от гетеродина — в противофазе. Тогда выходной сигнал на промежуточной частоте складывается, а шумы гетеродина гасаются.

При балансе эффект флуктуаций коэффициента усиления полностью подавляется, что является достоинством данного радиометра. Если даже баланс не получен, то все равно эффект флуктуаций коэффициента усиления сильно уменьшается.

На фиг. 133 показан типичный радиометр, используемый при исследовании испускания от равновесной лабораторной плазмы на частоте 3000 МГц. Предварительное усиление на высокой частоте усилителем с низким уровнем шума способствует уменьшению большого уровня шума при преобразовании высокой частоты в промежуточную. Ферритовый вентиль предотвращает проникновение сигнала от гетеродина к переключателю, в противном случае появились бы ложные сигналы. Микроволновой резонатор обеспечивает детектирование только одной из двух возникающих боковых частот.

Шумовое число  $NF$  усилителя можно выразить через эквивалентную температуру шума  $T_R$  следующим образом:

$$NF = 1 + \left( \frac{T_R}{290} \right). \quad (10.67)$$

В идеальном усилителе, который не вносит собственных шумов в сигнал, проходящий через него,  $NF = 1$ . Шумовое число обычно

выражается в децибелах, и чтобы использовать наши уравнения, нужно взять антилогарифмы. Для усилителя на лампе бегущей волны (фиг. 133)  $NF \approx 4,5 \text{ дб}$  и  $T_R = 530^\circ \text{ К}$ .

Полное шумовое число для двух каскадов усиления можно представить в виде

$$NF = (NF)_1 + \frac{(NF)_2 - 1}{G_1}, \quad (10.68)$$

где индексы 1 и 2 относятся к первому и второму каскадам. Однако если  $G_1$  достаточно велико, то шумовое число всей системы будет обусловлено почти целиком первым каскадом (в нашем примере  $NF = 4,5 \text{ дб}$ ,  $T_R = 530^\circ \text{ К}$ ).

Если предусилитель высоких частот не используется, источниками шума являются кристаллы и усилитель промежуточных частот. Тогда шумовое число определяется выражением<sup>1)</sup>

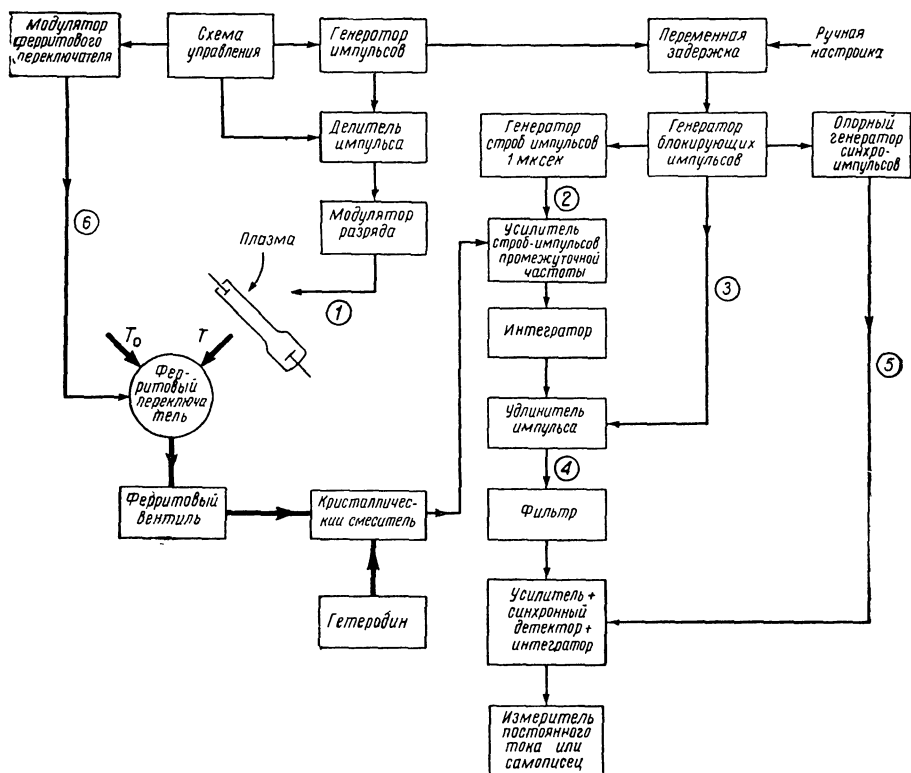
$$NF \approx L [N_r + (NF)_{\text{пром}} - 1], \quad (10.69)$$

где  $L$  — к.п.д. преобразования кристалла,  $(NF)_{\text{пром}}$  — шумовое число усилителя промежуточной частоты и  $N_r = (T_{\text{крист}}/290)$  — нормированная температура шума кристалла. Для радиометра, представленного на фиг. 133, типичные значения (для стандартных узлов) следующие:  $L \approx 6 \text{ дб}$ ,  $N_r \approx 2 \text{ дб}$ ,  $(NF)_{\text{пром}} \approx 2 \text{ дб}$ . При этих значениях  $NF \approx 8,7$  (9,4 дб) и  $T_R \approx 2200^\circ \text{ К}$ .

**Измерения радиометрами с временным разрешением.** Во многих экспериментах, проводимых в лаборатории, параметры плазмы быстро меняются во времени. Часто желательно измерять шумы за интервалы времени порядка 1 мксек. Описанные выше радиометры для этого не пригодны. Однако если плазма многократно создается и распадается и ее характеристики воспроизводятся много раз за 1 сек, то можно осуществить модификацию радиометра Дика без чрезмерно большой потери чувствительности. Она заключается в выделении излучения на заданном временном интервале, а затем интегрировании по многим таким последовательным интервалам. На фиг. 134 показана принципиальная блок-схема радиометра, который использовался при исследовании температуры электронов распадающейся плазмы послесвечения импульсного разряда (см. также работу [493]). На фиг. 135 показаны формы сигналов в соответствующих цепях.

В течение первого полупериода «прощупывается» разряд и переключатель пропускает излучение от плеча 1 в приемник. В течение второго полупериода в приемник проходит излучение от плеча 2. Приемник стробируется импульсом длительностью

<sup>1)</sup> Исчерпывающее обсуждение микроволновых смесителей см. в работе Паунда [491]. Общий обзор шума в электрических цепях дан в работе Робинсона [492].



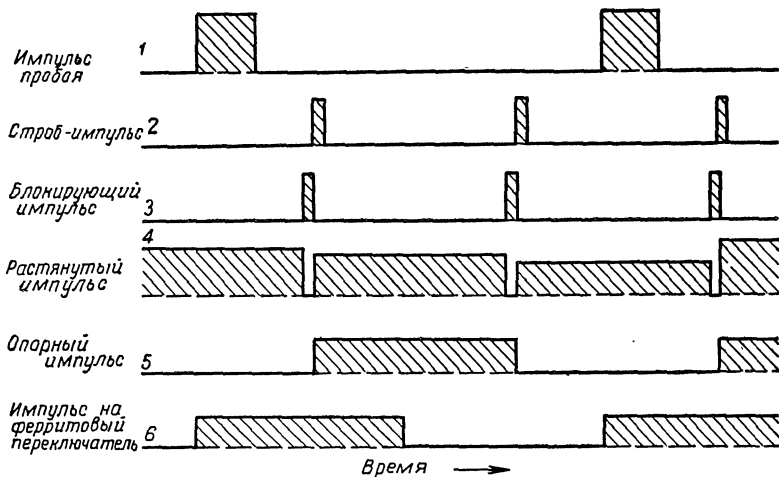
Фиг. 134. Блок-схема радиометра с временным разрешением, равным 1 мксек, используемого при исследовании послесвечения плазмы повторяющегося импульсного разряда (из работы Ингрема и Мак-Картти [493]).

Плечо 1 — плечо плазмы, плечо 2 — плечо опорного сигнала (см. текст). Сплошными линиями указаны волноводы или высокочастотные коаксиальные кабели.

1 мксек, так что в некоторый момент времени, определяемый переменной задержкой, из послесвечения вырезается часть излучения, проходящего от плеча 1; таким же образом, на полпериода позже вырезается часть сигнала, проходящего от плеча 2. В последующих блоках приемника посредством интегрирования, растягивания и фильтрации разностного сигнала создается сигнал определенной формы, который затем умножается на прямоугольный сигнал в должной фазе и частоте.

Недостаток данной схемы заключается в том, что строб-импульс модулирует также шумы усилителя промежуточной частоты. Эта и другие причины вызывают двадцатикратное увеличение среднеквадратичных флуктуаций на выходе  $\Delta T_{\text{среднекв}}$ , определяе-





Фиг 135. Форма сигналов в типичных точках (обозначения 1–6) радиометра приведенного на фиг. 134 (из работы Ингрема и Мак-Картти [493]).

мых формулой (10.65), по сравнению с тем, что мы имеем, когда используется радиометр, применяемый для изучения стационарных процессов. Усилитель высоких частот с низким уровнем шума, расположенный перед смесителем (фиг. 133), существенно улучшает работу радиометра.

Часто возникает необходимость измерять неустановившееся излучение быстро изменяющихся «одноразовых» разрядов, которые могут зажигаться только относительно редко — например разрядов, возбуждаемых большими конденсаторными батареями. В данном случае техника интегрирования невозможна. Излучение просто усиливается и подается на осциллограф. Излучение часто настолько интенсивное, что позволяет применять простое детектирование сигнала промежуточной частоты, т. е. после (балансного) кристаллического смесителя сигнал подается на усилитель промежуточной частоты, детектор и осциллограф. Шумовое число системы определяется формулой (10.69) и минимальная температура, которую можно продетектировать, получается из выражения (10.67). Когда излучение не очень сильное, смесителю должна предшествовать первая ступень усиления с низким уровнем шума. Можно использовать усилитель на лампе бегущей волны, параметрический усилитель или мазер.

Если желательно иметь информацию в некотором диапазоне частот, то можно сделать такую модификацию обсужденных выше приемников, которая допускает качание частоты в определенной части радио- или микроволнового спектра.

## Литература

1. Tonks L., Langmuir I., Phys. Rev., **33**, 195 (1929).
2. Ratcliffe J. A., The Magneto-Ionic Theory and its Applications to the Ionosphere, Cambridge University Press, 1959.
3. Allis W. P., Buchsbaum S. J., Bers A., Waves in Anisotropic Plasmas, M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1963. (Имеется перевод: В. Эллис, З. Буксбаум, А. Берс, Волны в анизотропной плазме, Атомиздат, М., 1966.)
4. Stix T. H., The Theory of Plasma Waves, McGraw-Hill, New York, 1962. (Имеется перевод: Т. Стикс, Теория плазменных волн, Атомиздат, М., 1965.)
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, М., 1959.
6. Bohm D., Gross E. P., Phys. Rev., **75**, 1864, 1851 (1949).
7. Kittel C., Elementary Statistical Physics, John Wiley and Sons, New York, 1958. (Имеется перевод: Ч. Киттель, Элементарная статистическая физика, ИЛ, 1960.)
8. de Groot S. R., Thermodynamics of Irreversible Processes, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1961. (Имеется перевод: С. де Гроот, Термодинамика необратимых процессов, Гостехиздат, М., 1956.)
9. Denisse J. F., Delcroix J. L., Plasma waves, Interscience, New York, 1963.
10. Гинзбург В. Л., Распространение электромагнитных волн в плазме «Наука», М., 1967.
11. Герценштейн М. Е., ЖЭТФ, **26**, 680 (1954).
12. von Laue M., Ann. Phys., **18** (4), 523 (1905).
13. Brillouin L., Wave Propagation and Group Velocity, Academic Press, New York, 1960.
14. Hines C. O., Journ. Geophys. Res., **56**, 63, 197, 207, 535 (1951).
15. Рытов С. М., ЖЭТФ, **17**, 930 (1947).
16. Рытов С. М., Теория электрических флуктуаций и тепловое излучение, Изд-во АН СССР, М., 1953.
17. Auer P. L., Hurwitz H., Jr., Miller R. D., Phys. Fluids, **1**, 501 (1958), General Electric Co. (Schenectady, N. Y.) Rep. № 58-RL-2020 (1958).
18. Clemmow P. C., Mullaly R. F., Physics of the Ionosphere, Rep. of Phys. Soc. Conf. Cavendish Lab., Phys. Society, London, (1955), p. 340.
19. Shinn D. H., Whale H. A., Journ. Atmospheric Terrest. Phys., **2**, 85 (1952).
20. Shinn D. H., Phys. Soc. Conf. Ionosph., (1955), p. 402.
21. Mullaly R. F., Journ. Atmospheric Terrest. Phys., **9**, 322 (1956).
22. Wiener N., Acta Math., **55**, 117 (1930).
23. Rice S. O., Journ. Bell Syst. Tech. **23**, 282 (1944); **24**, 46 (1945).
24. Doob J. L., Stochastic Processes, John Wiley and Sons, New York, 1953.
25. Wax N., Selected Papers on Noise Stochastic Processes, Dover Publications, New York, 1954.

26. Davenport W. B., Jr., Root W. L., An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise, McGraw-Hill, New York, 1958.
27. Middleton D., An Introduction to Statistical Communication Theory, McGraw-Hill, New York, 1960.
28. Stokes G., Trans. Cambridge Phil. Soc., 9 (pt. 3), 399 (1852).
29. Lenoir W. B., Quarterly Progress Report, Research Laboratory of Electronics, M. I. T., № 77, 24 (1965).
30. Born M., Wolf E., Principles of Optics, Pergamon Press, 1964. (Имеется перевод: М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, «Наука», М., 1970.)
31. Shurcliff W. A. Polarized Light (Production and Use), Harvard University Press, 1962.
32. Ко Н. С., Proc. IRE, 50, 1950 (1962).
33. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, Физматгиз, М., 1962.
34. Weinberg S., Phys. Rev., 126, 1899 (1962).
35. Planck M., The Theory of Heat Radiation, Dover Publications, New York, 1959.
36. Drude P., The Theory of Optics, Dover Publications, New York, 1959.
37. Mercier R. P., Proc. Phys. Soc., 83, 811 (1964).
38. Smerd S. F., Westfold K. C., Phil. Mag., 40, 831 (1949).
39. Chandrasekhar S., Radiative Transfer, Dover Publications, New York, 1960.
40. Kirchhoff H., Gesammelte Abhandlungen, J. A. Barth, Leipzig, 1882, p. 594.
41. Rayleigh, Lord (Strutt J. W.), Nature, 72, 54 (1905).
42. Jeans J. H., Phil. Mag., 17, 229 (1909).
43. Einstein A., Phys. Zs., 18, 121 (1917).
44. Heitler W., Quantum Theory of Radiation, 3rd edition, University Press, Oxford, 1954. (Имеется перевод: В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, М., 1956.)
45. Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, 4th Edition, Oxford University Press, New York, 1958. (Имеется перевод: П. Дирак, Принципы квантовой механики, Физматгиз, М., 1960.)
46. Бункин Ф. В., ЖЭТФ, 32, 338, 811 (1957).
47. Пахомов В. И., Алексин В. Ф., Степанов К. Н., ЖТФ, XXXI, 1170 (1961).
48. Трубников Б. А., ДАН СССР, 3, 136 (1958).
49. Goldstein L., Cohen N. L., Phys. Rev., 73, 83 (1948).
50. Mumford W. W., Journ. Bell Syst. Tech., 28, 608 (1949).
51. Кпол K. S., Phil. Res. Rep., 6, 288 (1951).
52. Easley M. A., Mumford W. W., Journ. Appl. Phys., 22, 846 (1951).
53. Johnson H., Deremer K. R., Proc. IRE, 39, 908 (1951).
54. Davies L. W., Cowcher E., Australian Journ. Phys., 8, 108 (1955).
55. Aisenberg S., Engineering Aspects of Magnetohydrodynamics (3rd Symposium), N. W. Mather and G. W. Sutton, Eds., Cordon and Breach, New York, 1962.
56. Huddleston R. H., Leonard S. (Eds), Plasma Diagnostic Techniques, Academic Press, New York, 1965. (Имеется перевод: Р. Хадлстоун, С. Леонард, Диагностика плазмы, изд-во «Мир», М., 1967.)
57. Bekefi G., Hirshfield J. L., Brown S. C., Phys. Fluids, 4, 173 (1961).
58. Fields H., Bekefi G., Brown S. C., Phys. Rev., 129, 506 (1963).
59. Wright B. L., Bekefi G., Microwave Measurements of Time-Dependent Electron Velocity Distribution Function, presented at the San Francisco Meeting of the Division of Plasma Physics of the APS, 1965.
60. von Engel A., Steenbeck M., Electricische Gasentladung, J. Springer, Berlin, 1932. (Имеется перевод: А. Энгель, М. Штейнбек, Электрические разряды в газах, ОНТИ, М.—Л., 1935/36.)

61. Hirshfield J. L., Bekefi G., *Nature*, **198**, 20 (1963).
62. Chang D. B., *Amplified Whistlers as the Source of Jupiter's Sporadic Decameter Radiation*, University of California, San Diego, La Jolla (Internal report, не опубликовано), 1963.
63. Ахизер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В., *ЖЭТФ*, **43**, 1743 (1962).
64. Dreicer H., *Phys. Fluids*, **7**, 735 (1964); *Bull. Amer. Phys. Soc.*, **9**, 512 (1964); *Proc. of the Sixth Int. Conference on Ionization Phenomena in Gases Paris, 1963*, P. Hubert, Ed., S. E. R. M. A., vol. III, Paris, 1964, p. 261.
65. Bekefi G., Brown S. C., *Journ. Appl. Phys.*, **32**, 25 (1961).
66. Brown S. C. *Basic Data of Plasma Physics*, Technology Press, M. I. T. and John Wiley and Sons, New York, 1959. (Имеется перевод: С. Браун, Элементарные процессы в плазме газового разряда, Атомиздат, М., 1961.)
67. Рапофскы В. К. Н., Филлипс М., *Classical Electricity and Magnetism*, Addison—Wesley, Reading Mass., 1955. (Имеется перевод. В. Пановский, М. Филипс, Классическая электродинамика, Физматгиз, М., 1963.)
68. Jackson J. D., *Classical Electrodynamics*, Wiley and Sons, New York, 1962. (Имеется перевод: Дж. Джексон, Классическая электродинамика, изд-во «Мир», М., 1965.)
69. Redhead M. L. G., *Proc. Phys. Soc. (London)*, **A66**, 196, (1953).
70. Joseph J., Rohrllich F., *Rev. Mod. Phys.*, **30**, 354 (1958).
71. Stickforth J., *Zs. Phys.*, **164**, 1 (1961).
72. Birmingham T., *Plasma Physics Laboratory Report*, № 386 Princeton University (1966).
73. Mallozzi P., Margenau H., *Astrophys. Journ.*, **137**, 851 (1963).
74. Mott N. F., Massey H. S. W., *The Theory of Atomic Collisions*, 2nd edition, Clarendon Press, Oxford, 1949. (Имеется перевод: Н. Ф. Мотт, Г. Мессе, Теория атомных столкновений, изд-во «Мир», М., 1969.)
75. Massey H. S. W., Burhop E. H. S., *Electronic and Ionic Impact Phenomena*, Clarendon Press, Oxford, England, 1952. (Имеется перевод: Г. Мессе, Е. Бархоп, Электронные и ионные столкновения, ИЛ, М., 1958.)
76. McDaniel E. W., *Collision Phenomena in Ionized Gases*, Wiley and Sons, New York, 1964.
77. Hasted J. B., *Physics of Atomic Collisions*, Butterworths, London, 1964. (Имеется перевод: Дж. Хастед, Физика атомных столкновений, изд-во «Мир», М., 1965.)
78. Bekefi G., Hirshfield J. L., Brown S. C., *Phys. Rev.*, **116**, 1051 (1959).
79. Low F. E., *Phys. Rev.*, **110**, 974 (1958).
80. Sommerville W. B., *Astrophys. Journ.*, **139**, 192 (1964).
81. Holstein T., *Scientific Paper 65-1E2-Gases-P2*, Westinghouse Research Laboratories, Pittsburgh, Penn., 1965.
82. Ashkin M., *Westinghouse Research Laboratories, Pittsburgh, Scientific Paper 65-1F3 SSPHY-P2*, 1965.
83. Phelps A. V., *Scientific Paper 65-1E2-Gases-P3*, Westinghouse Research Labs., Pittsburgh, Penn., 1965.
84. Margenau H., *Phys. Rev.*, **69**, 508 (1946); **109**, 6 (1958).
85. Dellis A. N., *Rep. A. E. R. E. GP/R 2265*, U. K. Atomic Energy Authority (1957).
86. Kramers H. A., *Phil. Mag.*, **46**, 836 (1923).
87. Oster L., *Rev. Mod. Phys.*, **33**, 525 (1961).
88. Scheuer P. A. G., *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, **120**, 231 (1960).
89. Harding G. N., Kimmitt M. F., Ludlow J. H., Porteous P., Prior A. C., Roberts V., *Proc. Phys. Soc. (London)*, **77**, 1069 (1961); *Royal Radar Establishment, Malvern, Worcs. Report № 1895* (1962).
90. Putley E. H., *Journ. Phys. Chem. Solids*, **22**, 241 (1961); *Appl. Opt.*, **4**, 649 (1965).

91. Gaunt J. A., Phil. Trans. Roy. Soc. London, **A229**, 163 (1930).
92. Sommerfeld A., *Atombau und Spectrallinien (Wellenmechanik, vol. II)*, Friedrick Ungar, New York, 1951. (Имеется перевод: А. Зоммерфельд, *Строение атома и спектральные линии*, Гостехиздат, М., 1956.)
93. Berger J. M., Phys. Rev., **105**, 35 (1957); *Astrophys. Journ.*, **124**, 550 (1956).
94. Greene J., *Astrophys. Journ.*, **130**, 693 (1959).
95. Karzas W. J., Latter R., *Astrophys. Journ.*, Supplement Series, **6**, 167 (1961).
96. Brussard P. J., van de Hulst H. C., *Rev. Mod. Phys.*, **34**, 507 (1962).
97. Oster L., *Astrophys. Journ.*, **137**, 332 (1963).
98. Heald M. A., Wharton C. B., *Plasma Diagnostics with Microwaves*, John Wiley and Sons, New York, 1965. (Имеется перевод: М. Хилд, С. Уортон, *Микроволновая диагностика плазмы*, Атомиздат, М., 1968.)
99. Elwert G. *Ann. Physik*, **34**, 178 (1939).
100. Glasstone S., Lovberg R. H., *Controlled Thermonuclear Reactions*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960.
101. Rose D. J., Clark M., Jr., *Plasmas and Controlled Fusion*, M. I. T. Press and John Wiley and Sons, New York, 1961. (Имеется перевод: Д. Роуз, М. Кларк, *Физика плазмы и управляемые термоядерные реакции*, Атомиздат, М., 1963.)
102. Баби́ков В. В., Коган В. И., *Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций*, т. 3, изд-во АН СССР, 1958, стр. 102.
103. Sekiguchi T., Herndon R. C., Phys. Rev., **112**, 1 (1958).
104. Goldstein L., Sekiguchi T., Phys. Rev., **109**, 625 (1958).
105. Rostas F., Bhattacharya A. K., Sahn J. H., Phys. Rev., **129**, 495 (1963).
106. Martyn D. F., Proc. Roy. Soc. (London), **A193**, 44 (1948).
107. Smerd S. F., *Australian Journ. Sci. Res.*, **A3**, 34 (1950).
108. French I. P., Cloutier G. G., Bachynski M. P., *Can. Journ. Phys.*, **39**, 1273 (1961).
109. Terlouw J. C., *Quarterly Progr. Rep. № 64*, Research Laboratory of Electronics, M. I. T., Jan. 1962, p. 72.
110. Nyquist H., Phys. Rev., **32**, 110 (1928).
111. McCombie C. W., *Rep. Progr. Phys.*, **16**, 266 (1953).
112. Johnson J. B., Phys. Rev., **32**, 97 (1928).
113. Callen H. B., Welton T. A., Phys. Rev., **83**, 34 (1951).
114. Takahasi H., *Journ. Phys. Soc. Jap.*, **7**, 439 (1952).
115. Kubo R., *Journ. Phys. Soc. Jap.*, **12**, 570 (1957).
116. Lax M., *Rev. Mod. Phys.*, **32**, 25 (1960).
117. Rostoker N., *Nucl. Fusion*, **1**, 101 (1961).
118. Auer P. L., *Fluctuation-Dissipation Theorem*, Sperry-Rand Research Center, Sudbury, Mass., Internal Memorandum (1964) (не опубликовано).
119. Oster L., *Astrophys. Journ.*, **138**, 761 (1963).
120. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Статистическая физика*, Наука, М., 1964.
121. Kirkwood J. G., *Journ. Chem. Phys.*, **14**, 180 (1946).
122. Kubo R., Tomita K., *Journ. Phys. Soc. Jap.*, **12**, 570 (1957).
123. Thompson W. B., Hubbard J., *Rev. Mod. Phys.*, **32**, 714 (1960)
124. Hubbard J., *Proc. Roy. Soc.*, **A260**, 114 (1961).
125. Taylor J. B., *Phys. Fluids*, **3**, 792 (1960).
126. Леонтович М. А., Рытов С. М., *ЖЭТФ*, **23**, 246 (1952).
127. Haus H. A., *Journ. Appl. Phys.*, **32**, 493 (1961).
128. Mercier R. P., *Proc. Phys. Soc.*, **83**, 819 (1964).
129. Birmingham T., Dawson J., Oberman C., *Phys. Fluids*, **8**, 297 (1965).
130. Ohmura T., Ohmura H., *Astrophys. Journ.*, **131**, 8 (1960).

131. Касьянов В., Старостин А., ЖЭТФ, **48**, 295 (1965).
132. Mjolsness R. C., Ruppel H. M., Phys. Rev., **154**, № 1, 98 (1967).
133. Goldan D., Goldstein L., Phys. Rev., **138**, A39 (1965).
134. Stratton J. A., Electromagnetic Theory (McGraw-Hill, New York, 1941). (Имеется перевод: Дж. Стрэттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М.—Л., 1948.)
135. Graf K. A., Bachynski M. P., Can. Journ. Phys., **36**, 456 (1958); **39**, 1544 (1961); **10**, 887 (1962).
136. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M., Phys. Rev., **94**, 511 (1954).
137. Ландау Л. Д., Sow. Phys., **10**, 25 (1946); ЖЭТФ, **16**, 574 (1946).
138. Jackson J. D., Journ. Nucl. Energy (Pt. C), **1**, 171 (1960).
139. Jahnke E., Emde F., Tables of Functions with Formulae and Curves (Dover Publications, New York, 1945). (Имеется перевод Е. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций, Гостехиздат, М.—Л., 1949.)
140. Фадеева В. Н., Терентьев Н. М., Таблицы величин вероятностных интегралов от комплексных аргументов. Гостехиздат, М., 1954.)
141. Fried B. D., Conte S. D., The Plasma Dispersion Function, Academic Press, New York, 1961.
142. Malmberg J. H., Wharton C. B., Phys. Rev. Lett., **13**, 184 (1964); Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Culham, United Kingdom (1965).
143. Drummond W. E., Phys. Fluids, **7**, 816 (1964).
144. Lichtenberg A. J., Jayson J. S., Journ. Appl. Phys., **36**, 449 (1965).
145. Kuehl H. H., Steward G. E., Journ. Appl. Phys., **37**, 1724 (1966).
146. Kuehl H. H., Steward G. E., Yeh C., Phys. Fluids, **8**, 723 (1965).
147. Diamant P., Granatstein V. L., Schlesinger S. P., Journ. Appl. Phys. **37**, 1771 (1966).
148. Gunshor R. L., Journ. Appl. Phys., **37**, 3630 (1966).
149. Lee K. F., Journ. Appl. Phys., **37**, 4367 (1966).
150. Barrett P. J., Franklin R. N., Jones H. G., Dispersion and Damping of Electron Plasma Waves, Internal Report, Culham Laboratory, Culham, England, 1967.
151. Fried B. D., Gell-mann M., Jackson J. D., Wyld H. W., Journ. Nucl. Energy (Pt. C), **1**, 190 (1960).
152. Fried B. D., Gould R. W., Phys. Fluids, **4**, 139 (1961).
153. Wong A. Y., D'Angelo N., Motley R. W., Phys. Rev. Lett., **9**, 415 (1962).
154. Pines D., Bohm D., Phys. Rev., **85**, 338 (1952).
155. Cohen M. H., Phys. Rev., **123**, 711 (1961); **126**, 389, 398 (1962).
156. Jelly J. V., Serenkov Radiation, Pergamon Press, New York, 1958. (Имеется перевод: Дж. Д желли, Черенковское излучение и его применение, ИЛ, 1960.)
157. Rostoker N., Rosenbluth M. N., Phys. Fluids, **3**, 1 (1960).
158. Гинзбург В. Л., Железняков В. В., Астрономический журнал, **2**, 653 (1958).
159. Debye P., Hückel E., Phys. Zs., **24**, 185 (1923).
160. Fermi E., Phys. Rev., **57**, 485 (1940).
161. Kihara T., Aono O., Journ. Phys. Soc. Jap., **18**, 837 (1963).
162. Sigmar D. J., Hines K. C., Energy Loss of Charged Particles in a Plasma, 8th Int. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Vienna, 1967.
163. Ichimaru S., Fluctuation Phenomena in Solids, R. E. Burgess, Ed. Academic Press, 1965, p. 103.
164. Prentice A. J. R., Plasma Physics, **9**, 433 (1967).
165. Сятенко А. Г., Электромагнитные флуктуации в плазме, изд-во Харьковского университета, Харьков, 1965.
166. Joyce G., Sigmar D. J., Hines K. C., Energy Exchange of Test Particles with Plasma, Intern. Rep. ORNL Union Carbide Corp., Oak Ridge, Tennessee (1967).

167. Butler S. T., Buchingham M. J., *Phys. Rev.*, **126**, 1 (1962).
168. Lieberman M. A., Bers A., *Quarterly Progr. Rep.*, № 77, Research Laboratory of Electronics, M. I. T. (1965), p. 141.
169. Dawson J., Oberman C., *Phys. Fluids*, **5**, 517 (1962).
170. Dupree T. H., *Phys. Fluids*, **7**, 923 (1964).
171. Heald M. A., United Kingdom Atomic Energy Authority, Culham Laboratory Rep. № CLM-P45 (1964).
172. Dawson I., Oberman C., *Phys. Fluids*, **6**, 394 (1963).
173. Martyn D. E., *Nature*, **158**, 632 (1946).
174. Гинзбург В. Л., *ДАН СССР*, **52**, 487 (1946).
175. Thomas R. N., Athay R. G., *Physics of the Solar Chromosphere*, Interscience Publishers, New York, 1961.
176. Tidman D. A., Dupree T. H., *Phys. Fluids*, **8**, 1860 (1965).
177. Vineman O., *Phys. Rev.*, **115**, 503 (1959).
178. Jackson E. A., *Phys. Fluids*, **3**, 786 (1960).
179. Wild J. P., Smerd S. F., Weiss A. A., *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **1**, 291 (1963).
180. Wild J. P., *Radio Observations of Solar Flares*, AAS-NASA Symposium on the Physics of Solar Flares (1963), Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D. C., 1964, p. 161.
181. Гинзбург В. Л., Железняков В. В., *Изв. Выс. учеб. зав., Радиофизика*, **1**, 59 (1958).  
Paris Symposium on Radio Astronomy, R. N. Bracewell, Ed., Stanford University Press, Stanford, Calif., 1959.
182. Sturrock P. A., Type III Solar Radio Bursts, AAS-NASA Symposium on the Physics of Solar Flares (1963), Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, NASA, Washington, D. C., 1964, p. 357.
183. Sturrock P. A., *Journ. Nucl. Energy C (Plasma Phys.)*, **2**, 158 (1961).
184. Aamodt R. E., Drummond W. E., *Journ. Nucl. Energy (Pt. C)*, **6**, 147 (1964).
185. Boyd T. J. M., *Phys. Fluids*, **7**, 59 (1964).
186. Tidman D. A., NASA Rep. X-641-65-68, Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland (1965); *Planetary Space Sci.*, **13**, 781 (1965).
187. Montgomery D. C., Tidman D. A., *Plasma Kinetic Theory*, McGraw-Hill, New York, 1964.
188. Schmidt G., Halpern G., *Phys. Rev.*, **131**, 217 (1963).
189. Zucker F. J., *The Guiding and Radiation of Surface Waves*, Proc. Symp. on Modern Adv. in Microwave Techniques, Polytechnic Institute of Brooklyn, New York (1954).
190. Zucker F. J., *Surface and Leaky-Wave Antennas*, Antenna Engineering Handbook, H. Jasik, Ed., McGraw-Hill, New York, 1961.
191. Dawson J., Oberman C., *Phys. Fluids*, **2**, 103 (1959).
192. Bernstein I. B., Trehan S. K., *Nucl. Fusion*, **1**, 3 (1960).
193. Halpern G., Schmidt G., Stevens Institute of Technology Rep. SIT-122, May 1964; *Phys. Fluids*, **8**, 138 (1965).
194. Field G. B., *Astrophys. Journ.*, **124**, 555 (1956).
195. Tidman D. A., *Phys. Rev.*, **117**, 366 (1960).
196. Tidman D. A., Boyd J. M., *Phys. Fluids*, **5**, 213 (1962).
197. Tidman D. A., Weiss G. H., *Phys. Fluids*, **4**, 703 (1961).
198. Tidman D. A., Weiss G. H., *Phys. Fluids*, **4**, 866 (1961).
199. Herlofson N., *Ark. Fysik*, **3**, 247 (1951).
200. Romell D., *Nature*, **167**, 243 (1951).
201. Dattner A., *The Plasma Resonator*, The IIIrd International Conference on Ionization Phenomena in Gases, Venice, 1957, *Rendiconti*, 1957, p. 215.
202. Dattner A., *Ericsson Techn.*, **13**, 309 (1957); **19**, 3 (1963).
203. Messiaen A. M., Vandenplas P. E., *Physica*, **28**, 537 (1962).

204. Parker J. V., Nickel J. C., Gould R. W., Phys. Fluids, 7, 1489 (1964).  
 205. Schmitt H. J., Appl. Phys. Lett., 4, 111 (1964).  
 206. Agdur B., Rep. on Res. Cond. under U. S. Air Force Contract AF61 (052) 552, 1964.  
 207. Agdur B., Kerzar B., Sellberg F., Phys. Rev., 128, 1 (1962).  
 208. Gould R. W., Noise Radiation and Scattering from a Cylindrical Plasma Column, VIII International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Belgrade, 1965.  
 209. Lustig C. D., Phys. Lett., 9, 315 (1964).  
 210. Gould R. W., Bull. Amer. Phys. Soc., 5, 322 (1960).  
 211. Leavens W. M., Journ. Res. Natl. Bur. Std. (Radio Sci.) 69D, № 10, 1321 (1965).  
 212. Harker K. J., Phys. Fluids, 8, 1846 (1965).  
 213. Fejer J. A., Phys. Fluids, 7, 439 (1964).  
 214. Crawford E., Rep. № 1045, Microwave Laboratory, Stanford University, (1963).  
 215. Morse P. M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York, 1953, vol. II, p. 1092. (Имеется перевод: Морс П. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, ИЛ, 1958, т. II.)  
 216. Schmitt H. J., Meltz G., Freyheit P. J., Phys. Rev., 139, A1432 (1965).  
 217. O'Brien B., Gould R. W., Parker J., Phys. Rev. Lett., 14, 630 (1965).  
 218. Taillet J., Plasmoides à Haute Fréquence et Décharges Résonnantes, D. Sc. Thesis, University of Paris (1964).  
 219. Messiaen A. M., Vandenplas P. E. M., Physica, 30, 303 (1964).  
 220. Takayama K., Ikegami H., Miyazaki S., Phys. Rev. Lett., 5, 238 (1960).  
 221. Cairns R. B., Proc. Phys. Soc. (London), 82, 243 (1963).  
 222. Peter G., Muller G., Rabben H. H., 6th Int. Conf. on Ionization Phenomena in Gases, Paris, 1963, S. E. R. M. A., 4, 147 (1963).  
 223. Левитский С. М., Шахурин И. П., ЖТФ, XXXIII, 429 (1963).  
 224. Mayer H. M., 6th Int. Conf. Ionization Phenomena in Gases, Paris, 1963, S. E. R. M. A., 4, 129 (1963).  
 225. Walitzko J. A., The Study of Low Density Plasmas with Radio Frequency Dipole Probes, M. Sc. Thesis, Department of Physics, M. I. T. Cambridge, Mass, 1966.  
 226. Harp R. S., Appl. Phys. Lett., 4, 186 (1964).  
 227. Pavkovich J., Kino G. S., Microwave Lab. Rep. № 1077, Stanford University, California, 1963.  
 228. Buckley R., Proc. Roy. Soc. (London), A290, 186 (1966).  
 229. Baldwin D. E., Ignat D. W., Resonant Absorption in Zero — Temperature Non-Uniform Plasma (submitted for publication in Phys. Fluids, 1968).  
 230. Ichikawa Y. H., 6th Int. Conf. Ionization Phenomena in Gases, Paris, 1963, S. E. R. M. A., 4, 125 (1963).  
 231. Hoh F. C., Phys. Rev., 133, A1016 (1964).  
 232. Wien W., Eine Neue Beziehung der Strahlung Schwarzer Körper zum zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie, Sitzber. Akad. Wiss., Berlin, 1893, p. 55.  
 233. Mott-Smith H. M., Phys. Fluids, 3, 721 (1960).  
 234. Claussius R., Pogg. Ann., 1, 121 (1864).  
 235. Schott G. A., Electromagnetic Radiation, University Press, Cambridge, 1912.  
 236. Schwinger J., Phys. Rev., 75, 1212 (1949).  
 237. Rosner H., Rep. AFSWC-TR-58-47, Republic Aviation Corp., Farnungdale, Long Island, New York (1958).  
 238. Oster L., Phys. Rev., 119, 1444 (1960).  
 239. Oster L., Phys. Rev., 121, 961 (1961).  
 240. Kawabata K., Publ. Astronom. Soc. Japan, 16, 30 (1964).



241. Westfold K. C., *Astrophys. Journ.*, **130**, 241 (1959).
242. Гинзбург В. Л., Сазонов В. Н., Сыроватский С. И., УФН, **11**, 34 (1968).
243. Epstein R. I., Feldman P. A., *Astrophys. Journ.*, **150**, L109 (1967).
244. Scheuer P. A. G., *Astrophys. Journ.*, **151**, L139 (1968).
245. Le Roux E., *Ann. d'Astrophys.*, **24**, 71 (1961).
246. Melrose D. B., *Gyromagnetic and Synchrotron Radiation*, 1968 (не опубликовано).
247. Posener D. W., *Austral. Journ. Phys.*, **12**, 184 (1959).
248. Flavin R. K., Meyer and R. G., *Advanced Energy Conversion*, **3**, 3—18, Pergamon Press, New York, 1963.
249. Ingraham J. C., *Electron-Atom Collision Cross-Section Measurements in the Afterglow of a Pulsed Cesium Plasma*, VIIth International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Belgrade, 1965.
250. Erdélyi A., *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill, New York, 1953.
251. Elder F. R., Langmuir R. V., Pollock H. C., *Phys. Rev.*, **74**, 52 (1948).
252. Tomboulia n D. H., Hartman P. L., *Phys. Rev.*, **102**, 1423 (1956).
253. Westfold K. C., *Phil. Mag.*, **41**, 509 (1950).
254. Chang D. B., Davis L., Jr., *Appl. Journ.*, **136**, 567 (1962).
255. Chang D. B., Boeing Scientific Research Laboratories, Seattle, Washington Rep. DL-82-0060 (1960).
256. Legg M. P. C., Westfold K. C., *Proc. Astron. Soc. Austr.*, **1**, 27 (1967).
257. Alfvén H., Herlofson N., *Phys. Rev.*, **78**, 616 (1950).
258. Kierpenheuer K. O., *Phys. Rev.*, **79**, 738 (1950).
259. Гинзбург В. Л., ДАН СССР, **76**, 377 (1951).
260. Гинзбург В. Л., УФН, **51**, 343 (1953).
261. Гетманцев Г. Г., ДАН СССР, **83**, 557 (1952).
262. Шкловский И. С., *Космическое радиоизлучение*, Гостехиздат, М., 1956.
263. Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И., *Происхождение космических лучей*, изд-во АН СССР, М., 1963.
264. Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И. *Ann. Rev. of Astr. and Astrophys.*, Leo Goldberg, Ed., Annual Review Inc., vol. 3, Palo Alto, California, 1915, p. 297.
265. Woltjer L., *Bull. Astr. Inst. Neth.*, **14**, 39 (1958).
266. Field G. B., *Journ. Geophys. Res.*, **64**, 1169 (1959).
267. Field G. B., *A Synthesis of Ideas on Jupiter*, Proc. of the NASA Conference on the Planet Jupiter, 1962.
268. Lichtenberg A. J., Sesnic S., Trivelpiece A. W., *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 387 (1964); VIIth International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Belgrade, 1965.
269. Трубников Б. А., *Phys. Fluids*, **4**, 195 (1961).
270. Beard D. B., *Phys. Fluids*, **2**, 379 (1959); **3**, 324 (1960).
271. Beard D. B., *Plasma Phys. (Journ. Nucl. Energy C)*, **2**, 94 (1961).
272. Beard D. B., Baker J. C., *Phys. Fluids*, **5**, 1113 (1962).
273. Drummond W. E., Rosenbluth M. N., *Phys. Fluids*, **3**, 45 (1960).
274. Drummond W. E., Rosenbluth M. N., *Phys. Fluids*, **6**, 276 (1963).
275. Hill R. M., Kaplan D. E., *Phys. Rev. Lett.*, **14**, 1062 (1965).
276. Hahn E. L., *Phys. Rev.*, **80**, 580 (1950).
277. Blume R. J., *Phys. Rev.*, **109**, 1867 (1958).
278. Gould R. W., *Phys. Lett.*, **19**, 477 (1965).
279. Hirshfield J. L., Wachtel J. M., *Cyclotron Resonance Echoes in Plasmas*, 7th Annual Meeting of the Division of Plasma Physics of the APS, San Francisco, 1965.
280. Herrmann G. F., Whitmer R. F., *Phys. Rev.*, **143** (№ 1), 122 (1966).

281. Kegel W. H., Techn Rep. to the Office of Nav. Res. № 26, California Institute of Technology, Pasadena, 1965.
282. Gould R. W., Phys. Lett., **25A**, 559 (1967).
283. Gould R. W., O'Neil T. M., Malmberg J. H., Phys. Rev. Lett., **19**, 219 (1967).
284. O'Neil T. M., Gould R. W., Phys. Fluids, **11**, 134 (1968).
285. O'Neil T. M., Phys. Fluids, **11**, 2420 (1968).
286. Malmberg J. H., Wharton C. B., Gould R. W., O'Neil T. M., Phys. Rev. Lett., **20**, 95 (1968).
287. Baker D. R., Ahern N. R., Wong A. Y., Phys. Rev. Lett., **20**, 318 (1968).
288. Ikezi H., Takahashi N., Phys. Rev. Lett., **20**, 140 (1968).
289. Hirshfield J. L., Brown S. C., Phys. Rev., **122**, 719 (1961).
290. Balwanz W. W., N. R. L. Rep 5388, U. S. Nav. Res. Lab., Washington, D. C., 1959.
291. Hirshfield J. L., Baldwin D. E., Brown S. C., Phys. Fluids, **4**, 198 (1961).
292. Malmberg J. H., Wharton C. B., Gould R. W., O'Neil T. M., Phys. Fluids, **11**, 1147 (1968).
293. Allis W. P., в книге Handbuch der Physik, Bd. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1956, S. 383, preprinted as M. I. T. Techn. Rep. № 299, 1956.
294. Budden K. G., Radio Waves in the Ionosphere, University Press, Cambridge, 1961.
295. Денисов Н. Г., ЖЭТФ, **34**, 528 (1958).
296. Stix T. H., Phys. Fluids, **3**, 19 (1960).
297. Bekefi G., Coccoli J. D., Hooper E. B., Buchsbaum S. J., Phys. Rev. Lett., **9**, 6 (1962).
298. Buchsbaum S. J., Mower L. L., Brown S. C., Phys. Fluids **3**, 806 (1960).
299. Wong A. Y., Kuckes A. F., Phys. Rev. Lett., **13**, 306 (1964).
300. Wharton C. B., Proc. 4th Int'l. Conf. Ionization Phenomena in Gases (Uppsala 1959), 737 North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1960.
301. Motley R., Lustig C. D., Sanders S., Plasma Phys. (Journ. Nucl. Energ.), **3**, 17 (1961).
302. Рунн N., D'Angelo N., Rev. Sci. Instr., **31**, 1326 (1960).
303. Коломенский А. А., ДАН СССР, **1**, 1331 (1956).
304. Эйджман В. Я., ЖЭТФ, **41**, 1971 (1963).
305. Liemohn H. B., Journ. Res. Natl. Bur. Std. USNC-URSI (Radio Sci.), **69D**, 741 (1959).
306. McKenzie J. F., Phil. Trans. Roy. Soc. (London), **255A**, 585 (1963).
307. McKenzie J. F., Proc. Phys. Soc., **84** (Pt. 2), 269 (1964).
308. Seshadri S. R., Tuan H. S., Journ. Res. Natl. Bur. Std/USNC-URSI (Radio Sci.), **69D**, 767 (1965).
309. Bers A., Relativistic Formulation of the Conductivity Tensor for a Collisionless Plasma in a Magnetic Field, internal memorandum, M. I. T., 1964.
310. Ситенко А. Г., Степанов К. Н., ЖЭТФ, **31**, 642 (1956).
311. Bernstein I. B., Phys. Rev., **109**, 10 (1958).
312. Гершман Б. Н., ЖЭТФ, **24**, 659 (1953).
313. Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д., Proc. 2nd U. N. Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, **31**, United Nations, Geneva, 1958, p. 118.
314. Drummond J. E., Phys. Rev., **110**, 293; **112**, 1460 (1958).
315. Pradhan T., Phys., Rev., **107**, 1222 (1957).
316. Scarf F. L., Phys. Fluids, **5**, 6 (1962).
317. Platzman P. M., Buchsbaum S. J., Phys. Rev., **128**, 1004 (1962).
318. Meservey E. B., Schlesinger S. P., Phys. Fluids, **8**, 500 (1965).
319. Arunasalam V., Gurnee M. N., Meservey E. B., Davidson R. C., Plasma Physics Laboratory, Princeton Univ. Report № MATT-379, 1965.

320. Harris E. G., Phys. Rev. Lett., 2, 34 (1959).
321. Harris E. G., Plasma Phys. (Journ. Nucl. Energy C.), 2, 138 (1961).
322. Harris E. G., General Atomic, San Diego California, Rep. № 5581 (1964).
323. Drummond W. E., Rosenbluth M. N., General Atomic, San Diego, Rep. № 2647 (1962).
324. Hall L. S., Heckrotte W., Kammash T., Phys. Rev. Lett., 13, 603 (1964).
325. Gruber S., Klein M. W., Auer P. L., Phys. Fluids, 8, 1504 (1965).
326. Bers A., Gruber S., Appl. Phys. Lett., 6, 27 (1965).
327. Dory R. A., Guest G. E., Harris E. G., Phys. Rev. Lett., 14, 131 (1965).
328. Stone P. M., Auer P. L., Phys. Rev., 138, A695 (1965).
329. Crawford F. W., Journ. Res. Natl. Bur. Sbd./USNC-URSI, Radio Science, 69D, 789 (1965).
330. Mantei T. D., Stanford University Institute for Plasma Research, Rep., № 194 (1967)
331. Landauer G., Plasma Phys. (Journ. Nucl. Energy C), 4, 395 (1962).
332. Tanaka S., Kubo H., Mitani K., Journ. Phys. Soc. Jap., 20, 462 (1965).
333. Buchsbaum S. J., Hasegawa A., Phys. Rev. Lett., 12, 685 (1964).
334. Buchsbaum S. J., Hasegawa A., Phys. Rev., 143 (1), 303 (1966).
335. Azevedo C., Res. Lab. of Electr. Quarterly Progr. Rep. № 79, 1965, p. 85, Massachusetts Institute of Technology.
336. Slater L. J., Confluent Hypergeometric Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 1960.
337. Johnston J. R., Douglas Aircraft Company, Long Beach, California, Ad. Techn. Eng. and Product Develop., Aircraft Div. Rep. № 31901, August 1964.
338. Crawford F. W., Kino G. S., Weiss H. H., Phys. Rev. Lett., 13, 229 (1964).
339. Harp R. S., Appl. Phys. Lett., 6, 51 (1965); VIIIth International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Belgrade, 1965.
340. Gruber S., Bekefi G., Measurement of Standing Electrostatic Waves in an Inhomogeneous Plasma Column near Electron Cyclotron Harmonics, VIIth International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Belgrade, 1965.
341. Pearson G. A., Phys. Fluids, 9, 2454 (1966).
342. Frisch H. L., Pearson G. A., Phys. Fluids, 9, 2464 (1966).
343. Lockwood G. E. K., Can. Journ. Phys., 41, 190 (1963).
344. Calvert W., Goe G. B., Journ. Geophys. Res., 68, 6113 (1963).
345. Shkarofsky I. P., Johnston T. W., Phys. Rev. Lett., 15, 51 (1965); Phys. of Fluids, 9, 561, 570 (1966).
346. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., Скрудков Н. В., ЖТФ, XXXIII, 922 (1963).
347. Canobbio E., Croci R., Proc. of the Sixth International Conference on Ionization Phenomena in Gases (Paris, 1963), P. Hubert, Ed., S. E. R. M. A., vol. 3, Paris, 1964, p. 269; Phys. Fluids, 9, 549 (1966).
348. Lustig C. D., Phys. Rev., 139, A63 (1965).
349. Stix T. H., Phys. Rev. Lett., 15, 878 (1965).
350. Horton C. W., Jr., Phys. Fluids, 9, 815 (1966).
351. Azevedo C., Ph. D thesis, Dept. of Physics, Massachusetts Institute of Technology, 1966.
352. Bernstein I. B., Weenink M. P. H., FOM-Instituut voor Plasma Fysica, Jutphaas, Rep. I. R. 66/014 (1966).
353. Boyd T. J. M., Proc. 7th Int. Conf. Ionization Phenomena in Gases, Belgrade, vol. II, (1966), p. 512.
354. Simon A., Rosenbluth M. N., Phys. Fluids, 6, 1566 (1963).
355. Kuckes A. F., Dawson J. M., Phys. Fluids, 8, 1007 (1965).
356. Crawford F. W., Tataronis J. A., Institute for Plasma Research, Stanford University Techn. Rep. SY-IPR, № 20 (1965).

357. Crawford F. W., Tataronis J. A., Microwave Laboratory, Stanford University Internal Memorandum on Contract (NSF GP-936) Rep. № 1295 (1965).
358. Левин М. Л., ЖЭТФ, **4**, 225 (1947); ДАН СССР, **102**, 53 (1955).
359. Rosenbluth M. N., Rostoker N., Phys. Fluids, **5**, 776 (1962).
360. Villars F., Weisskopf V. F., Proc. IRE, **43**, 1232 (1955).
361. Van de Hulst H. C., Light Scattering by Small Particles, John Wiley and Sons, New York, 1957.
362. Kuiper G. P. (Ed.), The Sun, University of Chicago Press, 1953.
363. Dougherty J. P., Farley D. T., Proc. Roy. Soc. (London), **259A**, 79 (1960); Journ. Geophys. Res., **68**, 5473 (1963).
364. Salpeter E. E., Phys. Rev., **120**, 1528 (1960).
365. Fejer J. A., Journ. Geophys. Res., **65**, 2635 (1960); Can Journ. Phys., **38**, 1114 (1960).
366. Bowles K. L., Phys. Rev. Lett., **1**, 454 (1958); Nat'l Bureau of Standards, Boulder, Colorado, Rep. № 6070 (1959).
367. Gordon W. E., Proc. IRE, **46**, 1824 (1958).
368. Rosenbluth M. N., Topics in Microinstabilities in Advanced Plasma Theory, Rosenbluth, Ed., Academic Press, New York, 1964.
369. Fiocco G., Thompson E., Phys. Rev. Lett., **10**, 89 (1963).
370. Gerry E. T., Rose D. J., Journ. Appl. Phys., **37**, 2715 (1966).
371. Lidsky L. M., Rothleder S. D., Rose D. J., Yoshikawa S., Michelson C., Machin R. J. Journ. Appl. Phys., **33**, 2490 (1960).
372. Kunze H. J., Fünfer E., Kronast B., Kegel W. H., Phys. Lett., **11**, 42 (1964).
373. Ramsden S. A., Davies W. E. R., Phys. Rev. Lett., **13**, 227 (1964); **16**, 303 (1966).
374. Davies W. E. R., Ramsden S. A., Phys. Lett., **8**, 179 (1964).
375. De Silva A. W., Evans D. E., Forrest M. J., Nature, **203**, 1321 (1964).
376. Ascoli-Bartoli U., Katzenstein J., Lovisetto L., Nature, **204**, 672 (1964).
377. Patrick R. M., Phys. Fluids, **8**, 1985 (1965).
378. Gerry E. T., Patrick R. M., Phys. Fluids, **8**, 208 (1965).
379. Chan P. W., Nodwell R. A., Phys. Rev. Lett., **16**, 122 (1966).
380. Buneman O., Journ. Geophys. Res., **67**, 2050 (1962).
381. Moorcroft D. R., Journ. Geophys. Res., **68**, 4870 (1963).
382. Evans J. V., Loewenthal M., Planetary Space Sci., **12**, 915 (1964).
383. Fejer J. A., Can. Journ. Phys., **39**, 716 (1961).
384. Salpeter E. E., Journ. Geophys. Res., **66**, 982 (1961); Phys. Rev., **122**, 1663 (1961).
385. Farley D. T., Dougherty J. P., Barron D. W., Proc. Roy. Soc., **A263**, 238 (1961).
386. Hagfors T., Journ. Geophys. Res., **66**, 1699 (1961).
387. Renau J., Camnitz H., Flood W., Journ. Geophys. Res., **66**, 2703 (1961).
388. Taylor E. C., Comisar G. G., Phys. Rev., **132**, 2379 (1963).
389. Ron A., Dawson J., Oberman C., Phys. Rev., **132**, 497 (1963).
390. Pappert R. A., Phys. Fluids, **6**, 1452 (1963).
391. Perkins F. W., Salpeter E. E., Yngvesson K. O., Phys. Rev. Lett., **14**, 579 (1965).
392. Stern R. A., Tzoar N., Phys. Rev. Lett., **15**, 485 (1965); Radiation from Resonant Plasma Oscillations Excited by High Frequency ( $f \geq f_{res}$ ) Microwaves, VIIIth Annual Meeting of the Plasma Physics Division of the APS, San Francisco, California (1965).
393. Chen Y. G., Leheny R. F., Marshall C., Phys. Rev. Lett., **15**, 184 (1965).

394. Kroll N. M., Ron A., Rostoker N., Phys. Rev. Lett., **13**, 83 (1964).  
395. Platzman P. M., Buchsbaum S. J., Tzoar N., Phys. Rev. Lett., **12**, 573 (1964).  
396. Platzman P. M., Tzoar N., Phys. Rev., **136**, A11 (1964).  
397. Du Bois D. F., Gilinsky V., Phys. Rev., **135**, A995 (1964).  
398. Cheng H., Lee Y. C., Phys. Rev. Lett., **14**, 426 (1965).  
399. Bradley D. J., Magyar G., Richardson M., Resonance Scattering Due to Laser Light Mixing in a Plasma, VIIIth International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Belgrade, 1965.  
400. Ichimaru S., Ann. Phys., **20**, 78 (1962).  
401. Ichimaru S., Pines D., Rostoker N., Phys. Rev. Lett., **8**, 231 (1962).  
402. Pines D., Schrieffer J. R., Phys. Rev., **124**, 1387 (1961).  
403. Arunasalam V., Brown S. C., Phys. Rev., **140**, A471 (1965).  
404. Little P. F., Hamberger S. M., Culham Lab. Rep. CLM-P95 (1965), Culham, Berkshire.  
405. Ахиезер А. И., Ахиезер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н., Коллективные колебания в плазме, М., Атомиздат, 1964.  
406. Pierce J. R., Travelling Wave Tubes, D. Van Nostrand, New York, 1950. (Имеется перевод: Дж. Пирс, Лампа с бегущей волной, Сов. Радио, М., 1952.)  
407. Louisell W. H., Coupled Modes and Parametric Electronics, John Wiley and Sons, New York, 1960.  
408. Галеев А. А., Карпман В. И., ЖЭТФ, **44**, 592 (1963).  
409. Armstrong J. A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P. S., Phys. Rev., **127**, 1918 (1962).  
410. Bloembergen N., Nonlinear Optics, Benjamin Inc., New York, 1955. (Имеется перевод: Н. Бломберген, Нелинейная оптика, «Мир», М., 1966.)  
411. Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З., ЖТФ, **XXXII**, 1291 (1961).  
412. Diamond P., Stanford University Institute for Plasma Research Rep. № 178 (1967).  
413. Sugihara R., Phys. Fluids, **11**, 178 (1968).  
414. Montgomery D., Phys. Rev. Lett., **19**, 1465 (1967).  
415. Montgomery D., Physica, **31**, 693 (1965).  
416. Frieman E. A., Journ. Math. Phys., **4**, 410 (1963).  
417. Coppi B., Rosenbluth M. N., Sudan R. N., Nonlinear Interactions of Positive and Negative Energy Modes in Rarefied Plasmas, Ann. of Phys., **55**, 207, 248 (1969).  
418. Aamodt R. E., Sloan M. L., Phys. Rev. Lett., **19**, 1227 (1967).  
419. Aamodt R. E., Sloan M. L., Phys. Fluids, **11**, 2218 (1968).  
420. Вунеман О., в книге «Radiation and Waves in Plasmas», M. Mitchner, Ed., Stanford University Press, Stanford, California, 1961.  
421. Gardner C. S., Phys. Fluids, **6**, 839 (1963).  
422. Weil H., Walsh D., Radio Science, 2 (New Series) 225 (1967).  
423. Гинзбург В. Л., УФН, **2**, 874 (1960).  
424. Коврижных Л. М., Рухадзе А. А., ЖЭТФ, **38**, 850 (1960).  
425. Penrose O., Phys. Fluids, **3**, 258 (1960).  
426. Twiss R. Q., Australian Journ. Phys., **11**, 564 (1958).  
427. Bekefi G., Hirshfield J. L., Brown S. C., Phys. Rev., **122**, 1037 (1961).  
428. Purcell E. M., Pound R. V., Phys. Rev., **81**, 279 (1951).  
429. Ramsey N. F., Phys. Rev., **103**, 20 (1956).  
430. Abraham A., Proctor W. G., Phys. Rev., **109**, 1441 (1958).  
431. Chu L. J., Kinetic Power Theorem, presented at Conference on Electron Devices, Durham, N. H. June, (1951).  
432. Haus H. A., Bobroff D. L., Journ. Appl. Phys., **28**, 694 (1957).

433. Bers A., Penfield P., IRE Transactions of the Professional Group on Electron Devices, ED-9, 12 (1962).
434. Gruber S., Sperry Rand Research Center, Sudbury, Mass., Report № SRRC-RM-65-1 (1965).
435. Bekefi G., Hooper E. B., Appl. Phys. Lett., 4, 135 (1964).
436. Gruber S., McBee W. D., Shepherd L. T., Appl. Phys. Lett., 4, 137 (1964).
437. Getty W. D., Smullin L. D., Journ. Appl. Phys., 34, 3421 (1963).
438. Smullin L. D., Getty W. D., Characteristics of a Beam-Plasma Discharge, Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, Culham, United Kingdom (1965).
439. Alexeff I., Neidigh R. V., Peed W. F., Phys. Rev., 136, A689 (1964).
440. Харченко И. Ф., Файнберг Я. Б., Корнилов Е. А., Пиденко Н. С., ЖЭТФ, XXXIV, 1031 (1964).
441. Березин А. К., Березина Г. П., Болотин П. И., Файнберг Я. Б., Journ. Nucl. Energy (Pt. C), 6, 173 (1964).
442. Birdsall C. K., Brewer G. R., Haeff A. V., Proc. IRE, 41, 865 (1953).
443. Sturrock P. A., Phys. Rev., 122, 1488 (1958).
444. Briggs R. J., Electron-Stream Interaction with Plasmas, M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1964.
445. Schneider J., Phys. Rev. Lett., 2, 504 (1959).
446. Schneider J., Zs. Naturforsch., 15a, 484 (1960).
447. Cossoli J. D., Quarterly Progr. Rep., Research Laboratory of Electronics, M. I. T., № 67, 60 (1962).
448. Bers A., Speck C. E., RLE Quarterly Progr. Rep., M. I. T., 113 (1966), № 81.
449. Hirshfield J. L., Wachtel J. M., Phys. Rev. Lett., 12, 533 (1964).
450. Bott I. B., Proc. IEEE, 52, 330 (1964); Phys. Lett., 14, 293 (1965).
451. Wingerson R. C., Phys. Rev. Lett., 6, 446 (1961).
452. Железняков В. В., ЖЭТФ, 51, 570 (1967).
453. Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И., УФН, 8, 674 (1966).
454. Fung P. C. W., Canad. Journ. Phys., 46, 1073 (1968).
455. Cossoli J. D., Quarterly Progress Rep. Research Laboratory of Electronics, M. I. T., № 72, 102 (1964); № 73, 35 (1964).
456. Tanaka S., Honzawa T., Ikegami H., Takayama K., Institute for Plasma Physics, Nagoya University Rep. № IPPJ-32 (1964); Rep. № IPPJ-40 (1965).
457. Mitani K., Tanaka S., Terumichi Y., Negative Absorption of Microwave Radiation in a Partially Ionized Xenon Plasma in a Magnetic Field, VIIth International Conference on Phenomena in Ionized Gases, Belgrade, 1965.
458. Wachtel J. M., Hirshfield J. L., Phys. Rev. Lett., 19, 293 (1967).
459. Ohara S., Journ. Phys. Soc. Jap., 18, 852 (1963).
460. Browne P. F., Astrophys. Journ., 134, 963 (1961); 136, 442 (1962).
461. Twiss R. Q., Astrophys. Journ., 136, 438 (1962).
462. Musha T., Yoshida F., Phys. Rev., 113, A1303 (1964).
463. Speck C. E., Bers A., Quarterly Progr. Rep., Research Laboratory of Electronics, M. I. T., № 15, 1965, p. 113.
464. Bracewell R. N., Roberts J. A., Austr. Journ. Phys., 7, 615 (1954).
465. Bracewell R. N., Austr. Journ. Phys., 9, 198, 297 (1956).
466. Silver S., Microwave Antenna Theory and Design, M. I. T. Radiation Laboratory Series, 12, McGraw-Hill, New York, 1949.
467. Slater J. C., Microwave Transmission, Dover Publications, New York, 1959.
468. Carson J. R., Bell Syst. Tech. Journ., 3, 393 (1924); 9, 325 (1930).

469. Brown J., Microwave Lenses, Methuen Monograph, John Wiley and Sons, New York, 1953.
470. Bekefi G., Eaton Electronics Research Lab. Tech. Rep. 38, McGill Univ., Montreal (1957).
471. Kraus J. D., Antennas, McGraw-Hill, New York, 1950.
472. Kraus J. D., Proc. IRE, **46**, 92 (1958).
473. Bracewell R. N., Swarup G., IRE Trans. Antennas Propagation, **AP-9**, 22 (1961).
474. Gordon W. E., LaLonde L. M., IRE Trans. Antennas Propagation, **AP-9**, 17 (1961).
475. Kraus J. D., Nash R. T., Ko H. S., IRE Trans. Antennas Propagation, **AP-9**, 4 (1961).
476. Read R. B., IRE Trans. Antennas Propagation, **AP-9**, 31 (1961).
477. Swenson G. W., Jr. Lo Y. T., IRE Trans. Antennas Propagation, **AP-9**, 9 (1961).
478. Christiansen W. N., Ann. Rev. Astron. Astrophys., **1**, 1 (1963).
479. Bekefi G., Brown S. C., Amer. Journ. Phys., **29**, 404 (1961).
480. Ingraham J. C., Electron Relaxation Times in a Plasma, Ph. D. Thesis, M. I. T., Dept. of Physics (1963), не опубликовано.
481. Slater J. C., Rev. Mod. Phys., **18**, 441 (1946).
482. Troup G., Masers, Methuen Monograph, John Wiley and Sons, New York, 1959.
483. Brown S. C., Rose D. J., Journ. Appl. Phys., **23**, 711 (1952).
484. Rose D. J., Brown S. C., Journ. Appl. Phys., **23**, 719, 1028 (1952).
485. Labuda E. F., Cordon E. I., Journ. Appl. Phys., **35**, 1647 (1964).
486. Graham J. W., Introduction to Radiometer Detection Theory, Dept. of Electrical Engineering and Research Laboratory of Electronics Lecture Notes (1964), не опубликовано.
487. Harris D. B., Microwave Journ., **3** (4) 41; **3** (5), 47 (1960).
488. Colvin R. S., Scientific Rep. № 18, Stanford Electronics Laboratories, Stanford University, AF 18 (603) — 53, 1961.
489. Cohn M., Wentworth F. E., Wiltse J. C., Proc. IEEE, **51**, 1227 (1963).
490. Dicke R. H., Rev. Sci. Instr., **17**, 268 (1946).
491. Pound R. V., Microwave Mixers, McGraw-Hill, 1948.
492. Robinson F. N. H., Noise in Electrical Circuits, Oxford, Univ. Press, 1962.
493. Ingraham J. C., McCarthy J. J., RLE Quarterly Progr. Rep. M. I. T. № 64 (1962), p. 76.
494. Uramoto J., Fujita J., Ikegami H., Takayama K., Rep. № IPPJ-19, Institute of Plasma Physics, Nagoya Univ., Japan (1963).
495. Kegel W. H., Gould R. W., Phys. Lett., **19**, 531 (1969).

### Дополнительная литература

1. Бажанова А. Е., Карпунин В. Т., Кархов А. Н., Пистунович В. И., Ядерный синтез, **1**, 227 (1962).  
Циклотронное и тепловое излучение плазмы в «Огре».
2. Власов А. А., ЖЭТФ, **8**, 291 (1938); Sow, Phys., **9**, 25 (1945).  
Теория вибрационных свойств электронного газа и ее применения.
3. Гайлитис А., Цытович В. Н., ЖЭТФ, **47**, 1468 (1964).  
Излучение при рассеянии заряженных частиц на электромагнитных волнах изотропной плазмы.
4. Гершман Б. Н., ЖЭТФ, **31**, 707 (1956).  
Замечания о волнах в однородной магнитоактивной плазме.

5. Гершман Б. Н., ЖЭТФ, 37, 695 (1959).  
О нерезонансном поглощении электромагнитных волн в магнитоактивной плазме.
6. Гершман Б. Н., Изв. Высш. учебн. зав., Радиофизика, 3, 146 (1960).  
Групповая скорость плазменных волн при наличии магнитного поля.
7. Гершман Б. Н., Изв. Высш. учебн. зав., Радиофизика, 3, 534 (1960).  
Проблема распространения электромагнитных волн в слабо релятивистской магнитоактивной плазме.
8. Гершман Б. Н., ЖЭТФ, 38, 912 (1960).  
О гирорезонансном поглощении электромагнитных волн в плазме.
9. Гершман Б. Н., Гинзбург В. Л., Денисов Н. Г., УФН, 61, 561 (1957).  
Распространение электромагнитных волн в плазме.
10. Гершман Б. Н., Ковнер М. С., Изв. Высш. учебн. зав., Радиофизика, 2, 28 (1959).  
О некоторых связанных с учетом соударений особенностях распространения волн в магнитоактивной плазме.
11. Голант В. Е., Жилинский А. П., ЖТФ, XXX, 15 (1960).  
Распространение электромагнитных волн через волноводы, заполненные плазмой.
12. Денисов Н. Г., Радиотехника и электроника, 4, 388 (1959).  
О поглощении радиоволн в резонансных областях неоднородной плазмы.
13. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., ЖЭТФ, 39, 845 (1960).  
Электромагнитные волны в полупространстве, заполненном плазмой.
14. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., ЖЭТФ, 40, 140 (1961).  
Дисперсионное уравнение для обыкновенной волны, движущейся в плазме поперек внешнего магнитного поля.
15. Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П., ЖЭТФ, 41, 1527 (1961).  
Дисперсионное уравнение для необыкновенной волны, движущейся в плазме поперек внешнего магнитного поля.
16. Караваев В. В., ЖЭТФ, 47, 1877 (1964).  
О флуктуациях спектральных энергетических величин в тепловом излучении.
17. Пистунович В. И., Шафранов В. Д., Nucl. Fusion, 1, 189 (1961).  
Циклотронное излучение ионов в холодной плазме.
18. Постнов Г. А., Радиотехника и электроника, 5, 1598 (1960).  
Распространение волн в изотропном плазменном волноводе.
19. Рухадзе А. А., Силин В. П., ЖТФ, XXXII, 423 (1962).  
Форма линии магнитотормозного поглощения в плазме.
20. Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д., ЖЭТФ, 39, 181 (1960).  
О неустойчивости плазмы с анизотропным распределением скоростей в магнитном поле.
21. Силин В. П., ЖЭТФ, 41, 861 (1961).  
Высокочастотная диэлектрическая постоянная плазмы.
22. Силин В. П., ЖЭТФ, 45, 1060 (1963).  
К теории колебаний слабо неоднородной плазмы.
23. Трубников Б. А., Бажанова А. Е., Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, т. 3, изд-во АН СССР, стр. 121.  
Магнитное излучение слоя плазмы.
24. Трубников Б. А., Кудрявцев В. С., в книге «Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии», Женева, 1958, т. I, Атомиздат, М., 1959, стр. 165.  
Излучение плазмы в магнитном поле.
25. Трубников Б. А., Якубов В. Б., Journ. Nucl. Energy C (Plasma Phys.), 5, 7 (1963).  
Циклотронное излучение электронов, имеющих двухмерное максвелловское распределение.



26. Харченко И. Ф., Файнберг Я. Б., Николаев Р. М., Корнилов Е. А., Луценко Е., Педенко Н., ЖЭТФ, 38, 685 (1960).  
Взаимодействие электронного пучка с плазмой.
27. Хинчин А. Я., ОГИЗ, ТТИ, М. — Л., 1943.  
Математические основания статистической механики.
28. Эйдман В. Я., ЖЭТФ, 34, 131 (1958).  
Излучение электрона, движущегося в магнитоактивной плазме.
29. Allen I. E., Hindmarsh W. R., Rep. A. E. R. E., GP/R-1761, U. K. Atomic Energy Authority (1955).  
Тормозное излучение ионизованного водорода.
30. Battocletti I. H., Hershberger W. D., Journ. Appl. Phys., 33, 2618 (1962).  
Резонансы в положительном столбе дугового разряда низкого давления.
31. Bernstein I. V., Phys. Fluids, 3, 489 (1960).  
Плазменные колебания, перпендикулярные постоянному магнитному полю.
32. Boley F. J., Nature, 182, 790 (1958).  
Рассеяние микроволнового излучения на плазменном столбе.
33. Bowles K. L., Journ. Res. Natl. Bur. Std., 65D, 1 (1961).  
Метод исследования ионосферы и экзосферы посредством некогерентного рассеяния на свободных электронах; теория и эксперимент.
34. Bowles K. L., Ochs G. R., Green I. L., Journ. Res. Natl. Bur. Std., 66D, 395 (1962).  
Об абсолютной интенсивности эха, некогерентно рассеянного от ионосферы.
35. Gallen H. V., Barasch M. L., Jackson J. L., Phys. Rev., 88, 1382 (1952).  
Статистическая механика необратимых процессов.
36. Gallen H. V., Green R. F., Phys. Rev., 86, 702 (1952).  
Об одной теореме необратимых процессов в термодинамике.
37. Chandrasekhar S., Rev. Mod. Phys., 15, 1 (1943).  
Стохастические проблемы в физике и астрономии.
38. Chang D. V., Phys. Fluids, 5, 1558 (1962).  
Тормозное излучение плазмы.
39. Chang D. V., Phys. Fluids, 5, 1564 (1962).  
Влияние плазмы на циклотронное излучение отдельной частицы.
40. Cillie G., Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 92, 820 (1932).  
Излучение водорода в газовой туманности.
41. Cohen M., Proc. IRE, 46, 172 (1958).  
Радиоастрономические поляризационные измерения.
42. Crawford F. W., Journ. Appl. Phys., 35, 1365 (1964).  
Внутренние резонансы разрядного столба.
43. Dicke R. H., Beringer R., Kuhl R. L., Vane A. V., Phys. Rev., 70, 340 (1946).  
Измерения поглощения в атмосфере посредством микроволнового радиометра.
44. di Francia G. T., Solar Radioastronomy, Varenna Summer School, Zanichelli, Bologna, 1959, p. 414.  
Введение в теорию синхротронного излучения.
45. Drummond W. E., Phys. Fluids, 5, 1113 (1962).  
Микроволновое рассеяние на неустойчивых плазменных волнах.
46. Fried B. D., Phys. Fluids, 2, 337 (1959).  
Механизм неустойчивости поперечных плазменных волн.
47. Gardner F. F., Shain C. A., Australian Journ. Phys., 11, 66 (1958).  
Новые данные по радиоизлучению планеты Юпитер.
48. Gould R. W., California Institute of Technology, Pasadena, California, Rep. № 4 (1955) on Research Conducted under Contract with the Office of Naval Research on Contract № 220 (13).  
Плазменные колебания и радиощумы возмущенного Солнца.

49. Griem H. R., McGraw-Hill Book Co., New York, 1964. (Готовится русский перевод).  
Спектроскопия плазмы.
50. Harding G. N., Roberts V., Proc. 5th Int'l. Conference on Ionization Phenomena in Gases (Münich), 1961, p. 1977.  
Спектроскопические исследования плазмы в диапазоне длин волн от 0,1 до 2,0 мм.
51. Herlofson N., Nature, **165**, 1020 (1950).  
Магнитогидродинамические волны в сжимаемом жидком проводнике.
52. Hwa R. C., Phys. Rev., **110**, 307 (1958).  
Влияние электрон-электронных взаимодействий на циклотронные резонансы в газовой плазме.
53. Johnson P. S., Phys. Fluids, **5**, 118 (1962).  
Спектр черенковского излучения холодной магнитоактивной плазмы.
54. Kihara T., Aono O., Suqihara R., Nucl. Fusion, **1**, 181 (1961).  
Теория черенковского и циклотронного излучения плазмы.
55. Koch H. W., Motz I. W., Rev. Mod. Phys., **31**, 920 (1959).  
Формулы для сечения тормозного поглощения и экспериментальные данные.
56. Landau R. W., Schmidt G., Phys. Fluids, **8**, 1890 (1965).  
Колебания плазменного столба.
57. Lashinski H., Advan. Electron. Electron Phys., **14**, 265 (1961).  
Черенковское излучение на микроволновых частотах.
58. Lawson I. D., Phil. Mag., **45**, 748 (1954).  
О соотношении между черенковским и тормозным излучениями.
59. Long M. W., Butterworth I. C., IEEE Trans. MTT-11, 389 (1963).  
Новая техника микроволновой радиометрии.
60. Montgomery C. G., M. I. T. Radiation Lab. Series, vol. II, McGraw-Hill, New York, 1947.  
Методы микроволновых измерений.
61. Mower L., Rept., MPL-1, Sylvania Microwave Physics Laboratory, Mountain View, California (1956).  
Распространение плоских волн в среде с анизотропной электропроводностью.
62. Mower L., Phys. Rev., **116**, 16 (1959).  
Проводимость теплой плазмы.
63. Nedelsky L., Phys. Rev., **42**, 641 (1932).  
Излучение медленных электронов.
64. Oberman S., Journ. Nucl. Energy C (Plasma Phys.), **2**, 154 (1961).  
Излучение плазмы, обусловленное коллективными эффектами.
65. Oster L., Phys. Fluids, **7**, 263 (1964).  
Эффективные сечения тормозного излучения в окрестности плазменной частоты.
66. Parzen P., Goldstein L., Phys. Rev., **82**, 724 (1951).  
Флуктуации тока газового разряда на постоянном токе.
67. Pawsey J. L., Bracewell R. N., Clarendon Press, Oxford, 1955.  
Радиоастрономия.
68. Pines D., Proc. Int'l. Congress Many-Particle Problems, (Utrecht), 1960.  
Плазменные колебания электронных газов.
69. Rostoker N., Simon A., Nucl. Fusion, Suppl. Pt. 2, p. 761 (1962).  
Коэффициенты Фоккера — Планка с учетом циклотронного излучения плазмы.
70. Sachdeva V. K., Trehan S. K., Phys. Fluids, **7**, 618 (1964).  
Электронные колебания ограниченной неоднородной плазмы в сильном магнитном поле.
71. Salpeter E. E., Journ. Geophys. Res., **68**, 1321 (1963).  
Флуктуации плотности в неравновесной плазме.
72. Stern R. A., Phys. Rev. Lett., **14**, 538 (1965).  
Генерация гармоник и гибридные частоты при плазменном резонансе.

73. Stix T. H., Phys. Rev., **106**, 1146 (1957).  
Колебания плазменного цилиндра.
74. Тапакa S., Mitani K., Kubo H., Institute of Plasma Physics Rept. IPPJ-13, Nagoya University, Nagoya, Japan (1963).  
Микроволновое излучение плазмы в магнитном поле.
75. Theimer O., Ann. Phys., **22**, 102 (1963).  
Влияние коллективных эффектов на тормозное излучение и электропроводность плазмы.
76. Thompson W. B., Pergamon Press and Addison-Wesley, 1962.  
Введение в физику плазмы.
77. Tidman D. A., Eviatar A., Phys. Fluids, **8**, 2059 (1965).  
Рассеяние пробной частицы на нарастающих плазменных флуктуациях.
78. Trivelpiece A. W., Gould R. W., Journ. Appl. Phys., **30**, 1784 (1959).  
Волны пространственного заряда в цилиндрических плазменных столбах.
79. Weibel E. S., Phys. Rev. Lett., **2**, 83 (1959).  
Спонтанно-нарастающие поперечные волны в плазме, обусловленные анизотропным распределением скоростей.
80. White W. D., Greene I. G., Proc. IRE, **44**, 939 (1956).  
Об эффективной температуре шума газоразрядных шумовых генераторов.
81. Wolf E., Nuovo Cimento (Ser. X), **13**, 1165 (1959).  
Когерентные свойства частично поляризованного электромагнитного излучения.
82. Woolley R. R., Stibbs D. W. N., Clarendon Press, Oxford, 1953.  
Внешние слои звезды.
83. Wort D. I. H., Journ. Nucl. Energy C (Plasma Phys.), **4**, 353 (1962).  
Излучение плазмой микроволнового шума.
84. Wyld H. W., Jr., Phys. Fluids, **3**, 408 (1960).  
Излучение, обусловленное плазменными колебаниями ограниченной плазмы в магнитном поле.

## Именной указатель

- Агдур (Agdur) 204  
Альфен (Alfven) 241  
Арунасалам (Arunasalam) 284, 333, 334, 336  
Ауер (Auer) 288, 303, 364  
Ацеведо (Azevedo) 305
- Бабииков В. В. 116  
Бакли (Buckley) 212  
Балванц (Balwanz) 235  
Балдвин (Baldwin) 212, 214, 250  
Баррет (Barret) 147  
Батнагар (Bhatnagar) 136  
Бачинский (Bachinski) 100  
Бекефи (Bekefi) 73—76, 93, 272, 295—297, 362, 363, 371, 397  
Бернстайн (Bernstein) 287  
Берс (Bers) 25, 144, 275, 278, 326, 369  
Бом (Bohm) 23, 136, 141, 151, 159  
Борн (Born) 41  
Ботт (Bott) 372  
Боулис (Bowles) 314  
Браун (Brown) 73—75, 93, 233, 250, 269, 270—272, 333, 334, 336, 371, 397  
Бриггс (Briggs) 359, 360, 366  
Буксбаум (Buchsbaum) 270, 275, 292
- Вайль (Whale) 392  
Вайлд (Wild) 178  
Вайнберг (Weinberg) 42  
Вайс (Weiss) 178  
Валетцко (Waletzko) 210—212  
Валш (Walsh) 392  
Вахтель (Wachtel) 372, 373, 378  
Вестфольд (Westfold) 55, 69, 237  
Вин (Wien) 63  
Волтьер (Waltjer) 244  
Вольф (Wolf) 41
- Гетманцев Г. Г. 241  
Гинзбург В. Л. 172, 173, 224, 241  
Гордон (Gordon) 314, 491
- Гоулд (Gould) 196, 203, 205, 258, 259, 330  
Грин (Greene) 11, 112, 114  
Гросс (Gross) 23, 136, 141, 151  
Груббер (Gruber) 286, 295—297, 364  
Грэхэм (Graham) 402, 404  
Гурни (Gurnee) 284
- Давидсон (Davidson) 284  
Даугерти (Daugherty) 316  
Даусон (Dawson) 149, 170, 181, 191, 306  
Дебай (Debye) 154  
Джерри (Gerry) 319—322  
Джинс (Jeans) 63  
Джонс (Jones) 147  
Джук (Jouce) 160  
Дик (Dicke) 404  
Драйсер (Dreicer) 304  
Драммонд (Drummond) 254, 256  
Дюпре (Dupree) 176, 177
- Железняков В. В. 374
- Зигмар (Sigmar) 160  
Зоммерфельд (Sommerfeld) 108
- Иванс (Evans) 326, 327  
Игнат (Ignat) 121  
Ингрэм (Ingraham) 232, 398, 408, 409  
Иосида (Yoshida) 380
- Каплан (Kaplan) 257, 258  
Кипенхауэр (Kiepenheuer) 241  
Кирхгоф (Kirchoff) 63  
Клейн (Klein) 364  
Клотьер (Cloutier) 100  
Коган В. И. 116  
Кокколи (Coccoli) 272  
Коломенский А. А. 276  
Крауфорд (Crawford) 286, 288, 362, 364  
Кролл (Kroll) 331  
Крук (Krook) 136  
Кукес (Kuckes) 306

- Лабуда (Labuda) 491  
 Ландау Л. Д. 140, 141  
 Ленгмюр (Langmuir) 20  
 Либерман (Lieberman) 144  
 Лихтенберг (Lichtenberg) 249, 251  
 Лоевенталь (Loewenthal) 326, 327
- Мак-Карти (McCarthy) 408, 409**  
 Малмберг (Malmberg) 145, 147, 261  
 Мантей (Mantei) 289  
 Мартин (Marty) 172  
 Мелтц (Meltz) 198, 291, 293  
 Мерсье (Mercier) 165  
 Месервей (Messerve) 283, 284  
 Монтгомери (Montgomery) 343  
 Муркрофт (Moorcroft) 326  
 Муси (Musha) 380
- Найквист (Nyquist) 120, 385  
 Никель (Nickel) 203, 330
- Оберман (Oberman) 149, 170, 181, 191**  
 Остер (Oster) 111, 229, 247  
 Охара (Ohara) 379
- Пайнс (Pines) 159  
 Паркер (Parker) 203, 330  
 Патли (Putley) 250  
 Патрик (Patrick) 322  
 Паунд (Pound) 407  
 Пенроуз (Penrose) 352  
 Перкинс (Perkins) 329  
 Прадхан (Pradhan) 281
- Райт (Wright) 75, 76**  
 Рэлей (Rayleigh) 63  
 Робинсон (Robinson) 407  
 Розенблют (Rosenbluth) 254, 256, 306,  
 317, 324, 334  
 Рон (Ron) 331  
 Ростокер (Rostoker) 138, 153, 317,  
 324, 331, 334  
 Роуз (Rose) 319—321  
 Рытов С. М. 50, 51, 54, 61, 132, 133
- Саймон (Simon) 306**  
 Салпетер (Salpeter) 329  
 Сесник (Sesnic) 250  
 Ситенко А. Г. 151, 160  
 Смерд (Smerd) 55, 69, 173, 175, 178  
 Спек (Speck) 369  
 Старрок (Sturrock) 180, 365  
 Стоун (Stone) 288, 303  
 Сыроватский С. И. 241
- Таторонис (Tataronis) 286, 288, 361,  
 364**
- Твист (Twiss) 353, 374  
 Терлоув (Terlouw) 117  
 Тидман (Tidman) 176, 177, 181  
 Томпсон (Thompson) 319  
 Тонкс (Tonks) 20  
 Тривелпис (Trivelpiece) 250  
 Трубников Б. А. 72, 239, 249, 250, 253,  
 256
- Уортон (Wharton) 110, 145, 147, 170,  
 268, 275, 276, 391**
- Фарлей (Farley) 316**  
 Фелпс (Phelps) 94  
 Филдс (Filds) 74  
 Фиокко (Fiocco) 319  
 Фрайхейт (Freyheit) 198, 291, 293  
 Франклин (Franklin) 147  
 Френч (French) 100
- Хаббард (Hubbard) 153**  
 Хазегава (Hasegawa) 292  
 Хайнс (Hines) 160  
 Халперн (Halpern) 194  
 Хардинг (Harding) 106  
 Харрис (Harris) 285  
 Херлофсон (Herlofson) 195, 241  
 Хилд (Heald) 110, 170, 268, 275, 276,  
 391  
 Хилл (Hill) 257, 258  
 Хиршфилд (Hirshfield) 93, 233, 250,  
 268, 270—272, 371—373, 378  
 Хо (Hoh) 201  
 Христиансен (Christiansen) 391  
 Хупер (Hooper) 121, 362, 363  
 Хюккель (Hückel) 154
- Цукер (Zucker) 190, 191**
- Шейер (Scheuer) 224**  
 Шкловский И. С. 241, 242  
 Шлезингер (Schlesinger) 283  
 Шмидт (Schmidt) 194  
 Шмитт (Schmitt) 198, 291, 293  
 Шотт (Schott) 220  
 Шпик (Speck) 362  
 Штейнбек (Steenbeck) 73
- Эйдман В. Я. 276**  
 Эйнштейн (Einstein) 64, 67  
 Эльwert (Elwert) 111  
 Эллис (Allis) 50, 275  
 Энгель (von Engel) 73
- Янгвассон (Yngvesson) 329**

## Предметный указатель

- Автокорреляционная функция 33  
Антенная температура 386
- Бозон 60
- Вектор Пойнтинга 24, 26  
Волна с отрицательной энергией 357, 361  
Волновое уравнение 18, 68  
Волновой вектор 4  
Высокочастотная проводимость 170, 381
- Групповая скорость 27
- Дебаевский радиус экранирования 143, 171  
Декремент затухания 53  
Добротность резонатора 398  
Допплеровская форма линии 231  
Дипольное возбуждение антенны в плазме 209  
— — плазменного цилиндра 202  
— — излучение ансамбля зарядов 86, 165  
— — в диспергирующей среде 86, 166  
— — отдельного заряда 85  
— — при рассеянии 308  
Дисперсионное соотношение для неоднородной ограниченной плазмы 202, 292  
— — — поверхностных волн 193  
— — — поперечных волн 23, 280  
— — — продольных волн 21, 136, 358  
— — — холодной плазмы 19  
— — — электронных пучков 285  
— — — при затухании Ландау 287  
— — — столкновениях 136  
— — — циклотронном затухании 287  
— — с эффективной частотой столкновений 118  
Дифференциальная испускательная способность 98, 102, 219, 225, 227  
— — скорость индуцированного испускания 65
- Дифференциальная скорость поглощения 66  
— — спонтанного испускания 65  
Диэлектрическая проницаемость 15  
Диэлектрический коэффициент антиэрмитовый 25  
— — для магнитоактивной плазмы 264, 284  
— — — плазмы, в которой преобладают столкновения 97  
— — — поперечных волн 23, 97  
— — — продольных волн 23, 284  
— — — тепловой плазмы 23, 140  
— — — холодной плазмы 19  
— — — электронных пучков 285, 355  
— — эрмитовый 24, 25
- Закон Ома 18, 125  
— Кирхгофа 70  
— — в волноводе 394  
— — для продольных колебаний 151, 152  
— — — равновесной среды 70  
— — — термически неравновесной плазмы 70, 183  
— — при наличии дифракции 133  
— Рэлея — Джинса 63  
— смещения Вина 63  
— Снелля 45  
— Стефана — Больцмана 115  
Затухание Ландау 141, 287, 351, 352
- Излучение заряда, движущегося с ускорением 82, 216  
— Черенкова 87  
— — в плазме в магнитном поле 274  
— — поперечных волн 186  
— — продольных волн 152, 185  
— черного тела в анизотропной плазме 61  
— — — вакууме 50, 62  
— — — волноводе 383, 384

- Излучение **черного** тела в тер-  
 моядерном реакторе 115  
 — — — для поперечных волн 64  
 — — — продольных волн 64  
 Импеданс антенны 205, 210  
 — резонатора 207  
 Индуцированное испускание 65  
 — поглощение 66  
 Интенсивность излучения черного тела  
 50, 65  
 — рассеянного излучения 313  
 — тормозного излучения 93, 94,  
 99  
 — циклотронного излучения 234, 252,  
 270, 272
- Кассиопея А 242  
 Корреляционная функция 33  
 Коэффициент испускания 54, 55  
 — — в волноводе 394  
 — — для анизотропного распределе-  
 ния 78  
 — — — изотропного распределения  
 72  
 — — — продольных волн 137, 138,  
 185  
 — — — рассеяния 312, 313  
 — — — столкновений электрон —  
 атом 92  
 — — — электрон — ион 105  
 — — — циклотронного излучения 230,  
 238, 248, 267  
 — — — частично ионизованного газа  
 116  
 — поглощения 53  
 — — в солнечной короне 174  
 — — — термоядерном реакторе 116,  
 252  
 — — для анизотропного распределе-  
 ния скоростей 78  
 — — — затухания Ландау 141, 287  
 — — — изотропной функции распре-  
 деления 72  
 — — — продольных волн 137, 138,  
 301  
 — — — рассеяния 312  
 — — — циклотронного затухания  
 281, 284  
 — — при неустойчивостях 352  
 — — — распространении в волново-  
 де 394  
 — — — столкновениях электрон —  
 атом 92, 97  
 — — — электрон — ион 105, 108  
 — — — циклотронных эффектах 252,  
 272
- Коэффициенты Эйнштейна А и В 67  
 Крабовидная туманность 242, 245
- Ленгмюровский зонд 75  
 Лоренцева форма линии 229, 231  
 Лучевой показатель преломления 48
- Магнитная проницаемость 15  
 Микроволновой мост 396  
 Множитель Гаунта 108, 169
- Необыкновенная волна 238, 265, 271,  
 274, 282  
 Неустойчивость абсолютная 365  
 — двухпотоковая 332, 351, 352, 357  
 — ионно-акустических волн 331, 335  
 — конвективная 365  
 — обусловленная анизотропией ско-  
 ростей 376  
 — поперечных волн 352, 353, 369  
 — продольных волн 331, 335, 355  
 — реактивная 358  
 — резистивная 358  
 — релятивистская 369  
 — столкновительная 360, 376
- Обратная волновая поверхность 30  
 Обрезанная функция 32  
 Обыкновенная волна 238, 265, 282  
 Оптическая толщина 55, 116, 174, 234  
 Отношение давления электронов  
 (ионов) к магнитному давлению 253,  
 255  
 Отражение волн в волноводе 394  
 — — от градиента плотности 172, 292  
 — — — плазменного слоя 58, 100  
 Отрицательная температура 71, 354
- Параметр непрозрачности 252  
 — удара 87  
 Параметры Стокса 37, 226  
 Перенос излучения в анизотропной  
 среде 48, 49  
 — — — вакууме 46  
 — — — излучающей среде 52  
 — — — изотропной среде 46  
 — — — поглощающей среде 52  
 — — — рассеивающей среде 57  
 — — — среде, изменяющейся во вре-  
 мени 58  
 Плазменная дисперсионная функция  
 286  
 Плазменный резонатор 205  
 Плазмон 60

- Поверхностная волна 188  
 Поверхность волновых нормалей 50  
 — медленности 30  
 — показателя преломления 30  
 — фазовой скорости 50  
 Поглощательная способность 133, 394  
 Показатель преломления 27  
 Поляризация излучения 35  
 — — при рассеянии 309  
 — — ускоренного заряда 85  
 — — черного тела 52  
 — тормозного излучения 135  
 — циклотронного излучения 227, 238, 245, 248, 266  
 Постоянная распространения 265  
 Потенциал Льенара — Вихерта 83  
 Потери энергии электрона при столкновениях 90  
 — — — — тормозном излучении 115  
 — — — — циклотронном излучении 255  
 Пробная «одетая» частица 153  
 Пробный заряд 127, 139  
 Проводимость 17  
 Пространственная дисперсия 23  
 Принцип детального равновесия 67  
 — равномерного распределения энергии 63  
  
 Радиометр 401  
 Рассеяние в ионосфере 326  
 — — магнитном поле 327  
 — — солнечной короне 313  
 — двух поперечных волн 330  
 — на ансамбле зарядов 311  
 — — ионно-акустических волнах 325, 331  
 — — отдельном электроны 309  
 — — плазменных колебаниях 325, 328  
 — — плазменным цилиндром 195, 290  
 — при резонансах Тонкса — Даттнера 329  
 — продольных волн на ионах 176  
 Реактивная проводимость 207  
 Резонанс Тонкса — Даттнера 195, 198, 292  
 — Тонкса — Херлофсона 204  
  
 Свободно-свободные переходы 16, 66  
 Солнечные вспышки типа II 179  
 — — — III 179  
 Соотношения взаимности Онзагера 24  
 — Крамерса — Кронига 282  
 — Мэнли — Роува 345, 346  
 Спектральная плотность мощности 32  
 — — в неравновесной среде 156, 157  
  
 Спектральная плотность мощности в равновесной среде 125  
 — — — флуктуаций электрического поля 129, 156  
 — — — электронных флуктуаций 311  
 — — — энергии 45  
 Спектральный индекс 241  
 Средний свободный пробег до рассеяния 309  
 Степень круговой поляризации излучения 240  
 — поляризации излучения 40, 240  
 Статистика Бозе — Эйнштейна 43  
  
 Температура излучения 57  
 — — в волноводе 394  
 — — — резонаторе 400  
 — — — полностью ионизованной горячей плазмы 183  
 — — — при анизотропном распределении скоростей 78  
 Теорема Винера — Хинчина 33  
 — Лнувилля для жидкости 350  
 — — — фотонов 47  
 — — — частиц 123  
 — Найквиста 120, 128, 129  
 — Парсевала 85  
 Термоядерный реактор 115, 255  
 Томсоновское эффективное сечение 309  
 Тормозное излучение в диэлектрической среде 69, 98, 99  
 — — — термоядерном реакторе 114, 115  
 — — — частично-ионизованном газе 116  
 — — — из солнечной короны 172, 173, 178  
 — — — на высоких частотах 95  
 — — — нетеплового источника 175  
 — — — при столкновениях электрон — атом 87  
 — — — — электрон — ион 101  
 — — — — электрон — отрицательный ион 103  
 — — — — электрон — электрон 86  
 Траектория луча 42  
 Туннельное прохождение 273  
  
 Удельная интенсивность излучения 43  
 Уравнение Больцмана 16, 17, 96  
 — Власова 139  
 — переноса 48, 55  
 — Пуассона 127, 139  
 Уравнения Максвелла 15  
 Усиление волн 71, 352, 367  
 Усреднение по ансамблю 35



- Усредненная испускательная способность 239  
Уширение линии 234
- Фарадеевское вращение 245  
Флуктуации электромагнитного поля 31, 127, 301  
— электронной плотности 316  
Флуктуационная температура 157  
Флуктуационно-диссипативная теорема 120, 121, 124  
Формула Лармора 85  
— Планка 61
- Функция Фойгта 231  
— источника 55  
— — для полностью ионизованной плазмы 183  
— — — рассеяния 313  
— — Дройвестейна 76  
— — изотропная 72  
— — максвелловская 67  
— — одномерная 157  
— — релятивистская 67  
— распределения анизотропная 76  
— — частиц по скоростям 16  
— усиления антенны 389
- Циклотронное затухание 281  
— излучение в термоядерном реакторе 220, 221, 255  
— — гармоник 219, 236  
— — космического источника 241  
— — нерелятивистских электронов 227  
— — отдельной частицы 216  
— — поперечных волн 216, 264, 280, 369
- Циклотронное излучение продольных волн 290, 298, 361  
— — ультрарелятивистских электронов 234  
— — умеренно релятивистских электронов 246
- Частота гибридная 270  
— плазменная 19  
— столкновений для передачи импульса 89  
— — при столкновениях электрон — атом 89  
— — — электрон — ион 90, 91  
— циклотронная 20  
— эффективная 118
- Число частиц в дебаевской сфере 186
- Шумовое число усилителя 406, 407
- Электрическая восприимчивость среды 315  
Эффект Доплера 230, 277  
Эффективное сечение для передачи импульса 89  
— — — потери энергии 90  
— — излучения 88  
— — рассеяния 311  
— — томсоновское 309
- Эхо плазменной волны 261  
— циклотронное 257
- Яркая температура 387

# Оглавление

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие автора к русскому изданию . . . . .	7
Предисловие автора . . . . .	8
Обозначения . . . . .	13
Некоторые постоянные . . . . .	14
<b>ГЛАВА 1. Перенос излучения . . . . .</b>	<b>15</b>
§ 1. Уравнения поля и частиц . . . . .	15
Проводимость и диэлектрический коэффициент . . . . .	17
§ 2. Дисперсионные соотношения для электромагнитных полей в плазме «Теплая плазма» . . . . .	18
Потери энергии волны . . . . .	22
Потери энергии волны . . . . .	24
§ 3. Плотность энергии и поток энергии . . . . .	24
Скорость распространения энергии . . . . .	27
Направление и величина $\mathbf{w}$ в зависимости от $\mathbf{k}$ . . . . .	28
§ 4. Некоторые величины, связанные с хаотически флуктуирующими полями Поляризация излучения . . . . .	31
Параметры Стокса для квазимонохроматических волн . . . . .	35
Параметры Стокса для квазимонохроматических волн . . . . .	38
§ 5. Применение понятий геометрической оптики . . . . .	41
Спектральная плотность энергии . . . . .	44
§ 6. Уравнение переноса . . . . .	45
Показатели $n$ и $n_r$ в холодной анизотропной плазме с неподвижными ионами . . . . .	49
§ 7. Перенос энергии в поглощающей и излучающей среде . . . . .	52
Уравнение сохранения энергии для среды с малыми потерями . . . . .	54
Уравнение переноса для изменяющихся во времени параметров плазмы . . . . .	58
<b>ГЛАВА 2. Закон излучения Кирхгофа . . . . .</b>	<b>60</b>
§ 1. Излучение черного тела . . . . .	60
Два примера . . . . .	64
§ 2. Коэффициенты Эйнштейна для спонтанного и индуцированного испуска- ния и поглощения . . . . .	64
Соотношения между дифференциальными скоростями $\eta_\omega$ , $\eta_{\omega S}$ и $\eta_{\omega A}$ . . . . .	66
§ 3. Функция источника и закон Кирхгофа . . . . .	69
Классический предел $j_\omega$ , $\alpha_\omega$ и $S_\omega$ . . . . .	72
Анизотропное распределение скоростей . . . . .	77
§ 4. Взаимодействие между полем излучения и ансамблем электронов . . . . .	79

ГЛАВА 3. Испускание и поглощение при парных столкновениях . . . . .	82
§ 1. Спектр излучения заряда, движущегося с ускорением . . . . .	82
§ 2. Тормозное излучение при столкновениях электрон — атом . . . . .	87
Высокочастотные эффекты . . . . .	95
§ 3. Эффекты дисперсии плазмы . . . . .	96
§ 4. Столкновения электрон — ион (классическая механика) . . . . .	101
§ 5. Столкновения электрон — ион (квантовая механика) . . . . .	107
Излучение на высоких частотах . . . . .	111
Важность тормозного излучения в термоядерных реакторах . . . . .	114
§ 6. Излучение частично ионизованного газа . . . . .	116
Эффективная частота столкновений и другие вспомогательные величины, удобные для расчета . . . . .	118
ГЛАВА 4. Флуктуации . . . . .	120
§ 1. Флуктуационно-диссипативная теорема для термически равновесной среды . . . . .	120
§ 2. Флуктуации электромагнитного поля . . . . .	127
Продольное электрическое поле, $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = 0$ . . . . .	129
Поперечные электромагнитные волны, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ . . . . .	130
Пример . . . . .	131
§ 3. Использование флуктуационно-диссипативной теоремы для ограниченных сред . . . . .	132
§ 4. Испускание и поглощение продольных волн при наличии столкновений . . . . .	136
Коэффициент испускания для продольных волн . . . . .	137
§ 5. Продольный диэлектрический коэффициент $K_L(k, \omega)$ для полностью ионизованной плазмы . . . . .	138
Дисперсионное соотношение . . . . .	143
Примеры . . . . .	148
§ 6. Спектр микрополей в плазме в отсутствие теплового равновесия . . . . .	152
Корреляционная функция для флуктуаций электрического поля . . . . .	155
Коэффициент испускания для продольных волн . . . . .	158
§ 7. Обмен энергией между пробным зарядом и плазмой . . . . .	158
Поляризационные потери . . . . .	158
Стохастическое ускорение . . . . .	161
ГЛАВА 5. Коллективное испускание . . . . .	165
§ 1. Тормозное излучение при коллективных кулоновских взаимодействиях . . . . .	165
Ионные корреляции . . . . .	170
§ 2. Излучение «спокойного» Солнца . . . . .	172
§ 3. Нетепловое излучение вблизи плазменной частоты (излучение «возмущенного» Солнца) . . . . .	175
Излучение «возмущенного» Солнца . . . . .	178
Излучение на частотах вблизи $2\omega_p$ . . . . .	180
§ 4. Высокочастотная проводимость и коэффициент поглощения полностью ионизованной плазмы . . . . .	181
Закон Кирхгофа для термически неравновесной плазмы . . . . .	183
Плотность энергии излучения . . . . .	184
Испускание продольных волн при движении электрона с ускорением . . . . .	185
§ 5. Связь продольных и поперечных электромагнитных волн на границах . . . . .	186
Поверхностные волны . . . . .	188
Излучение плазменного слоя (Даусон и Оберман [191]) . . . . .	191
§ 6. Испускание и рассеяние плазменным цилиндром . . . . .	195
Излучение . . . . .	204
Аксиальное распространение . . . . .	205
§ 7. Импеданс антенны, возбуждающей плазменные колебания . . . . .	205
Характеристики резонансных зондов на постоянном токе . . . . .	214

ГЛАВА 6. Циклотронное излучение . . . . .	216
§ 1. Циклотронное излучение электрона в статическом магнитном поле . . . . .	216
Излучение электрона, движущегося по круговой орбите ( $\beta_{\parallel} = 0$ ) . . . . .	218
Пример . . . . .	220
Излучение электрона, движущегося по спиральной траектории ( $\beta_{\parallel} \neq 0$ ) . . . . .	221
Излучение стационарного во времени ансамбля частиц . . . . .	224
§ 2. Циклотронное излучение нерелятивистских электронов . . . . .	227
Эффект столкновений . . . . .	227
Сводка механизмов уширения линии . . . . .	229
Суммирование $\eta_{\omega}$ по ансамблю частиц с некоторой функцией распределения по скоростям . . . . .	230
§ 3. Излучение ультррелятивистских электронов . . . . .	234
Обыкновенная и необыкновенная волны . . . . .	238
Нетепловое излучение космических источников . . . . .	241
§ 4. Излучение умеренно релятивистских электронов . . . . .	246
Излучение плазмы, находящейся в тепловом равновесии . . . . .	248
Самопоглощение . . . . .	252
Влияние циклотронного излучения на конструкцию термоядерных реакторов . . . . .	255
§ 5. Явление эха вблизи электронной циклотропной частоты . . . . .	257
ГЛАВА 7. Волны в магнитоактивной плазме . . . . .	264
§ 1. Волны в холодной плазме . . . . .	264
Черенковское излучение . . . . .	274
§ 2. Высокочастотная проводимость горячей бесстолкновительной плазмы . . . . .	277
§ 3. Поперечные электромагнитные волны . . . . .	280
§ 4. Диэлектрический коэффициент для продольных волн в магнитном поле . . . . .	284
§ 5. Продольные колебания в ограниченной плазме . . . . .	290
§ 6. Генерация продольных волн электронами плазмы . . . . .	298
Испускание одним пробным электроном в максвелловской плазме . . . . .	301
Связь продольных и поперечных волн . . . . .	304
Другие механизмы испускания на гармониках . . . . .	306
ГЛАВА 8. Рассеяние электромагнитных волн на флуктуациях плотности . . . . .	307
§ 1. Общая теория рассеяния . . . . .	307
Коэффициенты «поглощения» и «испускания» для рассеяния . . . . .	312
§ 2. Спектр флуктуаций плотности $S(\mathbf{k}, \omega)$ . . . . .	314
§ 3. Рассеяние на неэкранированных электронах . . . . .	317
§ 4. Коллективные эффекты при рассеянии в термически равновесной плазме . . . . .	322
§ 5. Рассеяние на усиленных флуктуациях . . . . .	327
«Электронная плазменная линия» ( $\omega_s \approx \omega_i \pm \omega_p$ ) . . . . .	328
«Ионно-звуковая линия» ( $\omega_s \approx \omega_i \pm \omega_p^+  k L_D$ ) . . . . .	331
§ 6. Генерация продольных волн падающей поперечной волной . . . . .	337
§ 7. Формализм связанных мод . . . . .	340
Сохранение энергии . . . . .	344
Соотношения Мэнли — Роува . . . . .	345
Частные решения (8.87) и (8.88) . . . . .	346
Моды с отрицательной энергией и взрывные взаимодействия . . . . .	347
ГЛАВА 9. Микронеустойчивости . . . . .	349
§ 1. Общие замечания о возникновении неустойчивостей . . . . .	349
Продольные волны . . . . .	351
Коэффициент поглощения поперечных волн в разреженной плазме . . . . .	352

§ 2. Неустойчивости продольных волн . . . . .	355
Двухпоточковая неустойчивость . . . . .	357
Реактивная и резистивная неустойчивости среды . . . . .	358
Распространение волн под углом к магнитному полю . . . . .	360
Абсолютная и конвективная неустойчивости . . . . .	365
Слабо связанные волны . . . . .	367
§ 3. Неустойчивости поперечных волн . . . . .	369
Неустойчивость бесстолкновительной плазмы вблизи циклотронных гармоник . . . . .	369
Неустойчивость циклотронного излучения ультрарелятивистских электронов . . . . .	374
Неустойчивости, обусловленные столкновениями . . . . .	376
ГЛАВА 10. Экспериментальные методы . . . . .	382
§ 1. Течение излучения в волноводах . . . . .	382
Течение черного излучения . . . . .	383
§ 2. Прием излучения антеннами . . . . .	386
Соотношение между эффективной площадью $A(\theta, \phi)$ и функцией усиления $G(\theta, \phi)$ антенны . . . . .	389
§ 3. Излучение плазмы в волноводах и резонаторах . . . . .	392
Плазма, находящаяся в тепловом равновесии . . . . .	392
Плазма, не находящаяся в тепловом равновесии . . . . .	394
Измерения $P_{\omega}(m, n)$ . . . . .	395
Определение $T_r$ методом микроволнового моста . . . . .	396
Излучение в резонаторе . . . . .	398
§ 4. Радиометры . . . . .	401
Радиометр Дика . . . . .	404
Измерения радиометрами с временным разрешением . . . . .	407
Литература . . . . .	410
Дополнительная литература . . . . .	423
Именной указатель . . . . .	428
Предметный указатель . . . . .	430

Дж. Бекетфи  
**Радиационные  
процессы  
в плазме**

Редактор *Е. И. Майкова*  
Художник *Г. А. Щетинин*  
Художественный редактор *П. Ф. Некунда*  
Технический редактор *А. Г. Резоухова*

Сдано в набор 22/X 1970 г.  
Подписано к печати 11/III 1971 г.  
Бумага кн.-журн. 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub> = 13,75 бум. л.  
Печ. л. 27,5 Уч-изд. л. 26,05 Изд. № 2/5378  
Цена 2 р. 81 к. Зак. 838

---

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»  
Москва, 1-й Рижский пер., 2

---

Ордена Трудового Красного Знамени  
Ленинградская типография № 2  
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР,  
Измайловский проспект, 29.